Ю. О. ГУРВИЦ но Р. В. ГАНГНУС

ГЕОМЕТРИЛЫ
ДЫШЕТСКОН КНИГА

ШОР ШКОЛАЛЫ НЫРИСЕТЙ ЛЮКЕТЭЗ

Планиметри

КУНЛЭН УДМУРТ КНИГА ПОТТОНЭЗ
ИЖКАР ★ 1934

Ю. О. ГУРВИЦ но Р. В. ГАНГНУС

ГЕОМЕТРИЛЫ
ДЫШЕТСКОН КНИГА

ШОР ШКОЛАЛЭН 6—8 КЛАСС'ЁСЫЗЛЫ
НЫРИСЕТЙ ЛЮКЕТЭЗ

Планиметри

КЫКЕТЙЗЭ ТУПАТЫСА
ПОТТЭМЫН

РСФСР-ысь НКП-лэн коллегиэныз
юнматэмын

Берыктйзы: Т. Н. БОРИСОВ но А. Т. ТРОФИМОВ

Удмурт кылэ берыктэмез Облонолэн
кивалтйсеныз юнматэмын

КУНЛЭН УДМУРТ КНИГА ПОТТОНЭЗ
ИЖКАР ★ 1934

Отв. редактор *А. Н. Клабуков*
Техредактор *А. Перевощиков*

Книга сдана в набор 9/VIII 1934 г.; подписана к печати 2/IX 1934 г. Формат $62 \times 94^1/_{10}$. Тираж 9.000. Издат листов $11^3/_4$. Бум. листов 6. Типогр. знаков на 1 бум. листе 109344. Облит № 705. Заказ № 2725

---

17 ф-ка нац. книги ОГИЗ'а РСФСР треста «Полиграфкнига»
Москва, Шлюзовая наб., д. № 10.

КУТСКОНЭЗ

ОСНОВНОЙ ГЕОМЕТРИО ВАЛАН’ЁС.

§ 1. Физико но геометрио мугор.

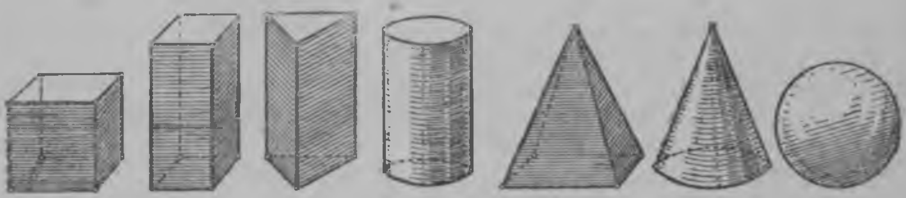
Асьме котырысь вань тӥрлык‘ёслэн яке мугор’ёслэн одӥг ог’я пӧртэмлыксы вань—ваньзы соос пространстволэсь нимаз люкетсэ басьто. Соэн артэ ик котькуд мугорлэн быдэс рад физико аслык‘ёсыз вань, со аслык‘ёс мукет мугорлэсь соэ пӧртэмало. Сыӵе физико аслык‘ёс пӧлын лыд‘ясько мургорлэн секталаэз, солэн массаэз, пыртӥз лэзёнтэмез, пезьдонэз буез но мугорлэн веществоэныз герӟаськем аслык’ёс. Физико аслык’ёсыз сяна котькуд мугорлэн солы гинэ тупась педпал аслык’ёсыз но вань—тус но бадӟымлык; та возьматэм аслык’ёс мугорлэн геометрио аслык’ёсыз шуса нимасько.

Мугорлэсь физико аслык'ёссэ естественной наукаос—физика, хими но мызон’ёсыз дышето. Мугорлэсь нош геометрио аслык’ёссэ, солэсь туссэ (формазэ) но бадӟымлыксэ (котькуд мугорлэн солы гинэ тупась, одӥг мугорез мызон мугорлэсь вис’ясь, пӧртэм карись аслык’ёс) геометри дышетэ. Мугорлэсь физико аслык‘ёссэ геометри уг басьты; озьы бере геометриэз дышетскись мурттлы одӥг кадь—мугорлэсь туссэ но солэсь геометрио аслык’ёссэ эскерон понна корт куб яке умой волятэм гранит куб луэмзэ со уг чакла, озьы ик резина шар яке кыскем лы шар, пиала яке пу призма луэмзэ уг учкы.

Котырысь мугор’ёслэсь туссэс умой тодон-валан понна, геометриэз дышетскись муртлы мугорлэн физико аслык’ёсыз бордысь малпанзэ, со сярись тодон’ёссэ люкыны, соосыз палэнтыны быгатоно, малпанзэ, учконзэ мугор’ёслэн одӥг аслыксы бордэ гинэ дугдытыны быгатоно, со шоре гинэ учкыны ассэ дышетоно—соослэсь туссэс гинэ тодыны кулэ. Асьме котырысь улон-вылонын зэмзэ ик, мугорлэн тусэз мызон аслык’ёсызлэсь люкиськымтэзэс тодэ ваёно лыктэ но геометри, мугорлэсь туссэ дышетыса,со тусэз котырысь пространствоысь зэмен луись мугорлэсь соэ вис’ямез, люкемез тодэ уськытоно луэ. Кема, уно дауро опытэн гинэ адями палэно (отвлеченный) тус’ёсын малпаськыны дышиз. Сооcлэсь пӧртэмлыксэс дышетскиз но нимаз тус’ёслэсь аслыксэс реальной улон-вылонын—техникаын, производствоын уже кутэ.

Озьыэн, геометри,—мугорлы вуись физико аслык’ёсын физико мугорез уг дышеты. Геометри вань физико аслык’ёстэк кельтэм но туссэс гинэ возись мугорез дышетэ. Соин ик, зэмен луись физико мугорлэсь бадӟымлыксэ дышетэ. Со мугор бордысь физико аслык'ёсыз малпаса палэнтэмын, люкемын. Сыӵе мугор'ёс геометрио мугор'ёс шуса нимасько. Котькыӵе физико мугор пространстволэсь нимысьтыз люкет басьтэмзэ лыдэ басьтыса, **геометрио мугор – физико мугорен басьтэм пространстволэн люкетэз луэ**, мызон кыл'ёсын вераса,— **геометрио мугор — котькуд пал ласянь котыртэм пространстволэн люкетэз луэ.**

Геометрио мугорлэн, котькыӵе физико мугорлэн сямен ик, куинь мертанэз луэ: кузьдалаэз, пасьталаэз но ӝуждалаэз яке зӧкталаэз. Асьмеос мугор бордысь солэсь кыӵе ке люкетсэ люким ке, мугорлэн со люкетэз озьы ик мугор луоз. Маке гинэ мугорез, соэ котыртӥсь пространстволэсь но мызон мугор'ёслэсь люке, со мугорлэн вылтырез шуса нимаське; **мугорлэн границаэз вылтыр луэ.**



1 сур.

Асьме котырысь тӥрлык'ёс, арбериос пӧлысь асьмеос котькыӵе пӧртэмесь вылтыр'ёсын пумиськиськом, со вылтыр'ёслэн туссы мугорлэн тусэныз тодытӥське. Озьы, классной доскалэн, ӝӧклэн, ведралэн, туплэн (мяч), шарлэн, цилиндрлэн конуслэн вылтырзы пӧртэмесь луо, соос мугорлэн тусэз бордысь гинэ пото.

Мугорлэн вылтырез люкет'ёслы люкиськись ке, солэн нимысьтыз люкетэз но озьы ик вылтыр луэ.

1 суред вылын пӧртэм тус'емесь мугор'ёс возьматэмын: куб, шонерсэрег'ем параллелепипед, призма, цилиндр, пирамида, конус, шар. Та мугор'ёс пӧлысь ог'ёсыз — куб, параллелепипед призма, пирамида — ӵошкес вылтыро луо, мызон'ёсыз, кылсярись, шар — кырыж вылтыро луо, нош куинетӥосыз — цилиндр но конус — ӵошкес но кырыж вылтыр'ёсын люкисько.

Вылтырлэн мертанэз кык: кузьдала но пасьтала. Вылтырлэн границаэз, мызон сямен, кытын ке мугор вылтырлэн одӥг люкетэз мызонэныз вожвылске, со интыэз, гож нимаське. **Вылтырлэн границаэз гож луэ.** Гожлэн мертанэз одӥг гинэ — кузьдала. 1 суред вылысь кубез учком. Кублэн урдэсэз кык урдэс дур'ёсызлэн вожвылскон интызы луэ. Соос пӧлысь нимысьтыз урдэс дурез кублэн быдэс вылтырезлэн люкетэз луэ.

Гожез люкет'ёслы люкыны луэ но, солэн нимысьтыз люкетэз гож луэ.

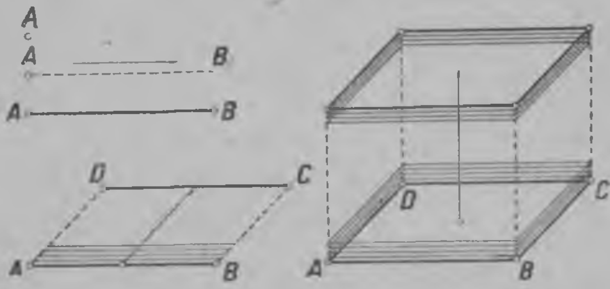
Гожлэн границаэз точка луэ. Точкалэн мертанэз уг луы. Со 2 яке кӧняке гож'ёслэн вожвылскон интызы луэ. Озьы 1 суред вылысь кублэн йылэз 3 гож’ёслэн вожвылскон интызы луэ. Вылтыр’ёсыз, гож’ёсыз но точкаосыз мугор’ёс вылысь гинэ эскерынылуэ, асьсэ коже соос уг луо, асьмеос геометриын вылтыр’ёс, гожёс, но точкаос сярись асьсэ коже макеос сярись кадь вераськиськом ке но, асьмеос соку соосыз мугор’ёслэсь люкемен, мугор’ёс бордысь басьтэмен кадь валаськом.

Мугор, вылтыр, гож но точка **геометрио пӧрмем** образ’ёс шуса нимасько.

§ 2. Движениэн геометрио образ‘ёсыз пӧрмытон.

Точкаэн пространствоысь нимысьтыз инты пусйиське. Со инты коть мугорлэн вылтыраз, яке солэн пушказ, коть мугорлэн вылтыраз ортчытэм гож вылын, яке мугорлэсь малпанэн басьтэм гож вылын мед луоз — одӥг кадь.

Точка, пространствоын интызэ воштыса (2 суред), аслэсьтыз положенизэ ялан вощ’я но соин сэрен кыӵе ке гож гожтэ кадь соин ик *гож — вырись точкалэн пытьыэз луэ* шуса верало. Пеймыт азьын чаг тылэз киэ кутыса ӝог воштылӥд ке, кылсярись бергатон дыр’я, чаг тыл нош пиштӥсь точка гинэ луэ ке но, со пространствоын вошкон дыр’я вань интыаськемезлэн пытьыэз кадь кыле, озьы кыӵе ке гож сярись валан сётэ.



2 сур.

Пространствоын гожлэн движени дыр’яз вылтыр пӧрме (2 суред) шуса озьы ик валаммы луэ, соку гож нырись аслаз интыаськем кудланез’я вошкымтэ дыр’яз вылтыр пӧрме. Ӝог бергась колёсалэн пиньёсыз одӥге кадь луыса, вылтыр кадь адско.

Вылтыр нырись аслаз интыаськем кудланез’я уг вошкы гинэ ке (2 суред), вылтырлэн движениэныз мугор пӧрме.

Котретлэн аслаз диаметр котыртӥз берганэз — шар сярись валан сётэ.

§ 3. Гож‘ёслэн но вылтыр‘ёслэн туссы.

1. Мугор’ёс вылын шонер но кырыж гож’ёс луо.

Озьы, кублэн кык урдэс дур’ёсызлэн вожвылскон интызы — солэн урдэсэз—шонер гож луэ; цилиндрлэн урдэс вылтырезлэн но солэн дӥнезлэн вожвылскон интыэз котыргож луэ—кырыж гож.

Шонер гож сярись тодытон сётыны уг луы. Шонер гож сярись валанэз основноен лыд’яно лыктэ, со валанэз адями пырак опытысь басьтэ.

Шонер гожлэн кудланезлэн нимысьтыз луон учыр’ёсыз горизонтальной но меӵ шонер гож’ёс луо. Пукись вулэн шып дыр’яз вылаз кыллись боды, ӵошкыт шонер гожлэсь кудланьзэ возьматэ; меӵ шонер гожлэн кудланез отвеслэн интыаськеменыз тодытӥське, мызон сямен, пумаз пичи гира думем сӥньыслэн кудланез. Меӵ шонер гож кудланез’я муз’емлэн шораз мынӥсь шонер гож луэ.

2. Мугор’ёслэн вылтыр’ёссы ӵошкесэсь но кырыжесь луо.

Шонер гож, вылтырлэн котькуд кык точкаосыз пыр ортчыса вань точкаосыныз со вылтырын кылле ке, сыче аслыко вылтырез ӵошкес вылтыр яке *ӵошкес шуса нимало.*

Ӝӧклэн умой волятэм вылпулэз ӵошкеслы пример луэ: котькудланья ик ӝӧклэн вылаз понэм линейка урдэс бордэ лач йӧтэ но линейкаэн но ӝӧк вылэн кусыпын пиштӥсь вис уг кылы.

Кублэн урдэс дур’ёсыз, цилиндрлэн но конуслэн дӥньёсыз ӵошкес’ёс луо. Шарлэн вылтырез, цилиндрлэн но конуслэн урдэс дурзы кырыж вылтыр’ёс луо; шарлэн вылтырез бордэ понэм линейкалэн урдэз, линейкалэн со шар’я котькыӵе интыаськем дыр’яз соин уг тупа; линейкалэсь урдзэ цилиндрлэн яке конуслэн вылтыр бордаз понӥд ке линейка со мугор’ёслэн вылтыренызы котьку ик уз тупа.

Ӵошкыт вылтырлы пичи посудаысь вулэн шып луон дыр’я пуксем вылтырез басьтӥське.

§ 4. Геометрилэн предметэз но геометрилэн люкиськемез.

1. Геометрио образ’ёс: точка, гож, вылтыр, мугор ас понназы нимазы но эскериськыны быгато, яке огенызы-огзы кыӵе ке огазеаськыса эскерисько. Сыӵе но мызон учыре геометрио образ’ёс озьы геометрио фигураос шуса нимасько. Нош фигураэ пырись нимысьтыз геометрио образ солэн элементэз шуса нимаське.

Куиньсэрго — геометрио фигура, солэн дур’ёсыз но сэрег’ёсыз — фигуралэн элемент’ёсыз; куб — геометрио мугор луэ, солэн урдэс дур’ёсыз,урдэс’ёсыз, сэрег’ёсыз — кублэн элемент’ёсыз.

2. Мар со геометри? Геометри, геометрио фигураослэсь — ӵошкес’ёсызлэсь но пространственнойёсызлэсь тодмет’ёссэ но аслык’ёссэ эскерись, дышетӥсь наука луэ.

Аслаз вочак элемент’ёсыныз одӥг ӵошкесэ гинэ интыам фигураос ӵошкес фигураос шуса нимасько; озьы, куиньсэрго, кык вожвылскись шонер гож’ёс, котыргож — ӵошкес фигураос.

Аслаз вочак люкет’ёсыныз одӥг ӵошкес вылэ интыаськыны быгатӥсьтэм фигураос — пространственной фигураос шуса нимасько. Пространственной фигураослы, яке мугор’ёслы пример’ёс кык вожвылскись ӵошкес’ёс луыны быгато: куб, призма, цилиндр, шар но мукет.

Геометри кык люкет’ёслы люкиське — ӵошкес фигураослэсь аслык’ёссэс дышетӥсь планиметрилы, пространственной фигураслэсь, яке мугор’ёслэсь аслыксэс дышетӥсь стереометрилы. Геометри, котькыӵе наука сямен ик, чакламысь но опытысь кылдэм но адямилэн хозяйственной кулэлык’ёсыныз герӟаськыса будэмын. Геометри кыл — грек кыл, берыктыса со муз’ем мертан (землемерие) луэ.

3. Геометри асьме эралэн кутсконэзлэсь олокӧня даур азьвыл кылдэмын. Чукпал культурной калык’ёслэн, вавилонян’ёслэн но египтян’ёслэн геометрио тодонлык’ёссы трос вылэм ини. Со геометрио тодонлык’ёс муз’ем участок’ёсыз мертан’ёс лэсьтыку пӧртэм юрт’ёс ӝутон’ёсын, инмысь пиштӥсьёслэсь (светила) движенизэс дышетскыны кулэ луэмен пӧрмемын. Азьланьзэ научной будонлыксэ геометри Грециын басьтӥз. Египтян’ёслэн дышетскисьёссы нырись ик грек математик’ёс, асьме эралэн кутсконэзлэсь 6 даур азьвыл ини, геометрио фигураослэн уно пӧртэм аслык’ёсынызы тодмо вылӥллям; опытысь басьтэм огшоры геометрио пӧрмем тус’ёс сярись тодэм’ёссыя, соос кушетогес мызон геометрио пӧрмем тус’ёслэсь аслык’ёссэ поттӥзы. Асьме эралэн кутскемезлэсь 3 даур азьвыл улэм Евклидлэн вапумаз, геометрио пӧрмем образ’ёс сярись трос тодон’ёс люкаськемын вал ини. Фигураослэн но мугор’ёслэн аслык’ёссы сярись маке гинэ солы тодмо вылэм, соэ одӥг системаэ люкаса „Кутскон’ёс“ нимо книгаэ гожтэм. Та ужез солэн али ке но туж бадӟым данлыко.

1. ШОНЕР ГОЖ.

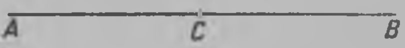
§ 1. Шонер гож. Си. Вандэт. Тӥаськем гож. Кырыж гож.

Шонер гож, вакчиак шонер гинэ шуо, вань гож’ёс пӧлысь огшорылыкоэз луэ. Шонер сярись тодон-валан — юн золтэм сӥньыс, шонертэм линейкалэн урдэз сёто: пичи пасетӥ пеймыт висэтэ пырись шундылэн тыл-сиосыз шонер гож кузя мыно.

Шонер гожез кык палэ пумтэм кузёмытэмен малпаны луэ.

Шонергож латинской алфавитлэн кык бадӟым букваосыныз пусйиське: 3 суред вылын *AB* шонер гож гожтэмын.

3 сур.



4 сур.

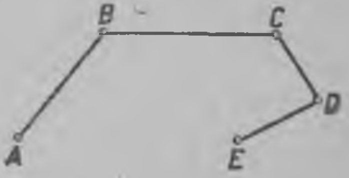
AB шонер гож вылысь кытысьтыз ке *C* точкаэз басьтӥм ке, соку со *C* точка *AB* шонер гожез кык сиослы люкоз: *CA* но *CB* (4 суред).

C точка силэн кутскон яке потӥсь точкаэз луэ но гож’ян дыр’я нырисетӥ интыэ пуктӥське. Си огпалэ гинэ пумтэм кыстӥськыны быгатэ. Озьы, *CA* си *C* точкалэн паллян палаз берыктэмын, *CB* сиэз бур палэ. Озьыэн:

Одӥг *C* точкаысь потӥсь но ваче пумит палэ кошкись *CA* но *CB* кык сиос, одӥг шонер гожез возьмато.

Шонер гож вылын кытыназ ке *A* но *B* кык точкаос басьтӥд ке, со точкаосын пум’ям шонер гожлэн люкетэз вандэт шуса нимаське. Шонер гожлэн вандэтэз кык бадӟымесь букваосын пусийське, соос вандэтлэн пум’ёсаз пуктӥсько: *AB* (5 суред) — шонер гожлэн вандэтэз луэ. Ӵем дыр’я вандэт одӥг пичи букваэн пусйиське, кылсярись *a* букваэн; сыӵе дыр’я *a* — кутэм масштаблэн единицао вандэтлэсь кузьдалазэ пус’ё.

5 сур.



6 сур.

Одӥг шонер гож вылэ интыаськымтэ шонер гожлэн вандэт’ёсызлэсь пӧрмем гож — тӥаськем гож шуса нимаське (6 суред). Тӥаськем гожез пӧрмытӥсь вандэт’ёс, солэн дур’ёсыз, яке ёз’ёсыз шуса нимаське. Тӥаськем гож бадӟым букваосын пусйиське. Со букваос дур’ёсызлэн пум’ёсаз пуктӥсько, кылсярись *ABCDE* — тӥаськем гож.

7 сур.

8 сур.

Шонерлэсь одӥгзэ но вандэтсэ возисьтэм гож кырыж гож шуса нимаське.

Шонерлэн вандэт’ёсызлэсь но кырыжлэн люкет’ёсызлэсь луись гож сураськем гож шуса нимаське (8 суред).

§ 2. Шонерлэн аксиомаосыз.

1. Шонерез мыд-мыд палэ ик пумтэм кузёмытыны луэ.

Со аслык сяна, шонерлэн мызон аслык’ёсыз но вань на:

Ӵошкес вылэ *A* но *B* кык точкаослэсь интыаськемзэс пус’ём (9 суред). Со *A* но *B* точкаос пыртӥ умой шонератэм линейкаэн шонергож ортчытом. Со кык *A* но *B* точкаос пыртӥ ик кыкетӥзэ шонер гожез ортчытыны турттӥд ке, со кыкетӥэз нырисетӥэз вылэ усёз: татыӵен, таӟьы йылпум’яськом:

2. Кык сётэм точкаос пыртӥ шонер гож ортчытыны луэ но одӥгзэ гинэ.

Со — шонерлэн кыкетӥ аслыкез; котькыӵе шонерлэн интыаськемез кык точкаосын тырмымон тодытӥськемзэ сӧ возьматэ; соин ик, одӥг шонерлэн кык точкаосыз мызон шонерлэн кык точкаосыз вылэ мед усёзы шуса, кык шонер’ёсыз огзэ мызонэз вылэ уськытӥд ке, соку шонер’ёс асьсэлэн вань точкаосынызы тупалозы. Кык шонер’ёс одӥг гинэ ог’я точка возё ке, соку соос вожвылско.

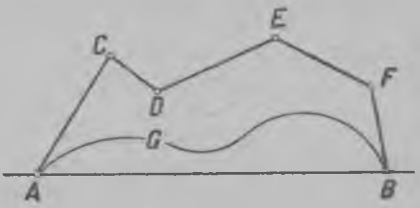
9 сур.

Кык *AB* но *CD* вожвылскись шонер’ёслэн ог’я точказы вожвылскон точка шуса нимаське.

Одӥг точка пыртӥ лыдтэм уно шонер'ёс ортчытыны луэ. Вань сыӵе шонер'ёслэн огазеамзы шонер'ёслы люкрак пӧрмытэ.

Люкраклэн вань шонер'ёсызлэн ог'я точказы люкраклэн шорез шуса нимаське.

Чошкес вылэ кык A но B точкаос басьтӥд ке, соос пыртӥ шонер, кырыж но тӥаськем гож'ёс ортчытӥд ке, A но B точкаос огдырен ик AB вандэтэз но ADB кырыжлэсь люкетсэ пум'яло. $ACDEFB$ тӥаськемлэн пум'ёсыз луо (10 сур). AB вандэт ADB кырыжлэсь люкетэзлэн но $ACDEFB$ тӥаськемлэн люкетэзлэсь вакчи шуса адске ини, отысен:



10 сур.

3. Шонерлэн вандэтэз — кык точкаос вискысь котькудӥзлэсь вакчи кусып луэ.

Шонерлэн та аслыкез'я кык точкаос вискысь кусып котьку ик, со точкаос пыртӥ ортчись шонер гож'я мертаське. Вандэтлэн кузьдалаэз со вандэтлэн пум точкаосыз вискысь кусыпез тодытэ.

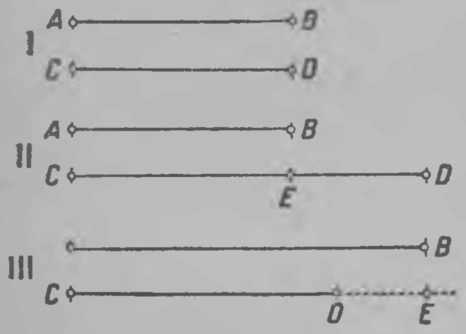
4. Шонер гож, геометрио фигура луэмен, пӧртэм аслык'ёс кутэ. Соослэн зэмлыксы адямилэн котырысь инкуазьын пӧрмись луон'ёсыз нуналысь-нуналэ чакламысьтыз но улонын кулэ ужнум'ёсыз быдэстыкуз люкам опытэныз пуктэмын.

Геометрио фигуралэн уж вылын кутэм основной аслык'ёсыз сярись визьнод, аксиома шуса нимаське; аксиомаос зэме поттытэк кутӥсько но геометри теоремаосыз зэме поттон понна основа луо. Шонер гож сярись улӥ верам визьнод'ёс аксиомаос:

1) шонер гожез мыд-мыд палэ пумтэм кузёмытыны луэ;

2) кык сётэм точкаос пыртӥ шонер гож ортчытыны луэ но одӥгзэ гинэ;

3) шонерлэн вандэтэз кык точкаос вискысь котькудӥзлэсь вакчи кусып луэ.



11 сур.

§ 3. Вандэт'ёсыз ӵошатон.

Шонер'ёсыз мыд-мыд палэ пумтэм кузёмытыны луэмен, шонер'ёслэсь кузьдалаэзэс ӵошатыны уг луы. Вандэт'ёсыз гинэ куспазы ӵошатыны луэ.

Кык вандэт'ёсыз чотатон — соос ӵошало-а, уг-а шуса тодон луэ. Уг ке ӵошало кудиз соос пушкысь бадзым — соэ тодоно. Вандэт'ёсыз ӵошатон одӥг вандэтэз мукетэз вылэ понысa быдэстӥське.

Задача. *AB но CD кык вандэт'ёсыз куспазы огеныз-огзэ ӵошатоно* (11 суред).

Лыд'янэз. AB вандэтэз CD вандэт вылэ A точка C точкаен мед тупалоз шуса но AB вандэт CD вандэт кузя мед мыноз шуса, уськытоно. Сыӵе дыр'я B точка D точкаэн — CD вандэтлэн пуменыз - тупаз ке, AB но CD вандэт'ёс ӵошало. Вандэт'ёслэн та ӵошанзы тазьы гожтӥське: $AB = CD$.

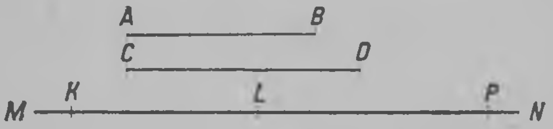
B точка CD вандэтлэн C но D точкаосыз куспын кыллись E точкаэ усиз ке, соку AB вандэт CD вандэтлэсь пичи. Гожтон: $AB < CD$.

B точка CD вандэтлэн кузёмытоназ куд ке E точкааз усиз ке, соку AB вандэт CD вандэтлэсь бадӟым. Гожтонэз: $AB > CD$.

§ 4. Вандэт'ёсын действиос.

1. Задача. *AB но CD вандэт'ёсыз огазеано*; вандэт'ёслэн бадӟымлыксы 12 суред вылын сётэмын.

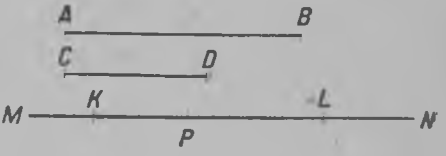
Лэсьтонэз. MN шонер гож ортчытом (13 суред). Со шонерлэн K точкаысеныз циркулен интыаськон вандэт $KL = AB$, собере нош L точкаысен — нырисетӥ точкалэн L пум точкаэз, кыкетӥ вандэтлэн кутсконэз мед луоз $LP = CD$. KP вандэт AB но CD вандэт'ёслэсь суммаэз сётэ. Гожтон: $AB + CD = KL + LP = KP$



12—13 сур.

2. Задача. *AB вандэтысь CD вандэтэз куштоно*; вандэт'ёслэн бадӟымлыксы 14 суред вылын сётэмын.

Лэсьтонэз. MN шонер вылэ KL вандэт $= AB$ пусйиськом но собере 2 точкаысен берлань LP вандэт $= CD$ пусйиськом; KP вандэт $= CD$; вандэт $AB - CD = KP$.



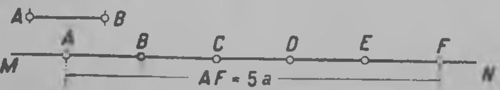
14 сур.

3. Задача. *AB вандэтэз 5 пол уноано, мукет сямен, со вандэтэз 5 пол огазеасен басьтоно.*

Лэсьтонэз. MN шонер вылэ сётэм AB вандэтэз огзэ борсе огзэ 5 пол пус'ёно. 5 AB вандэт $= AF$ (15 суред).

4. Задача. *a, b но c вандэт'ёс сётэмын. $x = 3a + 2b - 4c$ вандэт лэсьтоно,*

Огшоры басьтэм шонер вылэ нырись ик $3a$-лы ӵошась вандэт лэсьтӥськом, собере со вöзы $2b = b + b$ вандэт интыаськом. Бератаз нош ньыль пол C вандэтэз басьтӥськом, $3a + 2b > 4c$ яке $3a + 2b = 4c$ услови дыр'я гинэ задача луоно. Бератаз учыре $x = 0$.



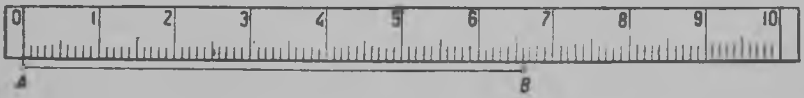
15 сур.

5. Вандэтэз вандэтлы люкон, озьы ик нош вандэтэз ӵошасесь но ӵошасьтэм люкет'ёслы люкон нимаз эскеремын луоз на.

§ 5. Вандэт'ёсыз мертан.

Вандэт'ёсыз мертан — кӧня пол отын одиго интыэ басьтэм мукет вандэт интыаське, — соэ тодон луэ. Вандэт'ёсыз мертан понна единицалы котькыӵе вандэт басьтӥськыны быгатэ. Озьы ке но вандэт котьку ик кутэм кузьдала мертэт'ёсын — метрен, сантиметрен, миллиметрен мертаське.

AB вандэтэз мертан понна, со вылэ быр'ем гожо единицаэз интыало. Быр'ём гожо единица *AB* вандэтын быдэс лыд пол интыаське ке, со лыд ик вандэтлэсь кӧня гожо единица интыамзэ возматэ. Быр'ем кузьдала единица *AB* вандэтэ быдэс лыд пол уг интыаськы ке но кыӵе ке мылемез потэ ке, со мылемез пичигес гожо мертэтэн мертано луэ; виль мылем потэм дыр'я мылемез уката пичигес гожо мертэтэн мертало, азьланьын но озьы ик.

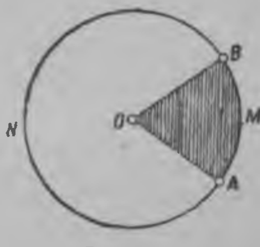


16 Сур.

Быр'ем гожо мертэт'ёс пушкысь, озьы ик сооыз быдэслы люкон дыр'я потэм люкет'ёсыз пӧлысь одӥгез но мертано вандэтын быдэс лыд пол интыаськымтэ дыр но луылоз, соку вандэтлэн кузьдалаэз матэктыса, луэмез'я бадӟым степенё шонерлыкен тодӥське. 16 суред вылысь *AB* вандэт 6,5 *см*-лэсь бадӟым но 7 *см*-лэсь пичи: матэктыса со 6,7 *см*-лы ӵоша. Гожтон: $AB \approx 6{,}7$ *см*.

§ 6. Котыргож но котрет.

1. Котыргож но котрет. *OA* вандэт огпал пумезлэн котыртӥз, кылсярись *O* точка котыртӥ ӵошкес вылын берган дыр'я, быдэс котырскем лэсьтыса вились аслэсьтыз нырись интыаськемзэ басьтэ ке, соку солэн мызон пумез, *A* точка, кырыж гож гожтоз. Со кырыж гож котыргож шуса нимаськоз. Котыргожен ӵошкеслэн люкетэз котрет шуса нимаське. *OA* вандэт *O* точка котыртӥ берган пӧрмытэм дыр'я *O* точка котыргожлэн но котретлэн шорез шуса нимаське: *OA* вандэт радиус шуса нимаське, *r* яке *R* букваосын пусйиське (17 сур.)



17 сур.

OB вандэтлэн пумысьтыз *A* точкаэз гинэ ӧвӧл, мызон'ёсызлэсь но точкаосыызлэсь котыргож гожтэмзэ синйылтоно; вандэтэз *O* точка котыртӥ бергатон дыр'я со вандэтлэн котькуд точкаэз котыргож гожтэ.

Котыргожлэн котькуд точкаэз солэн *O* шорезлэсь огкеме, радиуслы ӵошась кусыпын луэ. Гожтон $OA = OB = r$.

Котыргожлэн лэсьтэмысьтыз тазы потэ:

Котыргож ӵошкес вылын вистэм валчеам кырыж гож луэ.

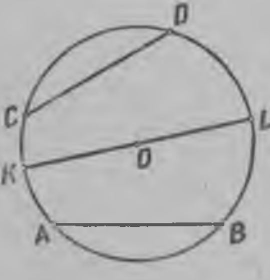
Солэн вань точкаосыз одӥг тонкаысеныз — шорысеныз — огкемын сыло.

Котыргожлэн радиусэз но шорезлэн интыаськемез сётэмын ке, котыргож быдэсак тодытиське.

Котыргож'ёс огзылэсь-огзы асьсэ радиуссылэн кузьдалаэныз пӧртэмско: котыргожлэн радиусэз макем бадӟым, сокем ачиз котыргож но бадӟым. Одӥг со радиусо ик кык котыргож'ёс огзы вылэ огзы уськытон дыр'я тупало но, соин ик ӵошало. Котыргож циркулен гожтӥське.

2. Буко. Ку ке OA вандэт O точка котыртӥ берытскемлэсь люкетсэ гинэ лэсьтӥз ке, соку солэн пумез, A точка, котыргожлэсь люкетсэ гожтоз: котыргожлэн люкетэз буко шуса нимаське, быдэс котретлэн люкетэз нош, кылсярись, AOB (соэ OA вандэт гожтэ) сектор шуса нимаське, AOB — сектор (17 сур.). „Буко“ кыл, гожтон дыр'я, $\smile$ пусэн воштӥське. $AB\smile$ гожтэмез AB буко шуса лыдӟоно. Котыргож вылэ солэсь кыӵе ке но кык точкаоссэ пусйыса, кылсярись A но C, асьмеос котыргожез кык люкет'ёслы люкиськом, ӵем дыр'я куспазы ӵошасьтэм люкет'ёслы. Нош, кык букоос пӧлысь кудӥз сярись кылпум мынэмез шаркак возьматон понна, соэ кык буква интыэ куинь букваэн пусйыло. Соос пӧлысь одӥгез точка, буколэсь пум'ёссэ возьматӥсь букваос виске пуктӥське но $AMB\smile$ шуса гожто (17 суред). Син азьын котыргожлэн кыӵеэз — бадӟымез-а, пичиэз-а AB букоэз луэмзэ возьматымтэ дыр'я, соку соэ кык букваэн гинэ $AB\smile$ гожто: букоос пӧлысь пичиэз со луэ.

Одӥг котыргожлэн ик яке кык огкадесь котыргож'ёслэн кык букооссы, огзы вылэ огзы уськытыса, соослэн пумысьтыз точкаоссы тупало ке соос ӵошало. AB букоэз CD буко вылэ (18 сур.) понон дыр'я A точка D точка вылэ усиз ке, B точка нош — C точкаэ, соку $AB\smile$ — CD.$\smile$



18 сур.

3. Хорда. Котыргожлэсь кык точкаоссэ огазеась CD вандэт — хорда шуса нимаське: хорда букоэз золтэ; котыргожлэн котькуд букоэзлы нимысьтыз хорда тупа,. Хорда котыргожез кык люкетлы люке (18 суред). Шорлэн пыртӥз ортчись хорда KL диаметр шуса нимаське. Котыргожын лыдтэм уно диаметр'ёс ортчытыны луэ. Котыргожлэн диаметр'ёсыз куспазы огзылы-огзы ӵошало но соос пӧлысь котькуд диаметр кык радиус'ёслы ӵоша. Диаметр котыргожез 2 ӝыны котыргож'ёслы люке, котретэз — 2 ӝыны котретлы.

Одӥг котыргожын ик яке огкадесь котыргож'есын огкадесь букоос огкадесь хордаосын золтӥсько. Зэмзэ ик, AB но CD букоос (18 сур.) огзы вылэ огзэ уськытон дыр'я тупало ке, соку соослэн пумысьтызы точкаоссы но тупало, соин ик нош, со точкаосыз огазеась AB но CD хордаос но огзы вылэ огзы усё. Букooслы тупась хордаос ӵошало ке, соку букоос но ӵошало шуса верам визьнод но озьы ик зэм луэ.

4. Букоо градус. Котыргожез 360 огкадесь букооslы люко: котькуд сыӵе буко — букоо градус шуса нимаське но пичи котырес пусэн пусйиське. Со котырес пус буколэсь градус лыдзэ возьматӥсь лыдлэн бурпалаз пуктӥське, кылсярись 360° яке 180° яке 90°. Котыргожын 360°, жыны котыргожын 180°, черык котыргожын 90°.

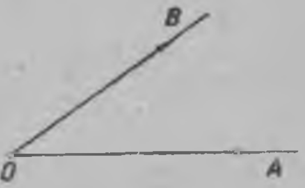
Котькуд букоо градусэз 60 огкадесь люкет’ёслы люко но, соос котькудӥз букоо минута шуса нимасько; „минута“ кылэз пус’ён понна, пусэз куто. 30′ гожтэм — 30 минут шуса лыдӟиське.

Котькуд букоо минута 60 огкадесь люкет’ёслы люкиське, минуталэн нимысьтыз сыӵе люкетэз букоо секунда шуса нимаське. Секундаэз пус’ён понна″ пусэз куто. 45″ гожтэм: 45 секунда шуса лыдӟиське 90° 30′ 20″ гожтэм: 90 градус 30 минут 20 секунда шуса лыдӟиське.

II. СЭРЕГ‘ЁС.

§ 1. Сэрег но соэ пус‘ён.

Одӥг О точкаысь потӥсь, ОА но ОВ кык сиос, огзылэсь-огзы асьсэ кудланенызы пӧртэмско но сэрег шуон фигура пӧрмыто (19 сур.).

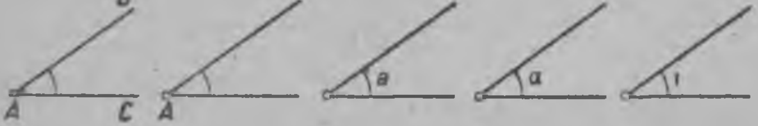


19 сур.

О точка — сэреглэн йылэз шуса нимаське. *ОА* но *ОВ* сиос — солэн дур’ёсыз.

Сэрег куинь бадӟымесь букваосын пусйиське, соос пӧлысь одӥг букваэз сэреглэн йылаз пуктӥське, кык мызон’ёсыз — солэн дур’ёсаз. „Сэрег“ кыл гожтон дыр’я ∠ пусэн воштӥське; сэреглэн йылысьтыз букваэз кык мызон букваос куспын гожтӥське новераське.

ОА но *ОВ* сиосын пӧрмытэм сэрег кык сямен гожтэмын луоно: яке *AOB*∠ яке *BOA*∠. Со йылын ик мызон сэрег’ёс ӧвӧл ке



20 сур.

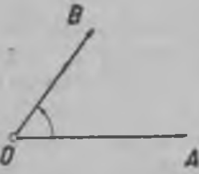
ӵем дыр’я сэреглэн йылаз пуктэм одӥг букваэн гинэ сэрегез пусйыло. Латинской яке греческой алфавитлэн одӥг пичи букваэныз яке нош лыдпусэн гинэ сэрегез пус’ёс; сыӵе пус’ён дыр’я букваэз яке лыдпусэз сэреглэн пушказ пукто (20 сур.).

2. Аслаз *O* кутскон котыртӥз бергась *ОА* сиэз эскером (21 сур.). Бергакуз *ОА* си аслэсьтыз интыаськемзэ пумтэм вош‘я ны-

рись кутскон интысьтыз куд ке OB интыэ ортче но соэн артэ $OAB\angle$ гожтэ.

Сэрег — силэн аслаз кутскон точка котыртӥз берытскемезлэн мертэтэз луэ.

3. Кык вожвылскись AB но CD шонер'ёс огзы бордэ огзы нялмытомытэмын но ньыль сэрег'ёс пӧрмыто. Котькуд сэреглэн бадӟымлыкез — одӥг шонерлэн мызонэз бордэ кӧнялы нялмытомемез бордысь потэ.



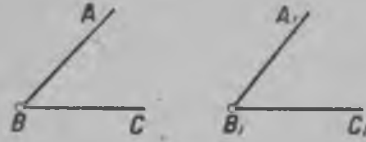
21 сур.

Сэрег одӥг шонерлэсь мызонэз бордэ макем нялмытомемзэ тодытэ шуса, вераны кутэмын.

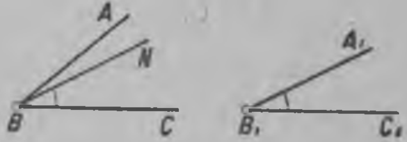
Сэреглэн бадӟымлыкез солэн дур'ёсызлэн кузьдалаэз бордысь уг поты.

§ 2. Сэрег‘ёсыз ӵошатон. Сэрег‘ёслэн ӵошамзы но ӵошамтэзы.

1. Кык сэрег'ёс сётэмын: $ABC\angle$ но $A_1B_1C_1\angle$ (22 сур.). Соосыз куспазы ӵошатон понна, огзылы огзы ӵошало-а, уг-а шуса но соос пӧлысь кудӥз бадӟымзэ тодон понна, огзы вылэ огзэ уськытон амалэз кутӥськом.

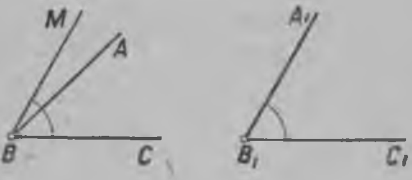


22 сур.



23 сур.

Огзы вылэ огзэ $A_1B_1C_1\angle$-ез $ABC\angle$вылэ, B_1 йыл B йылэн мед тупалоз но B_1C_1 дур мызон сэреглэн BC кузяз мед мыноз шуса уськытом (малпаса) сыӵе дыр'я A_1B_1 дур BA дур кузя мынӥз ке, соку $A_1B_1C_1\angle$ $ABC\angle$ вылэ усёз. Соин ик, сэрег'ёс ӵошало. Гожтон: $A_1B_1C_1\angle = ABC_1\angle$



24 сур.

2. B_1. но B йыл'ёсыз но B_1C_1 но BC дур‘ёсыз огзы вылэ огзы уськытэм бере B_1A_1 дур сэреглэн пушкытӥз мыныса, BN-лэсь интыаськемзэ басьтӥз ке (23 сур), соку $A_1B_1C\angle$ $ABC\angle$-лы уг ӵоша, со солэсь пичи.

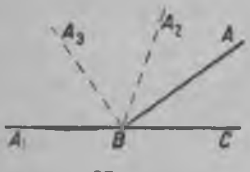
Гожтон: $A_1B_1C_1\angle < ABC\angle$

Бератаз, $A_1B_1C_1\angle$-ез $ABC\angle$ вылэ уськытон дыр'я B_1A_1 дур $ABC\angle$-лэн палэнтӥз ортчыса, BM-лэсь интыаськемзэ басьтӥз ке (24 сур.), соку $A_1B_1C_1\angle$ $ABC\angle$-лэсь бадӟым. Гожтон: $A_1B\,_1C_1\angle >$ $ABC\angle$-лэсь.

§ 3. Пазьгес но шонер сэрег.

1. $ABC\angle$-лэн бадӟымлыкез (25 сур.) солэн дур'ёсызлэн макем нялмытомемезлэсь потэ. Сэреглэсь огпал дурзэ, кылсярись BA-ез,

солэсь мызон BC палдурзэ вырӟытытэк кельтыса, B йыл котыртӥ бергатӥд ке, соку BA дур радысьтыз пӧртэм интыаськем'ёс басьтоз: BA_2, BA_3 но азьлань. BA дур BA_1-лэсь интыаськемзэ но басьтыны быгатоз, соку со BC дурлэн кузёмытэмез (продолжение) луоз, дур'ёсызлэн сыӵе интыаськем дыр'язы $A_1BC \angle$ **пазьгес сэрег** шуса нимаське.



25 сур.

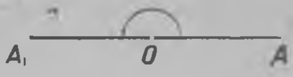
Озьыэн, пазьгес сэрег сыче сэрег луэ, кудизлэн дур'ёсыз одиг шонер гож лэсько но солэн йылысеныз мыд-мыд палэ кошко.

Вань пазьгес сэрег'ёс куспазы ӵошало.

Та визьнодлэн зэмлыкез одӥг пазьгес сэрегез мызон сэрег вылэ уськытыса эскериське. Пазьгес сэрегез OA силэн нырись кутскон но берпум кудланьёсыз куспын кылемез кадь учкыны луэ, со OA си нырись аслаз кутскон O точка котыретӥз жыны котыр лэсьтӥз

2. *Пазьгес сэреглэн жыныэз шонер сэрег шуса нимаське.*

Шонер сэрег пичи латинской d букваэн пусйиське (французской „*droit*" кыллэн нырисетӥ букваэз, со „шонер" шуэм луэ).

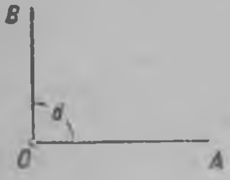


26 сур.

Шонер сэрег'ёс ваньмыз куспазы ӵошало.

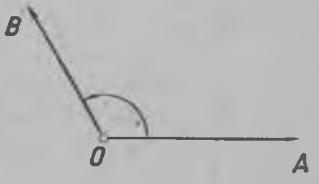
Шонер сэрег — **черык котырлы берытскем** OA силэн кутскон но берпум кудланьёсыз куспын кылемез луэ (27 сур.): $AOB \angle = d$.

3. OA си нырись аслаз кутскон O точка котыртӥз **быдэс** котыр лэсьтыса аслэсьтыз нырись кутскем интыаськемзэ батьтӥз ке, соку OA си **быдэс сэрег** гожтӥз шуса верало (28 сур.).



27 сур.

28 сур.



29 сур.

Шонер сэрег пазьгес сэреглэн жыныэзлы ӵоша, соин ик пазьгес сэрег кык шонер сэрег'ёслы ӵоша.

Гожтон: $AOA_1 \angle = 2d$ (26 сур).

Быдэс сэрег кык пазьгес сэрег'ёслы яке ньыль шонер сэрег, ёслы ӵоша; быдэс сэрег 4d-лы ӵоша.

4. Аслаз кутскем точка котыртӥз черык котырлэсь **кулэс** берыктэм сиэн пӧрмытэм сэрег (21 сур.) шонер сэреглэсь пичи луэ но **йылсо сэрег** шуса нимаське, шонер сэреглэсь бадӟым но пазьгес сэреглэсь пичи сэрег **мырк сэрег** шуса нимаське (29 сур).

5. *Сэреглэн мертэт единицаэзлы шонер сэрег басьтиське.*

Сэрег'ёслэсь бадӟымлыксэс шонер сэреглэн люкет'ёсынызы пус'ё. Кылсярись:

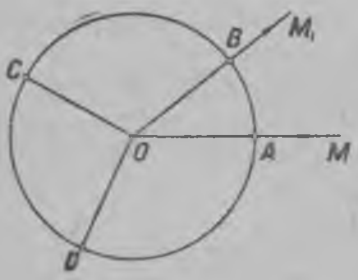
1) 0,3 d, $\frac{1}{2}d$, $\frac{2}{3}d$ — йылсо сэрег'ёс—та сэрег'ёс пӧлысь котькудӥз ик шонер сэреглэсь пичи луэ;

2) $1{,}5\,d$, $\frac{5}{4}\,d$, $\frac{11}{8}d$—та сэрег'ёс пӧлысь котькудӥз шонер сэреглэсь бадӟым но пазьгеслэсь пичи, соос мырк сэрег'ёс луо;

3) $2{,}3\,d$, $\frac{11}{4}\cdot d$, $\frac{23}{8}\,d$ но мук.— пазьгес сэреглэсь бадӟым сэрег'ёс.

§ 4. Шоретӥ сэрег но солэн аслык'ёсыз.

1. OM си, аслаз кутскон O точка котыртӥз бергаса, $MOM_1\angle$ гожтэ (30 сур.), OM си вылысь басьтэм куд ке A точка нош соин ӵош движени лэсьтыса котыргожлэсь AB букозэ гожтоз, солэн (котыргожлэн) радиусэз OA-лы ӵоша. $AOB\angle$-ез эскером; солэн O йылэз котыргожлэн шораз кылле, солэн дур'ёсыз OA но OB радиус'ёс луо, солэн дур'ёсыз кусыпе котыргожлэн AB букоэз пыртэмын.



30 сур.

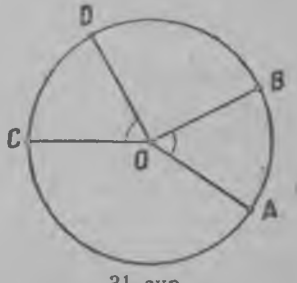
Сэреглэн йылэз котыргожлэн шораз ке луэ, сыче сэрегез шоретӥ сэрег шуса нимаське. Котькуд шоретӥ сэреглы нимысьтыз буко тупа. Буколэсь пум'ёссэ радиус вамен шореныз огазеам бере, котькуд буколы нимысьтыз шоретӥ сэрег тупамзэ валаны шуг ӧвӧл.

2. Шоретӥ сэрег'ёс но соослы тупась букоос таӵеось аслык'ёс куто. Одӥг котыргожын ик яке огкадесь котыргж'ёсын:

1) Ӵошасесь шоретӥ сэрег'ёслы огкадесь букоос тупало:

2) Ӵошасесь букоослы огкадесь шоретӥ сэрег'ёс тупало.

O точка шоро котретмы (31 сур.) но кык огкадесь шоретӥ сэрег'ёсмы $AOB\angle$ но $COD\angle$ вань. AOB секторез, OA радиус OD радиус вылэ мед усёз шуса. O шор котыртӥ берыктом; соку, AOB но COD сэрег'ёслэн ӵошанзыя OB радиус OC радиус вылэ усёз, AOB но COD сектор'ёслэн A но D, B но C букоосызлэн пум'ёсысьтыз точкаосыз но огзы вылэ огзы усёзы: букоослэн пум точкаоссы огзы вылэ огзы усизы ке, соин ик, соку AB но CD букоос огзы вылэ огзы усёзы.



31 сур.

Гожтон: $AOB\angle = COD\angle$ -лы ке, соку $AB\smile = CD\smile$-лы. Огкадесь сэрегёс, но соослы тупасесь сэрег'ёс сярись аслык тазьы гожтӥськоз:

$AB\smile = CD\smile$-лы ке, соку $AOB\angle = COD\angle$-лы.

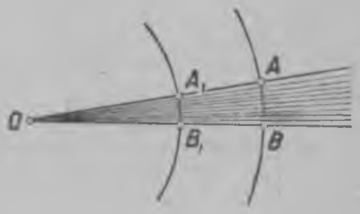
Та визьнодлэн зэмлыкез озьы ик огзы вылэ огзэ уськытон амалэн эскериське. Огкадесь радиусо кык пӧртэм котыргож'ёслэн огкадесь шоретӥ сэрег'ёслы тупась букоослы но та йылпум'яммы зэм луэ.

3. Котыргожез 360 огкадесь люкет'ёслы люкыса но вань люкон точкаоссэ шореныз огазеаса 360 шоретӥ сэрег'ёс лэсьтом, котькуд шоретӥ сэреглы котыргожлэн $\frac{1}{360}$ люкетэзлы ӵошась яке одӥг букоо градуслы ӵошась буко тупамен, соос куспазы ӵошало.

Одиг градус'ем буколы тупась шоретӥ сэрег — сэрего градус шуса нимаське. Сэрего градус 60 сэрег минутаослы люкиське но котькуд сэрего минута 60 сэрего секундаослы люкиське. Сэрего градусэз но солэсь люкет'ёссэ — минутаосыз но секундаосыз — вакчиак пусйыны буко градус'ёсыз но солэсь люкет'ёссэ пус'ён понна кутэм пус'ёс ик кутӥсько.

32 суред вылын $AOB\angle$ возьматэмын, со 10 сэрего градуслы люкемын но AOB сереглэн йылаз шорез O точкаын пӧртэм радиусо котыргож'ёслэн кык букоэныз вожвылтэмын. Букоо градус'ёс огкадесь ӧвӧл но радиус'ёслэн кузьдалаэнызы герӟаськемын шуса, суред вылысь адӟиське.

Озьыэн, котыргожлэн букоэз, кылсярись $AB\smile$ но $A_1B_1\smile$ (32 сур.) 10° (букоо) луэ, нош соослы тупась шоретӥ сэрегын 10° (серего) луэ.



32 сур.

Шоретӥ сэреглы тупась буколэн букоо градус'ёсызлэн лыдэз огдырен ик сэреглэсь сэрего градус лыдзэ но возьматэ.

Йылэныз O шораз луись быдэс сэрег 360 шоретӥ сэрег'ёслы, 360°-лы люкиське. Пазьгес сэреглы ӵошась шоретӥ сэрегын 180°. Пазьгес сэреглэн ӝыныэзлы ӵошась шоретӥ сэрегын 90°.

Озьыэн, пазьгес сэреглэн ӝыныэз 90°-лы ӵоша, нош пазьгес сэреглэн ӝыныэз шонер сэрег луэ, соин ик шонер сэрегын 90°.

Сэрего градус шонер сэреглэн $\frac{1}{90}$ *люкетэз луэ.*

4. Шонер сэреглэн люкет'ёсыныз сётэм сэреглэн градусо мертэтэзлы берыктэм таблица:

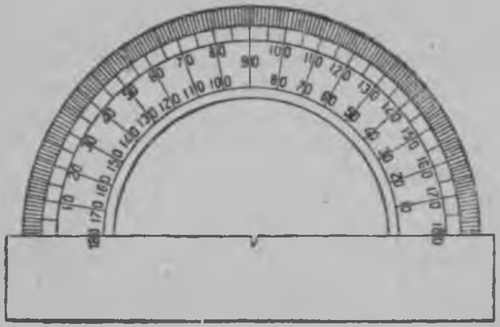
Шонер сэреглэн люкет'ёсыныз возьматэм сэрег	$\frac{1}{3}d$	$\frac{1}{2}d$	$\frac{2}{3}d$	$\frac{3}{4}d$	$\frac{4}{5}d$	d	$1\frac{1}{3}d$	$1{,}5\,d$	$1\frac{2}{3}d$	$2\,d$	$3\,d$	$4\,d$
Градус мертэтэн сэрег	30°	45°	60°	67°30′	72°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°

§ 5. Транспортир.

1. Сэрегез мертан понна нимысьтыз прибор — транспортир бастӥське. Со букоэз 180 букоо градус'ёслы люкем ӝыны котрет луэ: талэн шорез пичи ӵупетэн пусйиське (33 сур.).

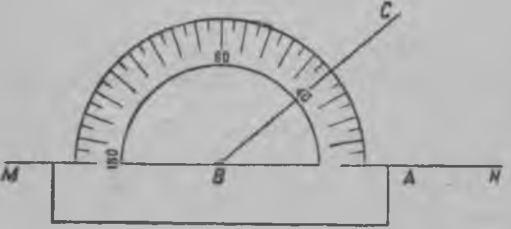
Сётэм сэрегез мертан понна, со вылэ транспортирлэн шорез сэреглэн йылэныз, нош диаметрез — сэреглэн куд ке но дуреныз мед тупалоз шуса со вылэ поно, но сэреглэн мызон дурез транспортирлэн кыӵе люкет пыртӥз ортчемзэ учко; соку транспортирлэн люкем’ёсаз пуктэм лыд, мертано сэрегысь градус лыдэз возьматэ.

Котькуд шоретӥ сэреглы соэн огмында лыдо быдэс градус’ёс но градус’ёслэсь люкет’ёссэ возись буко тупамез тодыса транспортирен ужан пуктэмын.



33 сур.

2. Транспортирез сэрег лэсьтон понна уже куто. Со понна MN шонер гож ортчыто (34 сур.), транспортирлэн диаметрез со шонер вылэ мед усёз шуса со вылэ транспортир поно но транспортирлэн шореныз тупасьточкаысь сэреглэсь йылзэ пус’ё; собере шор пыртӥз но солы тупась транспортирлэн люкет точка пыртӥз шонергож ортчытыса, кулэ сэрег шедьто.



34 сур.

3. Котыргожлэн кузьдалаэз радиуслэн кузьдалаэз бордысь потэ но, макем радиус бадӟым, сокем ик гожтоно котыргож но бадӟым; одӥг букоо градуслэн, мукет сямен вераса котыргожлэн $\frac{1}{360}$ люкетэз лэн кузьдалаэз радиусэн герӟаськемын но радиус вошкемен ӵош вошке. Сэрего градус лэсьтон дыр’я сыӵе югдур аслыз инты уг шедьты. Сэрего градус радиуслэн кузьдалаэз бордысь уг поты; сэрего градус воштӥськисьтэм бадӟымлык но шонер сэреглэн $\frac{1}{90}$ люкетэзлы ӵоша.

§ 6. Сэрег‘ёсын действиос. Вӧзысь сэрег‘ёс.

1. Сэрег’ёслэн градусо мертэтсы тодмо ке, сэрег’ёсыз огазеанэз но кулэстонэз лыд’янэн но лэсьтонэн быдэстыны луоз.

1 задача. *Сэрег’ёслэсь суммаэс но разностьсэс шедьтоно:*

$$ABC\angle = 47°40' \text{ но } DEF\angle = 30°23'45''.$$

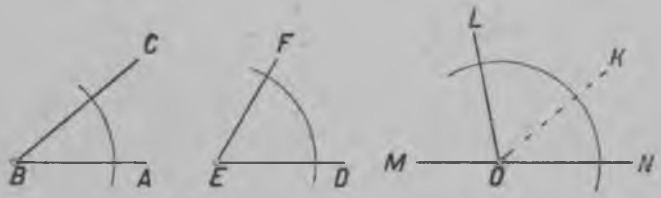
Лыд’янэз: 1) $\begin{array}{r} +\,47°40' \\ 30°23'45'' \\ \hline 78°\ 3'45'' \end{array}$ $\qquad \begin{array}{r} -\,47°40' \\ 30°23'45'' \\ \hline 17°16'15'' \end{array}$

Ответэз: 1) $ABC\angle + DEF\angle = 78°3'45''$
2) $ABC\angle - DEF\angle = 17°16'15''$

2 задача. *Транспортирен лэсьтон амалэн ABC но DEF сэрег'ёслэсь суммазэс шедьтоно*; сэрег'ёслэн бадӟымлыксы 35 суред вылын сётэмын.

Лэсьтонэз. MN шонер гож ортчытӥськом но шонерлэн куд ке O точкааз транспортирен $NOK\angle = ABC\angle$ лэсьтӥськом, собере нош, O точкаэз йылэзлы кутыса но OK-эз кыкетӥ сэреглэн огпал дурезлы кутыса, лэсьтӥськом $LOK\angle = DEF\angle$, соку $LON\angle$ — кык сётэм сэрег'ёслэн утчано суммазы:

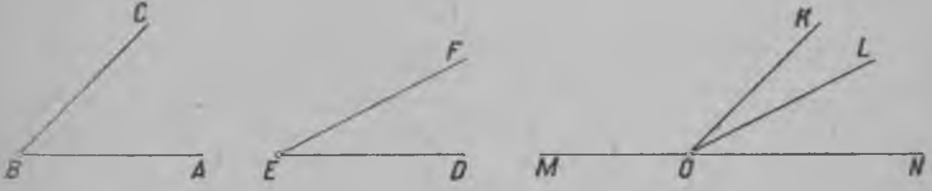
$$ABC\angle + DEF\angle = NOK\angle + KOL\angle = LON\angle.$$



35 сур.

3 задача. *Транспортирен лэсьтон амалэн ABC но DEF сэрег'ёслэсь разностьсэс шедьтоно*: сэрег'ёслэн бадӟымлыксы 36 суред вылын сётэмын.

Лэсьтонэз. MN шонер ортчытӥськом но солэн куд ке O точкааз $NOK\angle = ABC\angle$ лэсьтӥськом (36 сур.), собере нош со O точкаын но MN шонерын ик $NOL\angle = DEF\angle$ лэсьтӥськом, соку $LOK\angle$ — утчано разность: $ABC\angle - DEF\angle = LOK\angle$.



36 сур.

4 задача. *$ABC\angle$-ез 3 лыд пол уноано.*

Лыд'янэз. Сётэм ABC сэреглы ӵошась куинь сэрег'ёсыз радысьтыз огазеанлы задачалэн лыд'янэз вуттӥське.

2. *Ог'я йыл но одиг ог'я дур возись но огзэс огзы шобыртисьтэм кык сэрэг'ёс — вӧзысь сэрег'ёс шуса нимасько.*

36 суред вылын $NOL\angle$ но $KOL\angle$ — вӧзысь сэрег'ёс.

$NOK\angle$ но $NOL\angle$ вӧзысь сэрег'ёс уг луо.

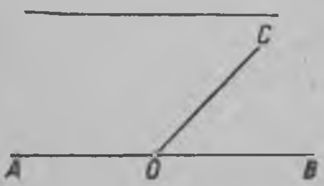
3. Сэрег пушкытӥ солэн йыл пыртӥз ортчись шонер гож ортчытӥд ке, соку сэрегез со кык вӧзысь сэрег'ёслы люкоз, соос огзылы огзы ӵошась яке ӵошасьтэм луыны быгато.

Сэрегез шори люкись шонер гож — сэреглэн огкадь люкисез яке сэреглэн биссектрисаэз шуса нимаське.

Сэрегез ӵошась яке ӵошасьтэм люкет'ёслэн люкон нимаз эскеремын луоз.

§ 7. Артэ сэрег'ёс но сооспэн аслык'ёссы. Теорема сярись валан.

1. *AOC но BOC — кык вӧзысь сэрег'ёс* (37 сур.), *OC огпалд урзы ог'я нош мызон'ёсыз OA но OB кык дур'ёсыз мыд-мыдлань кошкыса одиг шонер пӧрмыто, сыче сэре'ёс артээсь шуса нимасько.*

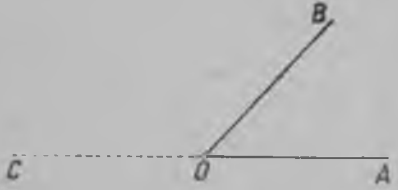


37 сур.

38 сур.

AB но CD кык вожвылскись шонер'ёсыз басьтом (38 сур.); сооспэн вожвылскон O точкаазы соос ог'я йылэн ньыльсэрго пӧрмыто. Вӧзысь сэрег'ёслэн нимысьтыз кузээ: $AOC\angle$ но $COB\angle$, COB но $BOD\angle$ но озьы азьлань — артэ сэрег'ёс.

Артэ сэрег'ёс таӵе лэсьтонэн поттэмын луыны быгато: $AOB\angle$ сётэмын (39 сур.); солэсь огпал дурзэ, кылсярись OA-ээ O йыллэн сьӧрозяэ кузёмытыса, сётэм сэреглы артэ луись виль $BOC\angle$ поттом. $BOC\angle$ но $AOB\angle$ ог'я O йылыз, одӥг ог'я OB дурзы но солэн OC дурез нырисетӥ $AOB\angle$-лэн OA дурезлэн кузёмытэмез луэ. $AOB\angle$ но BOC артэ сэрег'ёс.



39 сур.

2. Кык артэ сэрег'ёс куспын герӟаськемзы вань-а? Кык артэ AOC но BOC сэрег'ёслэсь суммазэс шедьтом:

$AOB\angle + BOC\angle = AOC\angle$ — пазьгес сэреглы, со нош $2d$-лы ӵоша, мукет сямен, кык шонер сэрег'ёслэсь луэ. Озьы бере,

Кык артэ сэрег'ёслэн суммазы $2d$-лы ӵоша.

Та кыл'ёсын артэ сэрег'ёслэн аслыксы сярись пум'яськись визьнод верамын.

3. Артэ сэрег'ёслэн аслыксы сярись йылпум'ян доре, асьмелы тодмо геометрио факт'ёс вылэ пыкиськись пӧртэм вераськем'ёс бере асьмеос вуим.

Геометрио фигуралэн аслык'ёсыз сярись вакчиак верам визьнод теорема шуса нимаське. Солэн зэмлыкез тодмо геометрио факт'ёс вылэ пыкиськыса кыӵе ке уж-югдурын — зэме поттэм бере осконо луэ.

„Кык артэ сэрег'ёслэн суммазы $2d$-лы ӵоша“ шуса, вакчиак верам визь нод теорема луэ.

„Шоретӥ сэрег'ёс ӵошало ке, соослы тупась букоос но ӵошало“ шуса асьмелы тодмо верам но озьы ик теорема луэ.

Лыд'ёслэн аслык'ёссы сярись малпам'ёсыз веран дыр'я теоремаосын арифметикаын но пумитаськылӥм ини. „Лыд кузо лыдпусэн дугдэ ке, со мылемтэк 2-лы люкиське“ шуса верам — теорема луэ.

4. Теоремаын тани маэ пӧртэмало:

1. **Условиэз** яке **маке сётэмез.** Озьы, „кык артэ сэрег'ёслэн суммазы $2d$-лы ӵоша“ теоремаын AOB но BOC кык сэрег'ёс сётэмын: соос артээсь шуса соос сярись тодмо.

Условилэн вакчиак гожтонэз:

Сётэмын; $AOB\angle$ но $BOC\angle$ — артэ сэрег'ёс.

2. **Йылпум'янэз** яке **зэме поттыны кулэ макеэз.** Озьы „кык артэ сэрег'ёслэн суммазы $2d$-лы ӵоша“ теоремаын зэме поттыны кулэ: кык артэ сэрег'ёслэн суммазы $2d$-лы ӵоша шуса.

Вакчиак гожтон:

Зэме поттыны кулэ: $AOB\angle + BOC\angle = 2d$

Теоремалэн условиэз но солэн йылпум'янэз огез вылаз, мызонэз улӥаз, улӥ возьматэм сямен, гожтӥське но соэн ӵош ик условиэз йылпум'янлэсь гожен люкиське.

Сётэмыы: $AOB\angle$ но $BOC\angle$ — артэ сэрег'ёс.

Зэме поттыны кулэ: $AOB\angle + BOC\angle = 2d$

5. *Аксиомаосысь но теоремаосысь потись визьнод'ёс — следствиос шуисько.*

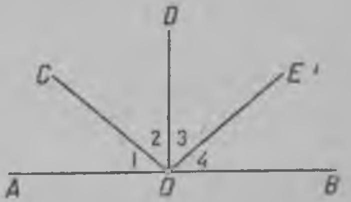
„Кык артэ сэрег'ёслэн суммазы $2d$-лы ӵоша“ теоремаысь следствиоссэ эскером.

Следствиос. 1. **а) Сётэм сэрег йылсо ке, солэн артэ сэрегез мырк, озьы ик берлань но.**

б) Сётэм сэрег шонер ке, соку солэн артэ сэрегез но озьы ик шонер.

Соин ик,

в) шонер сэрег — кык ӵошасесь артэ сэрег'ёс пӧлысь одӥгез луэ.



40 сур.

2. Нырисетӥэзлэн но берлосезлэн дур'ёсыз огзылы-огзы ваче пумитэсь луыса кӧня ке вӧзысь сэрег'ёс интыамын ке, мызон сямен, одӥг шонер гож пӧрмыто ке, соку сыӵе сэрег'ёслэн суммазы $2d$-лы ӵоша (40 сур.)

Зэмзэ ик, 40 суред вылын вань вӧзысь сэрег'ёс пазьгес сэрег пӧрмыто, соин ик соослэн суммазы $2d$-лы ӵоша.

3. Нырисетӥэзлэн но берлосезлэн дур'ёсыныз огзы вылэ огзы усьыса кӧня ке вӧзысь сэрег'ёс интыамын ке, соку сыӵе сэрег'ёслэн суммазы $4d$-лы ӵоша (41 сур.).

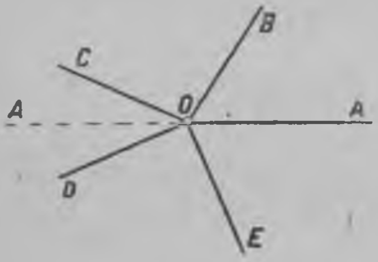
Куд ке сэреглэсь огпал дурзэ, кылсярись OA дурзэ, O точка сьӧре кузёмытыса AA_1 поттом, со $COD\angle$-эз 2 сэреглы люкоз.

$$\text{Вань:} \quad \begin{array}{l} AOE\angle + EOD\angle + DOA_1\angle = 2d \\ \underline{AOB\angle + BOC\ \angle + COA_1\angle = 2d} \\ \text{Вань сэрег'ёслэн суммазы} = 4d \end{array}$$

6. а) *Суммазы 180°-лы яке 2d-лы чошась кык сэрег'ёс — тыртытчсь сэрег'ёс шуса нимасько,* тырмытӥсь сэрег'ёслы пример артэ сэрег'ёс луо.

Талы пумит луись, „тырмытӥсь сэрег'ёс — артэ сэрег'ёс“ шуса верам визьнод котьку ик зэм уг луы, соэ тӥни тодэ ваёно лыктэ; тырмытӥсь сэрег'ёс ог дырын ик вӧзысь сэрег'ёс но луо ке, соку гинэ со зэм луэ.

Кык вӧзысь сэрег'ёслэн суммазы 2d-лы ӵоша ке, соку со сэрег'ёс артээсь, мукет сямен, дурлось дур'ёссы одӥг шонер сэрег пӧрмыто.

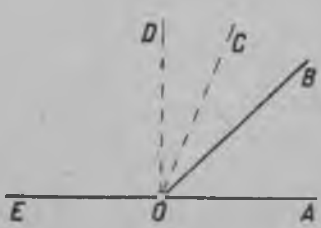


41 сур.

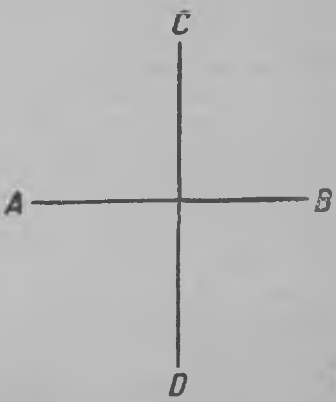
б) *Суммазы 90°, яке d-лы чошась кык сэрег'ёс—ватсась сэрег'ёс шуса нимасько.*

§ 8. Перпендикуляр. Нялмыт гож.

1. Кык артэ сэрег'ёс пӧлысь (42 сур.) $AOB\angle < BOE\angle$-лэсь. СооСлэсь ог'я OB дурзэс O йыл котыртӥ бергатӥд ке, соку со OD-лэсь интыаськемзэ басьтоз но кыкез ик артэ сэрег'ёс ӵошасесь луозы, соин ик нош соос пӧлысь котькудӥз сэрег шонер луоз. Сыӵе интыаськон дыр'я OD шонер гож AE шонер гож перпендикуляр шуса нимаське, O точка нош — перпендикулярлэн дӥнез. Озьыэн,



42 сур.



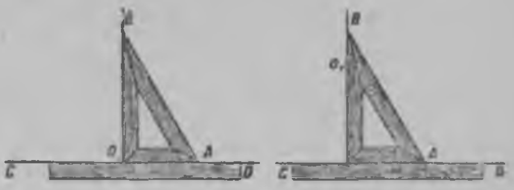
43 сур.

Сётэм шонер гожен шонер сэрег'ёс пӧрмытӥсь шонер гож — шонер бордэ перпендикуляр шуса нимаське.

Шонер сэрег улсын вожвылскись AB но CD кык шонер'ёс (43 сур.) ваче перпендикуляро шонер'ёс шуса нимасько.

Кык шонер'ёслэн перпендикулярностьсы $\perp$ пусэн пусйиське. $AB \perp CD$ гожтэм AB перпендикулярной CD-лы шуса лыдӟиське.

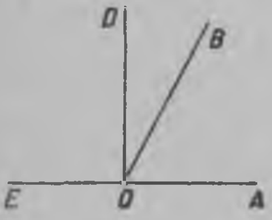
2. Перпендикуляр лэсьтон понна чертежной куиньсэрго но линейка кутo. Со куиньсэреголэн одйг сэрегез шонер. Перпендикуляр ортчытон амал 44 суред вылысь туж тодмо: $BO_1 \perp CD$ яке $BO \perp CD$.



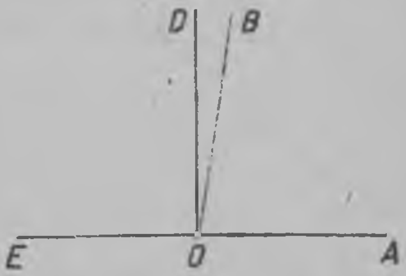
44 сур.

3. AE шонерлы перпендикулярной OD ($OD \perp AE$) шонерлэсь пӧртэмаса, котькыӵе мызон шонер, кылсярись OB (45 сур.), AE шонер гожен шонер сэрег уг пӧрмыты ке, мырк яке йылсо сэрег пӧрмытэ ке, сыӵе шонер гожез нялмыт гож шуо; OB няллмытлэн AE шонерен вожвылскон O точка—нялмытлэн дйнез шуса нимаське.

4. *Теорема.* Шонер вылысь басьтэм точка пыртй со шонер бордэ одг перпендикуляр гинэ ортчытыны луэ.



45 сур.



46 сур.

Зэме поттон. O точка пыртй (46 сур.), OD перпендикуляр сяна, EA бордэ нош одйг перпендикуляр OB ортчытэмын шуом, соку OB перпендикуляр OB шонерен шонер сэрег лэсьтэ, со нош тазьы луэ: $BAO\angle$ $DOA\angle$-лы ӵоша — ваньмыз сэрег'ёсыз шонересь луэмен, $BOA\angle$ нош $DOA\angle$-лэн люкетэз гинэ луэ, люкет нош быдэслы ӵошаны уг быгаты, озьы бере $BOA\angle$ $DOA\angle$-лы ӵошаны уг быгаты но, соин ик, O точка пыртй, OD перпендикуляр сяна EA бордэ нош ик одйг перпендикуляр ортчытыны луэ шуон зэм ӧвӧл, нош озьы бере, OD огназ гинэ EA-эн шонер сэрег пӧрмытйсь шонер гож луэ, со нош — шонер вылысь точка пыртй шонер бордэ одйг перпендикуляр гинэ ортчытыны луэ шуэмез возьматэ.

§ 9. Ваче пумит сэрег'ёс.

1. AOB сэреглэсь кыкпал дурзэ ик йыл сьӧраз кузёмытоно ке, AOB сэреген ог'я O йыло $COD\angle$ потоз; AOB но COD кык сэрег'ёсыз, огезлэн дур'ёсыз мызонэзлэн дур'ёсызлы кузёмытэмын луо ке, ваче пумит сэрег'ёс шуса нимасько. Ваче пумит сэрег'ёс кык шонер'ёс вожвылскон дыр'я пото. O точка бордын 2 куз ваче пумит сэрег'ёс вань: $AOB \angle$ но $COD \angle$, $AOD \angle$ но $BOC \angle$.

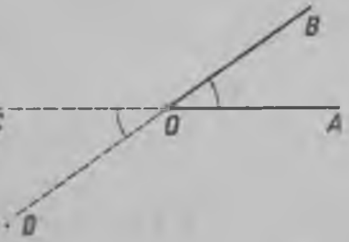
2. *Теорема.* Ваче пумит сэрег'ёс Ч̆ошало.

Сётэмын: $AOB \angle$ но $COD \angle$ — ваче пумит сэрег'ёс (47 сур.)

Зэме поттыны кулэ: $AOB \angle = COD \angle$

Зэме поттон:

1) $AOB \angle + BOC \angle = 2d$ артээсь луэмен.
2) $COD \angle + BOC \angle = 2d$ артээсь луэмен.



47 сур.

Озьы бере

$$AOB \angle + BOC \angle = COD \angle + BOC \angle,$$

соин ик

$$AOB \angle = COD \angle\text{-лы.}$$

***Следстви.* Кык шонер'ёс вожвылскон дыр'я пӧрмем ньыль сэрег'ёс пӧлысь одйгезлэн бадз̆ымлыкез сётэмын ке, соку куинезлэн кылем'ёсызлэн бадз̆ымлыксы сётэм сэреген шедьтйське.**

Юан'ёс но ужʼёс.

1. Одйг точка котыре интыам огкадесь вӧзысь тямыс сэрег'ёс пӧлысь коть-куд сэрег малы Ч̆оша?

2. Кык шонер'ёс вожвылскон дыр'я пӧрмем ньыль сэрег'ёс пӧлысь нимысьтыз сэрег малы Ч̆оша, одйгез 60° ке? $\frac{4}{9}d$?

3. Сётэм $ABC \angle$-лы артэ сэрег лэсьтоно.

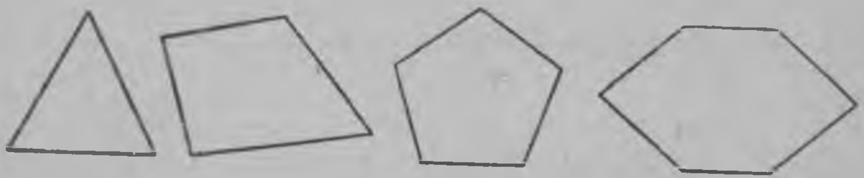
4. Кык артэ сэрег'ёслэн отношенизы 4:5. Нимысьтыз соосыз тодоно.

5. Асэныз артэ сэреглэсь 27°-лы пичи сэрегез тодоно. Но ш 90°-лы.?

6. Одйг точка котыртй интыам вӧзысь ньыль сэрег'ёс пӧлысь, куинез 0,6 d, 20° но 45° сэрег'ёс тупаса Ч̆ошало. Ньылетй сэрегез тодоно.

7. 1) $\frac{5}{6}d$; 2) $\frac{3}{8}d$; 3) $1\frac{1}{6}d$-лы ч̆ошась сэрег'ёсын кӧня градус луэмез тодоно.

8. Кык артэ сэрег'ёсыз быдэн шорй люкись кык шонер'ёс куспысь сэрегез тодоно. Со шонер'ёслэсь огзыя огзы ласянь интыаськемзэс возьматоно.



48 сур.

III. КУИНЬСЭРГООС.

§ 1. Шонер гожо фигураос.

1. *Валчеам тиаськем гожен котыртэм чошкеслэн люкетэз уносэрго шуса нимаське.* Тйаськемлэн ёз'ёсыз солэн дур'ёсыз шуса нимасько. Уносэрголэн быдэн-быдэн кык артэ дур'ёсыз сэрег

пöрмыто. Уносэрголы дур'ёсыз'я ним поныны кутэмын öвöл. Дур'ёсызлы тупась сэрег'ёсызлэн лыдзыя уносэрголы ним поныны кутэмын.

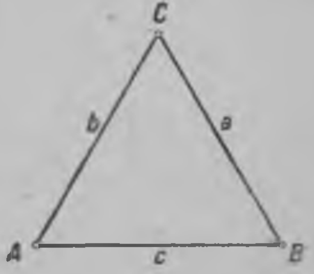
Куинь вандэт'ёслэсь луись тӥаськем гожен котыртэм ӵошкеслэн люкетэз куиньсэрго шуса нимаське.

Ньыль вандэт'ёслэсь луись тӥаськем гожен котыртэм ӵошкеслэн люкетэз ньыльсэрго шуса нимаське.

n вандэт'ёслэсь луись тӥаськем гожен котыртэм ӵошкеслэн люкестэз n-сэрго шуса нимаське.

48 суред вылын куиньсэрго, ньыльсэрго, витьсэрго но куатьсэрго сётэмын.

2. Сэрег'ёсызлэн йылаз пуктӥськись латин алфавитлэн бадӟым букваосыныз уносэрго пусйиське; уносэрголэн сэрег'ёсызлэн йыл'ёсыз озьы ик уносэрголэн йыл'ёсыз шуса нимасько. „Куиньсэрго" кылэз гожтон дыр'я $\triangle$ пусэн вошто. ABC $\triangle$ гожтэм — ABC куиньсэрго шуса лыдӟиське.



49 сур.

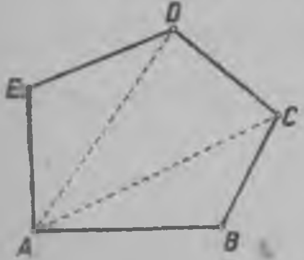
Куиньсэрголэсь AB, BC но AC дур'ёссэ (49 сур.) латин алфавитлэн одӥг пичи букваеныз но пус'ё. Со буква солэн пумитаз кыллись куиньсэрголэн сэрегезлэн пусйиськемезлы тупа. Озьы, $C\angle$-лэн пумитаз кыллись AB дур одӥг пичи c букваен пусйиське, AC дур — пичи b букваен, BC дур — пичи a букваен.

Аслыз тупась кузьдала мертэт единицаосын мертам дурлэсь кузьдалазэ но пичи букваен ик пусйыло. Озьы, кылсярись:

$$BC = a\ см, \qquad AC = b\ см. \qquad AB = c\ см.$$

Та пус'ем'ёс'я:

1) $A\angle$ a дурлэн пумитаз но b но c дур'ёслэн куспазы кылле;
2) $B\angle$ b „ „ но a но c „ „ „
3) $C\angle$ c „ „ но a но b „ „ „



50 сур.

Шаркак озьы ик:

1) a дур бордын $B\angle$ но $C\angle$ кыллё;
2) b „ „ $A\angle$ но $C\angle$ „
3) c „ „ $A\angle$ но $B\angle$ „

3. *Уносэрголэн вань дур'ёсызлэн суммаэз периметр шуса нимаське.*

ABC $\triangle$-лэн периметрез (49 сур.) солэн куинь дурезлэн кузьдалаосызлэн суммаэзлы ӵоша.

$P = BC + CA + AB$, яке $P = a + b + c$. Татын P букваен периметрез пусйиське.

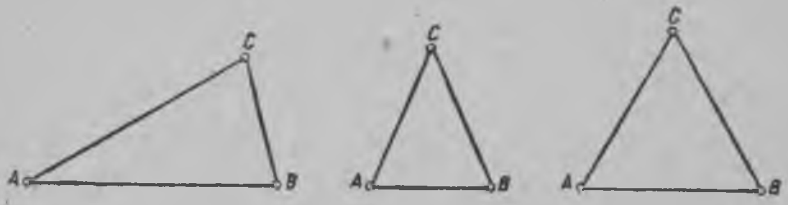
4. *Уносэрголэн одиг пал дураз кыллисьтэм йыл'ёссэ огазеась вандэт диагональ шуса нимаське.* Диагональёс уносэргоэз куиньсэргоослы люкыло. AC но AD диагональёс (50 сур.) $ABCDE$ витьсэргоэз куинь куиньсэргоослы люко: ABC, ACD но ADE.

5. Уносэрголэсь аслык'ёссэ дышетскон — куиньсэрголэсь аслык'ёссэ дышетсконэ вуттӥське, озьы бере нош куиньсэргоосыз дышетскон тужгем бадӟым кулэлык басьтэ.

§ 2. Куиньсэргоослэн классификацизы.

1. Дур'ёсызлэн кузьдалаосыз'я куиньсэргоос луо: 1) пӧртэм дур'емесь, 2) огкадь урдэс'емесь но 3) огкадь дур'емесь (51 сур.).

Пӧртэм дур'ем куинсэргоосын вань дур'ёсыз пӧртэм кузьдалаэсь; огкадь урдэс'ем куиньсэргоын кык огкадесь дур'ёсыз; огкадь дур'ем куиньсэргоын вань куинь дур'ёсыз чошасесь.



пӧртэм дур'ем огкадь урдэс'ем огкадь дур'ем

51 сур.

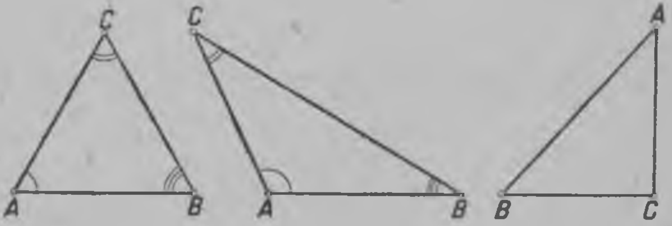
2. Сэрег'ёсызлэн бадз̆ымлыксыя куиньсэргоос тачеэсь луо (52сур):

1) кырыжсэрег'емесь:

1) йылосэрег'емесь, соослэн вань серег'ёссы йылсоэсь:

б) мырксэрег'емесь, соослэн сэрег'ёсыз пӧлысь одйгез мырк;

2) шонерсэрег'емсь, соослэн сэрег'ёсыз пӧлысь одйгез шонер.



йылсосэрег'ем мырксэрег'ем шонерсэрег'ем

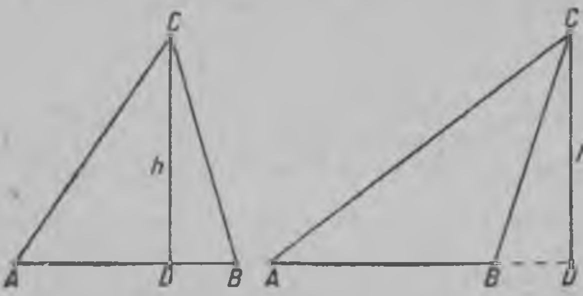
52 сур.

Шонерсэрег'ем куиньсэрголэн дур'ёсыз пӧртэмесь ним'ёс куто: шонер сэрегез пыртйсь дур'ёс — катет'ёс шуса нимасько, шонер сэреглэн пумитаз кыллись дурез гипотенуза шуса нимаське.

§ 3. Куинсэргоын гож'ёс.

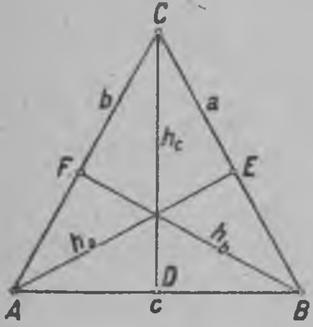
1. **Ӂуждала.** Куиньсэрголэсь дур'ёсыз пӧлысь одйгзэ солэн дйнез шуса нимало. Котькуд пал дурез куиньсэрголэн дйнез луыны быгатэ. Куиньсэрголэн йылэз сярись вераськыку, куиньсэрголэн куинь йыл'ёсыз пӧлысь дйнезлэн пумитаз кыллись йылзэ басьто.

Огкадь урдэс’ем куиньсэргоын кык мызон дур‘ёсызлы ӵошасьтэм дурзэ дӥнь интыэ басьто, кык огкадесь дур‘ёс вискепыртэм куспысь дӥнезлы пумитаз кыллись сэреглэсь йылзэ — куиньсэрголэн йылэз шуса кутэмын.

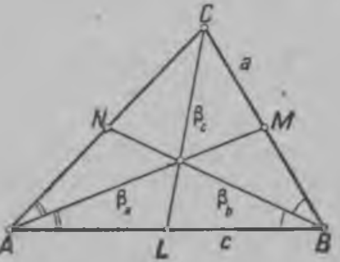


53 сур.

Куиньсэрголэн йылысьтыз со йыллэн пумитаз кыллись дураз яке солэн кузёмытэмаз ортчытэм перпендикуляр куиньсэрголэн жуждалаэз шуса нимаське (53 сур.). Ӝуждалазэ h букваэн пусйыны кутэмын. Куиньсэрголэн A йылысьтыз a дур вылэ ортчытэм h ӝуждалэз h пыртӥ $_a$ пусэн пус’ё озьы $AE = h_a$ (54 сур.) B йылысь b дур вылэ ортчытэм ӝуждала h_b пыртӥ пусйиське; озьы $BF = h_b$. Куинетӥ ӝуждалаэз $CD = h_c$.



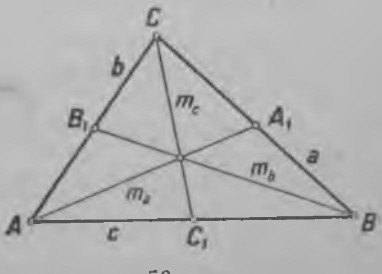
54 сур.



55 сур.

Биссектриса. *Куиньсэрголэсь сэрегзэ шори люкись шонер гож биссектриса шуса нимаське. Со греческой С букваен пусйиське* (55 сур.).

Куиньсэрголэн A йылысьтыз ортчытэм биссектриса β букваэн$_A$ пусэн пусйиське; озьы AM биссектриса $= \beta_A$. B йылысьтыз ортчытэм биссектриса β_B пусйиське; озьы, $BN = \beta_B$; куинетӥ биссектриса $CL = \beta_C$ AM биссектриса $A\angle$-эз шори люке, соин ик:



56 сур.

$$CAM\angle = MAB\angle = \frac{1}{2} A\angle.$$

3. **Медиана.** *Куиньсэрголэсь A йылзэ солы ваче пумит кыллись a дурлэн A_1 шорвадесэныз огазеясь AA_1 вандэт* (56 сур) *медиана шуса нимаське но m* пыртӥ $_a$ пусэн пусйиське: озьы, $AA_1 = m_a$. Медиана $BB_1 = m_b$ но куинетӥ медиана $CC_1 = m_b$.

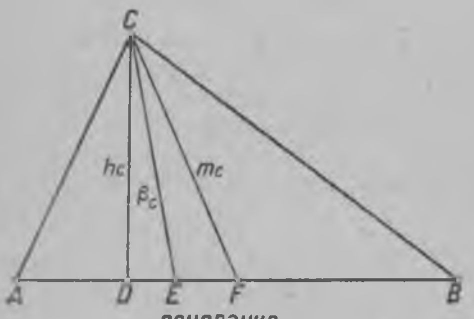
AA_1 медиана $BC = a$ дурез шори люке, соин ик:

$$A_1B = A_1C = \frac{a}{2}.$$

57 суред вылын ABC куиньсэрголэн CD ӝуждалаэз CE биссектрисаэз но CF медианаэз ортчытэмын. Ӝуждала, биссектриса но медиана — куиньсэргоын пӧртэмесь куинь гож’ёс.

§ 4. Куиньсэрголэн дур‘ёсыз куспын герӟаськонлык.

57 суред вылын $ABC \triangle$ сётэмын. A но B йыл’ёсыз AB вандэтлэн но ABC тӥаськемлэн пум‘ёсыз луо.



57 сур.

Шэнерлэн аксиомаэз’я, AB вандэт — A но B точкаос вискысь котькудӥзлэсь вакчи кусып, соин ик $AB < AC + CB$, $BC < BA + AC_1$, $CA < CB + BA_1$, озьыен:

Котькӥче куиньсэргоын котькуд кык дур‘ёсызлэн суммазы куинетӥ дурезлэсь бадӟым.

$AB < AC + CB$ ӵошасьтэмлэн котькуд пал люкетысьтыз огкадь AC бадӟымлыкез куштӥд ке, луоз: $AB - AC < CB$, яке $CB > AB - AC$, шаркак озьы ик $BC - BA < AC_1$, $CB - CA < BA$, мукет сямен,

Куиньсэрголэн котькуд дурез солэн кык мызон дур‘ёсызлэн разностезлэсь, бадӟым (57 сур).

Котькудӥз куинь вандэт’ёс куиньсэрголэн дур’ёсыз луыны уг быгато шуса, потэм йылпум’ян возьматэ; ку ке котькуд кык вандэт’ёслэн суммазы куинетӥезлэсь бадӟым, соку гинэ куинь вандэт’ёслэсь куиньсэрго лэсьтыны луэ.

§ 5. Огкадь урдэс‘ем куиньсэрго. Солэн аслык‘ёсыз

Теорема. I. **Огкадь урдэс‘ем куиньсэргоын йылаз луись сэсэреглэн биссектрисаэз огдырен ик медиана но ӝуждала но луэ.**

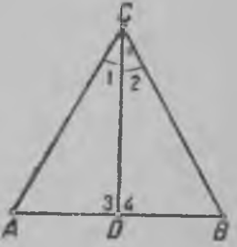
1. Огкадь урдэс‘ем куиньсэргоын дӥняз луись сэрег‘ёс ӵошало.

Сётэмын: $ABC \triangle$-ын $AC = CB$; CD — биссектриса;

$$1 \angle 2 = \angle = \frac{C \angle}{2} \text{ (58 сур.).}$$

Зэме поттыны кулэ: 1) CD — медиана, мукет сямен $DA = DB$,
2) CD — ӝуждала, мукет сямен $CD \perp AB$,
3) $A \angle = B \angle$.

Зэме поттон. CD биссектриса $C\angle$-ез кык огкадесь 1 но 2 сэрег’ёслы люке но $ABC\triangle$-эз кык куиньсэргоослы люке: $ACD\triangle$ но $CBD\triangle$. 58 суредэз CD шонер кузя куасалтом но ACD но $CBD\angle$ куиньсэргоослэн огзы вылэ огзы усемызлы оском. Зэмзэ ик, $1\angle$ но $2\angle$ ӵошамзыя AC дур CB дур кузя мыноз, $AC=CB$, соку A точка B точка вылэ усёз; огдырен ик DA но DB дур’ёс огзы вылэ огзы усёзы — соослэн пум’ясь A но B точкаоссы огзы вылэ огзы усемен но соослэн ог’я D точказы интыаз ик кылемен; озьы ик $3\angle$ $4\angle$-эн, $A\angle$ $B\angle$-эн тупазы $ACD\triangle$ но $CBD\triangle$ вань элемент’ёссы огзы вылэ огзы усемысьтызы тазьы шуыны луэ:



58 сур.

1) $DA=DB$, со нош D—AB дӥньлэн шорвадесэз но CD вандэт — медиана луэмез возьматэ;

2) $3\angle=4\angle$, со сэрег’ёс артэ но куспазы ӵошасесь луэмен шонересь луо бере, $CD\perp AB$ но, CD вандэт ӝуждала луэ;

3) $A\angle=B\angle$, мызон сямен, огкадь урдэс’ем куиньсэрголэн дӥняз луись сэрег’ёс ӵошало. Теорема зэме поттэмын.

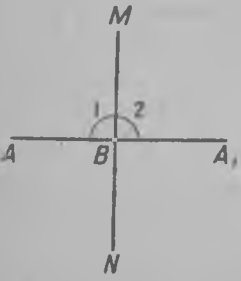
***Следствиос.* 1. Одӥг куиньсэргоын ик огкадесь дур‘ёслэн пумитазы ӵошасесь сэрег’ёс кыллё.**

Зэмзэ ик, $ABC\triangle$-ын солэн кык дур’ёсыз ӵошало ке, $AC=CB$, соку со огкадь урдэс’ем но огкадесь дур’ёсызлэн пумитазы ӵошасесь сэрег’ёс кыллё, мукет сямен, $A\angle=B\angle$.

2. Огкадь урдэс‘ем куинсэргоын йылысьтызы дӥнь бордаз ортчытэм перпендикуляр 1) дӥньзэ но 2) йылаз луись сэрегез шори люке.

3. Огкадь урдэс‘ем куиньсэргоын дӥнезлэсь вадессэ куиньсэрголэн йылэныз огазеась перпендикуляр—дӥнезлы перпендикулярной луэ но йылаз луись сэрегез шори люке.

4. Огкадь урдэс’ем куиньсэргоын дӥнезлэн шор вадесэз пыр дӥнез бордэ ортчытэм перпендикуляр куиньсэрголэн йылэз пыр ортче но йылаз луись сэрегез шори люке.



59 сур.

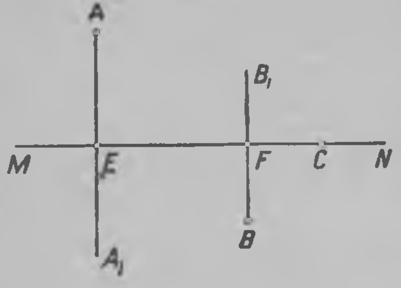
§ 6. Черсо симметри.

1. Симметрио точкаос. Лис вылэ MN шонер гож ортчытӥд ке, со бордысен кытӥаз ке паллян палаз A точкаэз басьтыса, лислэн паллян палэз бур пал вылаз мед усёз шуса MN шонер гож кузя куасалтӥд ке A точка A_1 вылэ усёз (59 сур.). Сыӵе кык точкаос сярись, соос—симметри черс шуон MN шонер гожлы симметрио интыамын шуса верало.

Симметрио A но A_1 точкаослэсь кыӵе аслыко луэмзэс валан понна, соосыз AA_1 шонер гожен огазеалом; со симметрилэсь MN черссэ B точкаын вожвылтэ.

Чертёжез (59 сур) MN черс кузя куасалтон дыр'я A точка A_1 точка вылэ но $1\angle$ $2\angle$ вылэ усёз; соин ик:

1) $1\angle = 2\angle$, со сэрег'ёс нош артээсь, соос куспазы ӵошало бере, $1\angle$ но $2\angle$ — шонересь сэрег'ёс, озьы дыр'я $MN \perp AA_1$, мукет сямен MN симметрилэн черсэз A но A_1 симметрио точкаосыз огазеась AA_1 вандэт бордэ перпендикулярной луэ.



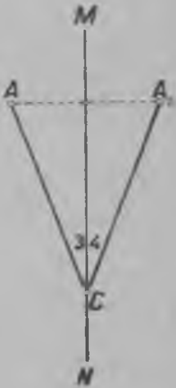
60 сур.

2) $BA = BA_1$ озьы дыр'я, B точка AA_1 вандэтлэн шорвадесаз луэ но A но A_1 точкаос MN симметрилэн черсэз дорысен огкадь кусыпын интыаськемын.

Озьыэн: черслы симметрио луись точкаос симметрилэн черсэз бордэ перпендикуляр вылын одӥг кемын но солэн мыд-мыд пал дур'ёсаз кыллё, яке: кык точкаослэн симметрио черссы со точкаосыз огазеась вандэтлы перпендикулярной луэ но солэн шор вадестӥз ортче.

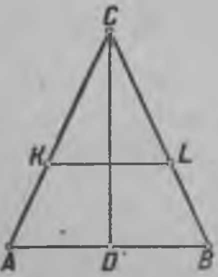
Задача. *A, B но C точкаос но MN черс сётэмын; MN черслы симметриоэсь луись A, B но C точкаос лэсьтоно.*

Лэсьтонэз. A но B точкаосысь (60 сур.) MN шонер гожлы перпендикуляр'ёс ортчытӥськом но соослэн кузёмытэмазы $EA = AE$ но $FB_1 = BF$ вандэт'ёс интыаськом; A но B точкаослы симметрио луись A но B точкаос поттом. Симметрилэн черсэз вылын кыллись C точкалы, ачиз C точка аслыз симметрио луоз.



61 сур.

2. Симметрио шонер гож'ёс. A но A_1 точкаос— MN черслы симметрио точкаос (61 сур.). MN симметрилэн черсэз вылын кытыназ ке C точкаэз басьтӥд ке но соэ симметрио A но A_1 точкаосын огазеад ке, соку CA но CA_1 шонер гож'ёс потозы соос, MN черс кузя куасалтон дыр'я огзы вылэ огзы усёзы. Сыӵе шонер гож'ёс симметрио шонер гож'ёс шуисько. 61 суредэз MN черс'я куасалтыса, симметрио CA но CA_1 шонер гож'ёсын пӧрмытэм 3 но 4 сэрег'ёс но черс вылэ усё шуса осконо луись ком, озьы бере, $3\angle = 4\angle$, нош со кык симметрио CA но CA_1 шонер гож'ёслэн MN симметри черссы соосын пӧрмытэм сэрегез шори люкe но соослэн биссектрисазы луэмзэ возьматэ. Озьыэн, *кык вожвылскись симметрио шонер гож'ёслэн сэрегзылэн биссектрисаэз соослэн симметри черссы луэ.*



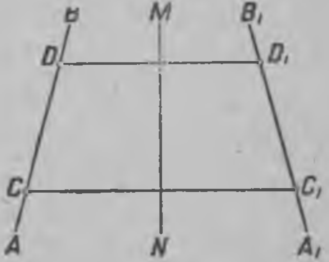
62 сур.

Кык вожвылскись симметрио шонергож'ёслэн симметри черссылэн та аслыксы сярись тазьы но верало: **биссектриса — сэреглэн дур'ёсызлэн симметри черсэз луэ.**

Огкадь урдэс'ем куиньсэргоын йылаз луись сэреглэн биссектрисаэз солэн дур'ёсызлэн симметри черсэз луэ.

Огкадь урдэс'ем ABC куиньсэрголэн йылаз луись C сэреглэн CD биссектрисаэзлэн котькуд точкаэз пыр (62 сур.) биссектрисаэзлы перпендикуляро шонер гож ортчытӥд ке, соку со куиньсэрголэсь урдэс CA но CB дур'ёссэ кык симметрио K но L точкаостӥз вожвылтоз; со точкаос сэреглэн йылысеныз огкемын сыло, малы ке шу но, 62 суредэз K но L точкаослэн черссы кузя куасалтон дыр'я CK он CL вандэт'ёс но огзы вылэ огзы усёзы.

Задача. *Сётэм MN симметри черс'я сётэм AB шонер гожлы симметрио луись шонер гож лэсьтоно* (63 сур.).



63 сур.

Лэсьтонэз. AB шонер гожлэн кыӵе ке кык C но D точкаосысьтыз MN черс бордэ перпендикуляр'ёс ортчытӥськом, со точкаослы симметриоэсь C но D_1 точкаос шедьтӥськом но со точкаос пыр A_1 B_1 шонер гож ортчытӥськом, сётэм AB шонер гожлы со симметрио луоз.

3. Симметрио фигураос. Одӥг фигуралэн котькуд точкаэзлы мызон фигураысь солы симметрио точка тупа ке, сыӵе кык фигураос черс'я симметрио шуса нимасько.

Фигураын шонер гож ортчытыса со шонер гож кузя фигураэз куасалтон дыр'я одӥг пал люкетэз мызон пал люкет вылаз быдэсак усе ке, сыӵе фигура симметрио шуса нимаське. Огкадь урдэс'ем куиньсэрго — симметрио фигура (62 сур.); солэн ӝуждалаэз (со одӥг дыр'я ик со йылысьтыз сэреглэн биссектрисаэз луэ) — солэн симметри черсэз.

Котыргож — симметрио фигура; солэн котькудӥз диаметрез солэн симметри черсэз луэ.

Юан'ёс но уж'ёс.

1. Малы огкадь урдэс'ем куиньсэргоын солэн котькуд ӝуждалаэз одӥг дыр'я ик биссектриса но медиана луэ?

2. Котретын кыӵе гож диаметрлэн симметри черсэз луэ?

3. Огкадь урдэс'ем куиньсэргоын урдэс дураз ортчытэм медиана солэсь периметрзэ 7,5 *см* но 6,5 *см* кузьдаэсь люкет'ёслы люке. Дур'ёссэ лыд'яно.

4. Симметри черс интыэ а) катет'ёс пӧлысь одӥгзэ, б) гипотенузаэ кутыса, сётэм куиньсэрголы симметрио шонерсэрег'ем куиньсэрго лэсьтоно. Симметри черс интыэ катет басьтэмын ке, кыӵе фигура потоз, верано.

5. Кык вожвылскись шонер гож'ёслэн симметри черс'ёссы огзылы-огзы ваче перпендикулярной луо шуса эзме поттоно.

IV. КУИНЬСЭРГООСЛЭН ӴОШАНЗЫ.

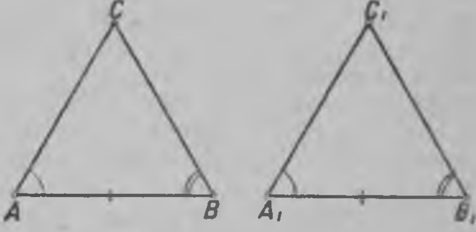
§ 1. Куиньсэргоослэн ӵошанзылэн 3 тодметэз.

Кык фигураос соосыз огез вылэ огзэ пуктон дыр'я вань элемент'ёсынызы — дур'ёсынызы но сэрег'ёсынызы — тупало ке, сыче кык фигураос ӵошасесь шуса нимасько.

1. Нырисетй тодмет.

Теорема. **Одйг куиньсэрголэн одйг дурез но со вŏзысь кык сэрег’ёс мукет куиньсэрголэн дуреныз но со вŏзысь кык сэрег’ёсын тупаса ч̆ошало ке, кык куиньсэргоос ч̆ошало.**

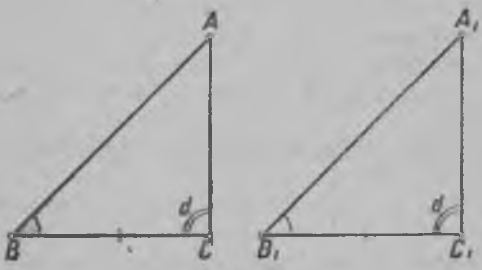
Зэме поттон. $A_1B_1C_1 \triangle$-эз $ABC \triangle$ вылэ, A_1 йылэз A йылэн мед тупалоз но A_1B_1 дурез AB дур кузя (64 сур.) мед мыноз шуса, куиньсэргоосыз огез вылэ огзэ поном; соку A_1B_1 но AB дур’ёс ч̆ошамен B_1 точка B точка вылэ усёз, нош $A_1 \angle = A \angle$ но $B_1 \angle = B \angle$ бере, соку A_1C_1 дурез AC дур кузя мыноз но B_1C_1 дур — BC дур кузя. Куинетй C_1 йылэз одно ик C точка вылэ усёз, малы ке шуоно C_1 но C точкаос одйг ваче тупам шонер гож’ёслэн ик вожвылскеменызы пŏрме. Озьыэн, $A_1B_1C_1 \triangle$ но $ABC \triangle$ огез вылэ огез усизы; озьы бере соос ч̆ошало, $A_1B_1C_1 \triangle = ABC \triangle$. Куиньсэргоослэн ч̆ошанысьтызы мызон соослы тупаса интыам элемент ёссылэн ч̆ошанзы потэ: $A_1C_1 = AC$, $B_1C_1 = BC$ но $C_1 \angle = C \angle$.



64 сур.

Та теорема огез вылэ огзэ понон амалэн зэме поттэмын.

Следстви. **Одйг куиньсэрголэн кык урдэс’ёсыз но соос вискысь сэрег мукет куиньсэрголэн тупась кык урдэс’ёсызлы но соос вискысь сереглы ваче ч̆ошало ке, кык куиньсэргоос ч̆ошало.**



65 сур.

Зэмзэ ик, кык шонер сэрег’ем ABC но $A_1B_1C_1$ куиньсэргоос ч̆ошало (65 сур.), малы ке шуоно, быдэнак ч̆ошась катетсы, кылсярись $B_1C_1 = BC$ шуом но со катет вŏзысь кык ч̆ошасесь сэрег’ёссы вань, соос пŏлысь условия $B_1 \angle = B \angle$ но $C_1 \angle = C \angle$ шонер сэрег’ёс луэменызы.

2. Кыкетй тодмет.

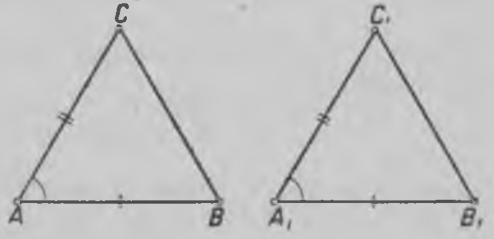
Теорема. **Одйг куиньсэрголэн кык дур’ёсыз но соос вискысь сэрег мукет куиньсэрголэн тупаськык дур’ёсызлы но соос вискысь сэреглы ч̆ошало ке, кык куиньсэргоос ч̆ошало.**

Сётэмын: $ABC \triangle$ но $A_1B_1C_1 \triangle$. 1) $A_1B_1 = AB$; 2) $A_1C_1 = AC$ но
3) $A_1 \angle = A \angle$ (66 сур.)

Зэме поттыны кулэ: $A_1B_1C_1 \triangle = ABC \triangle$

Зэме поттон. $A_1B_1C_1 \triangle$-эз $ABC \triangle$ вылэ, A_1 йыл A йылэ мед усёз шуса но A_1B_1 дур AB дур кузя мед мыноз шуса поном, соку A_1B_1 но AB дур’ёслэн ч̆ошаменызы B_1 точка B точка вылэ усёз, A но

A_1 сэрег’ёслэн ӵошаменызы нош A_1C_1 дур AC дур кузя мыноз, нош $A_1C_1 = AC$ бере, соку C_1 точка C точкаэ усёз; соэн ӵош ик C_1B_1 но CB дур’ёс но огзы вылэ огзы усёзы, малы ке шуоно, сооcлэн пум’ясь C_1 но C, B_1 но B точкаоссы огзы вылэ огзы усизы. Озьыэн, $A_1B_1C_1$ но ABC куиньсэргоос огзы вылэ огзы усизы, озьы бере, соос ӵошало, $A_1B_1C_1 \triangle = ABC \triangle$-лы. Куиньсэргооcлэн ӵошанысьтызы нош соослэн вань дур’ёссы но сэрег’ёссы ваче ӵошало шуса потэ: 1) $C_1B_1 = CB$, 2) $B_1 \angle = B \angle$ но 3) $C_1 \angle = C \angle$



66 сур.

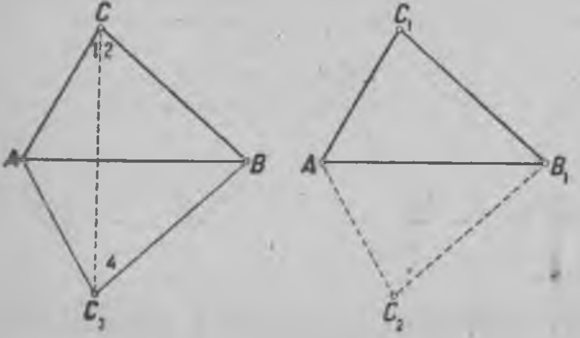
Та теорема озьы ик огзы вылэ огзэ понон амалэн зэме поттэмын.

Со амал нош таӵе луэ. Нырись ик одӥг точка — одӥг куиньсэрголэн йылэз мызон куиньсэрголэн — точкаэныз — йылэныз огзы вылэ огзы уськытӥське, собере вандэт — одӥг куиньсэрголэн дурез — огкадь вандэтэн — мызон куиньсэрголэн дуреныз огез вылэ огез уськытӥське; одӥг куиньсэрголэн одӥг яке кык сэрегезлэн мызон куиньсэрголэн одӥг яке кык сэрегеныз ӵошан’я огзы вылэ огзэ уськытӥськись куиньсэргооcлэн дурзы сярись, яке кык дурзы сярись вераны быгатӥськом.

Соэн ӵош ик куиньсэргооcлэн куинетӥ йыл’ёссылэн огзы вылэ огзылэн усемзы шараaське ке, соку дур’я куиньсэргоос огзы вылэ огзы усё но, соин ик огкадесь.

***Следстви.* Кык шонерсэрег’ем куиньсэргооcлэн катет’ёссы ӵошало ке, со куиньсэргоос ӵошало.**

Зэмзэ ик, кык шонерсэрег’ем куиньсэргооcлэн быдэн кык ваче ӵошась катет’ёссы но соос виске пыртэм ваче ӵошась сэрегзы луэмен, куиньсэргоос ӵошасесь луо.



67 сур.

3. Куинетӥ тодмет.

***Тёорема.* Одӥг куиньсэрголэн куинез дур’ёсыз мукетэзлэн куиньсэрголэн куинь дур’ёсызлы ӵошало ке, кык куиньсэргоос ӵошало**

Сётэмын: $ABC \triangle$ но $A_1B_1C_1 \triangle$

$\underline{1)\ A_1B_1 = AB;\ 2)\ A_1C_1 = AC \text{ но } 3)\ B_1C_1 = BC}$ (67 сур.)

Зэме поттыны кулэ: $A_1B_1C_1 \triangle = ABC \triangle$

Зэме поттон. $A_1B_1C_1$ куиньсэргоэз A_1B_1 дурез котыртӥ соэ вырӟытылытэк кельтыса, 180°-лы берыктом: соку $A_1B_1C_1 \triangle$ $A_1B_1C_2$ инты басьтоз Тодмо ини: $A_1B_1C_1 \triangle = A_1B_1C_2 \triangle$. Собере

$A_1B_1C_2$ куиньсэргоэз $ABC \triangle$ бордэ — A_1 точка A точка вылэ мед усёз но A_1B_1 дур AB дур кузя мед мыноз шуса, поном; соку A_1B_1 но AB дур'ёс ӵошамен B_1 точка B точкаэн тупалоз но C_2 йыл C_3 йыллэсь интызэ басьтоз. Собере C йылэз C_3 йылэн CC_3 шонер гожен огазеалом; CC_3 шонер гожлэсь C но C_3 сэрег'ёсыз люкем сэрег'ёссэ *1*, *2*, *3*, но *4* пус'ёсын пус'ём но потэм кык огкадь урдэс'ем ACC_3 но CBC_3 куиньсэргоосыз эскером, соослэн CC_3 — ог'я дӥньзы, $AC = AC_3$ но $BC = BC_3$.

Огкадь урдэс'ем куиньсэргоосын дӥньысьтыз сэрег'ёсыз ӵошало, соин ик:

1) $ACC_3 \triangle$-ын $1\angle = 3\angle$.
2) $CBC_3 \triangle$-ын $2\angle = 4\angle$.

Нимысьтыз член'я оген-оген огезеаса, потоз:

$$1\angle + 2\angle = 3\angle + 4\angle,$$

нош

$$1\angle + 2\angle = C\angle \text{ но } 3\angle + 4\angle = C_3\angle,$$

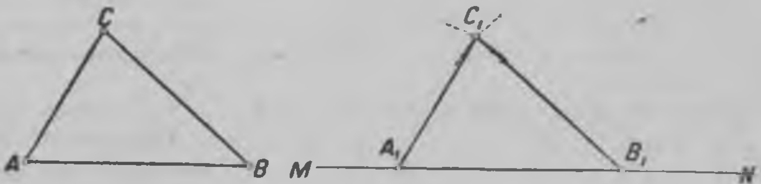
озьы бере,

$$C\angle = C_3\angle.$$

Табере ABC но ABC_3 куиньсэргоосыз эскером: соослэн $AC = AC_3$ но $BC = BC_3$ но зэме поттэм'я $C\angle = C_3\angle$. Озьы бере куиньсэргоос ӵошало. $ABC \triangle = ABC_3 \triangle$ кык дур'я но соос вискысь сэрег'я, нош $ABC_3 \triangle = A_1B_1C_2 \triangle = A_1B_1C_1 \triangle$ но $ABC_3 \triangle = ABC \triangle$, соин ик $A_1B_1C_1 \triangle = ABC \triangle$. Теорема зэме поттэмын.

§ 2. Лэсьтонлы основной задачаос.

Планиметрилэн основной образ'ёсыз **точка** но **гож** луо; планиметриын эскероно гож'ёс пӧлысь котькудӥзлэсь ик огшорыэз **шонер гож** но **котыргож**. Шонер гож лэсьтон инструмент — **линейка**, котыргожлы — **циркуль** кулэ.



68 сур.

Та кык инструмент'ёс мукет'ёсыз (транспортир, сэрег шонертон) сярись туж шонересь. Элементарной геометриын шонер гож но котыргож сяна нокыӵе мызон гож'ёс уг ик эскерисько. Соин ик тӥни, геометриын котькыӵе шаркак геометрио лэсьтонэз циркулен но линейкаэн быдэстыны кулэ шуэмын вашкала дырысен, мукет сямен вераса, шонер гож'ёс но котыргож'ёс ортчытон пыр. Тӥни соин ик, лэсьтонлы задача соку гинэ лыд'яськемын луэ, ку ке лэсьтон амалэз циркулен но линейкаэн возьматэмын луэ. Кыӵе ке фигура лэсьтыны кулэ луэ ке, со лэсьтонэз циркулен но линейкаен лэсьтэмын луыны кулэ шуса малпало. Нош со тӥрлык’ёсын но со амал’ёсын уг быдэсмы ке (кылсярись, сэрегез 3 огкадесь люкет’ёслы люкон), соку, задачаез та выллем валан дыр’я, кулэ лэсьтонэз быдэстыны уг луы шуса верало.

1. **задача.** *Сётэм ABC куиньсэрголы чошась куиньсэрго лэсьтоно* (68 сур.).

Лэсьтонэз. Огшоры басьтэм MN шонер гож вылэ ABC куиньсэрголэн AB дурезлы ӵошась A_1B_1 вандэт пуктӥськом; A_1 но B_1 точкаосыз шорлы кутыса, AC но BC вандэт’ёслы — ABC куиньсэрголэн дур’ёсызлы ӵошась радиусо букоос ортчытӥськом; соослэсь вожвылскем C_1 точказэс A_1 но B_1 точкаосын огазеаса, утчано $A_1B_1C_1\triangle$ поттом.

Зэмзэ ик, $A_1B_1C_1\triangle = ABC\triangle$, малы ке шуоно, сооснэн $A_1B_1 = AB$, $A_1C_1 = AC$ но $B_1C_1 = BC$.

2 задача. *Куиньсэргоэз солэн куинь a, b но c дур’ёсыз’я лэсьтоно.*

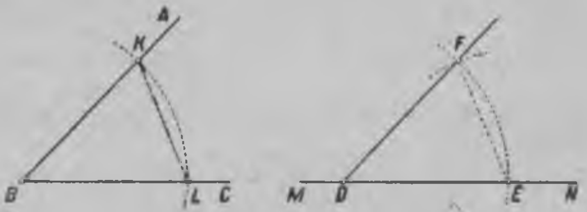
Сётэм куинь вандэт’ёс пӧлысь котькудӥз вандэт мызон кык кылем вандэт’ёслэн суммазылэсь пичи ке, кылсярись $a \angle b + c$, куиньсэрго лэсьтыны луэ. Та условиез бадӟым вандэтлы эскеремен тырме, малы ке шуоно, пичи вандэт’ёс пӧлысь котькудӥз кык кылем вандэт’ёслэн суммазылэсь, веранэз ӧвӧл, пичи луэ.

Сётэм вандэт’ёс дыр’я возьматэм услови ужен быдэсме-а, соэ эскерискьом; со услови быдэсме ке, лэсьтыны кутскиськом.

Лэсьтонэз — талэсь азьвыл задачаын возьматэм амалэн быдэстоно.

Задачалэн сётэм’ёсыз’я кӧня ке кулэ, со мында куиньсэргоос лэсьтыны луоз, нош ваньзы ик соос огзы вылэ огзэс пук тон дыр’я тупалозы. Озьы бере, задачалэн сётэм’ёсыз’я сётэм тусо но сётэм быдӟалао одӥг куиньсэрго гинэ лэсьтыны луоз.

3 задача. *Сётэм сэреглы чошась сэрег лэсьтоно.*



69 сур.

Лэсьтонэз. $ABC\angle$ сётэмын (69 сур.). MN шонер гож ортчытом но, кытчыаз ке но со вылэ D точка пус’ём. Собере огшоры басьтэм огкадь кузьдалао радиусо кык букоос ортчытӥськом, огзэ $ABC\angle$-лэсь дур’ёссэ K но L точкаостӥ вожвылтыса шореныз B йылын, мукетсэ нош шореныз D точкаын. Со буколэн MN шонер гожен вожвылскон E точкаэз шорлы кутом но KL хордалы ӵошась радиусо буко ортчытӥськом; со буко нырисетӥ букоэз F точкаын вожвылтоз; F точкаэз D точкаэн огазеаса, утчано $EDF\angle = ABC\angle$ потоз.

Сыӵе лэсьтонэн потэм $EDF\angle = ABC\angle$ ӵошамез зэме поттон понна, E но F точкаосыз шонер гожен огазеалом но DEF но BKL

куиньсэргоосыз эскером. $DEF\triangle = BKL\triangle$, малы ке шуоно, соослэн, огкадесь котыргож'ёслэн радиусс'ёссы луыса, лэсьтэм'я $DE = BL$, $DF = BK$ но $EF = KL$.

Куиньсэргоослэн ӵошанысьтызы тани мар потэ: EDF но BKL сэрег'ёс — ӵошась куиньсэргоосын огкадесь FE но KL дур'ёслы ваче пумит кыллись сэрег'ёс луэменызы, ӵошась луо. Озьы,

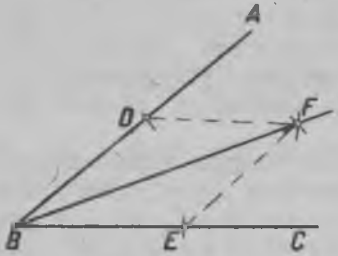
$$EDF\angle = LBK\angle = ABC\angle$$

4 задача. *Кык b но c дур'ёс'я но соос куспысь A сэрег'я куиньсэрго лэсьтоно.*

Лэсьтонэз. Огшоры басьтэм MN шонер гож вылын кыӵе ке A точка бордысь $AB = c$ вандэт интыаськом но, солэн ог пал дурез MN шонер гож кузя мынон вылысь, A точкаэ A сэреглы ӵошась сэрег лэсьтӥськом; солэн мукет пал дураз $AC = b$ вандэт интыаськом, C точкаэз B точкаэн огазеаса, утчано $ABC\triangle$ поттом. Со куиньсэргомы задачалэн условиезлы тупалоз.

5 задача. *c дурез'я но со вӧзысь кык A но B сэрег'ёс'я куиньсэрго лэсьтоно.*

Лэсьтонэз. Огшоры басьтэм MN шонер гож вылын кыӵе ке A точкаысен $AB = c$ вандэт интыаськом но A точкаэ сётэм A сэреглы ӵошась сэрег но B точкаэ сётэм B сэреглы ӵошась сэрег лэсьтӥськом, AB вандэт кыкезлэн ик сэрег'ёслэн оглом дурзы мед луоз; соку кыкезлэн ик A но B сэрег'ёслэн мукет кык дур'ёссы, C точкаын вожвылскыса, утчано ABC куиньсэрголэсь куинети йылзэ тодытозы. Кык шонер гож'ёс одӥг точкаын гинэ вожвылскыны быгато, соин ик сётэм задачалэн условиосыз одӥг лыд'ян гинэ лэзё, мукет сямен вераса, лэсьтон — определенной тусо но одӥг определенной быдӟалао куиньсэрго сётэ.



70 сур.

6 задача. *Сётэм сэрегез шори люконо.*

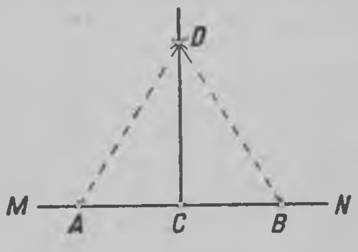
Лэсьтонэз. $ABC\angle$ сётэмын (70 сур.). Огшоры басьтэм радиусэн шореныз B йылын буко ортчытӥськом: буко сэреглэсь урдэс'ёссэ D но E точкаосэтӥ вожвылтоз.

D но E точкаосыз шор'ёс карыса, вожвылскон вылысь ӵошась радиус'ёсын букоос ортчытӥськом; F точка потоз. Собере F точкаэз B йылэн огазеаса, сётэм ABC сэреглэсь BF биссектрисазэ шедьтом.

Зэме поттон. F точкаэз D но E точкаосын огазеаса, кык куиньсэрго поттом: $BDF\triangle$ но $BEF\triangle$; соос ӵошасесь, соослэн: 1) BF — оглом дурзы, 2) $BE = BD$ — одӥг буколэн ик радиус'ёссы луэмен, 3) $EF = FD$ — огкадесь котыргож'ёслэн радиус'ёссы луэмен, соин ик FBE но FBD сэре'гёс, ӵошась куиньсэргоосын ӵошась EF но FD урдэс'ёслэн пумитазы кыллись сэрег'ёс луэмен, ӵошасесь луо: $FBE\angle = FBD\angle$.

Озьыэн, BF шонер гож сётэм ABC сэрегез шори люке: BF — сэреглэн биссектрисаэз.

FBE но FBD сэрег’ёсыз котькудзэ шори люкид ке, соку сётэм сэрег 4 огкадесь люкет’ёслы люкиськоз. Собере сыӵе ик лэсьтонэн потэм сэрег’ёслэсь люконзэс быдэстыса, сэрегез 8, 16 но мукет люкет’ёслы, ог’я вераса $2_{д}$ огкадесь люкет’ёслы люкыны луоз.



71 сур.

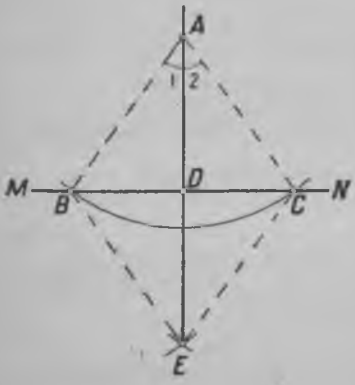
7 задача. *Шонер гож бордэ со вылэ сётэм точкаэ перпендикуляр ортчытоно.*

Лэсьтонэз. MN шонер гож вылэ, со вылэ сётэм C точка бордысен кык палаз ик огшоры басьтэм кузьдалао огкадесь CA но CB вандэт’ёс интыаськом (71 сур.); шор’ёсынызы A но B точкаосын огшоры басьтэм радиусэн ке но, AC-лэсь бадӟым радиусэн, букоос ортчытӥськом. Букоослэсь вожвылскон D точказэс C точкаэн огазеаськом: CD шонер гож — утчано перпендикуляр.

Зэме поттон. D точкаэз A но B точкаосын огазеаса, DCA но DCB куиньсэргоос поттом: соос ӵошасесь, малы ке шуоно, сооcлэн: 1) DC — ог’я дурзы, 2) $CA = CB$ — лэсьтэм’я, 3) $AD = BD$ ӵошась котыргож’ёслэн радиус’ёссы луэмен. Соин ик $DCA\angle = DCB\angle$; со сэрег’ёс — артэесь но соос пӧлысь котькуд сэрегез шонер сэреглы ӵоша, озьы дыр’я $CD \perp AB$, яке со ик $CD \perp MN$. Озьыэн, CD — утчано перпендикуляр.

8 задача. *Шонер гожлэн палэназ сётэм A точкаысь сётэм MN шонер гож бордэ перпендикуляр ортчытоно* (72 сур.).

Лэсьтонэз. Шореныз сётэм A точкаын луись буко ортчытӥськом. Со буко сётэм MN шонер гожез B но C точкаосэтӥ мед вожвылтоз. Шор’ёсынызы B но C точкаосын огкадесь радиус’ёсын букоос ортчытӥськом. Соос сётэм MN шонер гожлэн мызон палаз кыӵе ке E точкаын вожвылскозы. A но E точкасыз шонер гожен огзеаса, утчано AE перпендикуляр поттом.



72 сур.

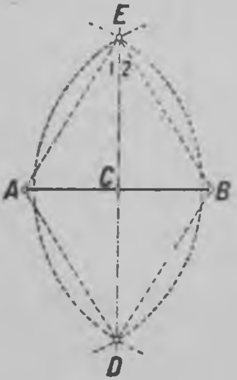
Зэме поттон. A но E точкаосыз B но C точкаосын огазеаса, $ABC\triangle = ACE\triangle$ шуса потоз, малы ке шуоно, сооcлэн: 1) AE — ог’я дурзы, 2) $AB = AC$ — одӥг буколэн ик радиус’ёсыз луэмен, 3) $BE = CE$ — ӵошась котыргож’ёслэн радиус’ёссы луэмен.

Куиньсэргооcлэн ӵошанысьтызы $1\angle = 2\angle$ шуса потэ.

Собере ABC куиньсэргоэз эскериськом; со огкадь урдэс’ем, малы ке шуоно, $AB = AC$ но AD — A сэреглэн биссектрисаэз, малы ке шуоно, $1\angle = 2\angle$. Огкадь урдэс’ем куиньсэрголэн йылысьтыз сэрегезлэн биссектрисаэз ог дырен ик солэн ӝуждалаэз но луэ, соин ик $AD \perp BC$, яке со ик $AD \perp MN$.

9 задача. *Сётэм вандэтэз шори люконо.*

Лэсьтонэз. AB сётэм вандэтлэн A но B пум'ёсаз шор'ёсын (73 сур.) огшоры басьтэм радиусэн, озьы ке но, AB вандэтлэн кык палаз ик вожвылскон вылысь но солэсь бадӟымгес луон вылысь букоос ортчытӥськом. Букоослэсь вожвылскон E но D точкаоссэс огазеась ED шонер гож AB вандэтэз C точкаын вожвылтоз, со ик сётэм AB вандэтлэн шорез луоз.



73 сур.

Зэме поттон. D но E точкаосыз A но B точкаосын огазеаса куиньсэргоос потозы. Ӵошась ADE но DBE куиньсэргоосысь $1\angle = 2\angle$ шуса потэ; огкадь урдэс'ем ABE куиньсэргоысь (солэн $1\angle = 2\angle$) EC йылысьтыз E сэреглэн биссектрисаэз нош, озьы бере, AB дурлэн медианаэз но шуса йылпум'яськом, соин ик $CA = CB$, мукет сямен вераса, C сочка AB вандэтлэн шорвадесэз луэ.

Юан'ёс но уж'ёс.

1. Кык огкадь урдэс'ем куиньсэргоослэн ӵошанзы кӧня но кыӵе утловиосын тодытӥське?
2. Малы кык огкадь урдэс'ем куиньсэргоослэсь ӵошанзэс тодон понна, соосын: 1) йылысьтызы сэрегзы но урдэс дурвылэсь, 2) дӥньзы но дӥньысьтызы сэрегзылэсь, 3) дӥньзы но урдэс дурзылэсь ӵошамзэс тодэмен тырме.
3. Огкадь урдэс'ем ABC куиньсэргоын дӥньысьтыз A но B сэрег'ёсызлэн йылысьтызы AM но BN м дианаос ортчытэмын. Медианаос ӵошало ($AM = BN$) шуса зэма поттоно. Гожтоно: 1) задачалэн условиысьтыз кыӵе тупаса ӵошась элемент'ёсыз тодмо 2) кыӵе кык куиньсэргоослэсь ӵошамзэс зэме поттоно,
4. Огкадь урдэс'ем куиньсэргоын дӥньысьтыз сэрег'ёсвзлэн биссектрисаоссы ӵошало шуса зэме поттоно.
5. Куспазы ӵошасесь кык ABC но $A_1B_1C_1$ 67 суредын возьматэмын сямен куиньсэргоос огзы вӧзэ огзы асьсэ дур'ёсынызы понэмын: $AB = A_1B_1$. Соослэсь C но C_1 йыл'ёссэс огазеась CC_1 шонер гож соослэн ог'я AB дурзылы перпендикулярной луэ, мукет сямен $CC_1 \perp AB$ шуса зэме поттоно.
6. Кык a но b дур'ёсыз'я но h_a ӝуждалаэз'я куиньсэрго лэсьтоно.
7. Кык b но b дур'ёсыз'я но m_b медианаэз'я куиньсэрго лэсьтоно.
8. Шонер сэреглэн йылысьтыз ортчытэм h_a ӝуждалаэз'я огкадь урдэсо шонерсэрег'ем куиньсэрго лэсьтоно.
9. Куиньсэрголэн a дурез'я огкадь дур'ем куиньсэрго лэсьтоно.
10. Циркулен но линейкаэн сэрег'ёс лэсьтоно 1) 90°, 2) 45°. 3) 135°.

V. КУИНЬСЭРГОЛЭН ДУР'ЁСЫЗ НО СЭРЕГ'ЁСЫЗ КУСПЫН ГЕРӞАСЬКЕМЗЫ.

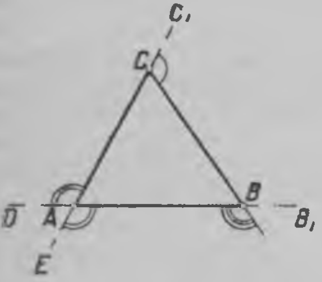
§ 1. Куиньсэрголэн педпал сэрегез; солэн аслык'ёсыз.

1. Тодытон. Куиньсэрголэн куд ке но дуреныз но артэ луись кузёмытэм дуреныз пӧрмем $CAD\angle$ яке $BAE\angle$ (71 сур.), артээсь со кык дур'ёсын ик пӧрмытэм куиньсэрголэн пуш сэрегезлэсь пӧртэм, куиньсэрголэн педпал сэрегез шуса нимаське.

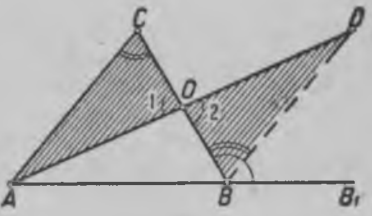
Куиньсэрголэсь кудзэ ке одӥг дурзэ кузёмытыса, куиньсэрголэн котькуд йылаз кык педпал сэрег лэсьтыны луоз. Одӥг йылын ик луись педпал сэрег’ёс, ваче кыллись сэрег’ёс луэменызы, ӵошасесь луо, $CAD\angle = BAE\angle$.

Соин ӵош ик, нимысьтыз пушпал сэрег бордэ вӧзаз луись кык огкадесь педпал сэрег’ёс пӧлысь одӥгез гинэ басьтӥське шуса малпаське.

ABC куиньсэрголэн A йылаз CAD но BAE педпал сэрег’ёс лэсьтыса асьмеос куинетӥ $DAE\angle$ но поттӥськом на. Куиньсэрголэн кык дур’ёсызлэн кузёмытэменызы пӧрмытэм со куинетӥ сэрег куиньсэрголэн педпал сэрегез уг луы; со куинетӥ сэрег аслаз быдӟалаэз’я куиньсэрголэн со A йылысьтыз ик пуш сэрегезлы, ваче кыллись сэрег луэменыз, ӵошась луэ.



74 сур.



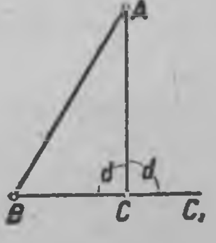
75 сур.

2. Куиньсэрголэн одӥг йыло педпал но пушпал сэрег‘ёсыз артэ сэрег’ёс, сооcлэн суммазы 2 d-лы ӵоша, мукет сямен вераса $CAD\angle + CAB\angle = 2\ d$

Та ӵошанысь потэ: 1) сэрег’ёс пӧлысь одӥгез йылсо ке, мызонэз мырк луоз; 2) кыкез ик сэрег’ёс ӵошасесь ке, соку соос котькудӥз шонер луоз.

3 *Теорема.* **Куиньсэрголэн педпал сэрегез соэн артэ луисьтэм котькуд пуш сэрегезлэсь бадӟым.**

Сётэмын: $ABC\triangle$; $CBB_1\angle$ педпал сэрег (75 сур.).
Зэмэ поттыны кулэ: 1) $CBB_1\angle > C\angle$; 2) $CBB_1\angle > A\angle$.



76 сур.

Зэме поттон. $AO = m_a$ медиана ортчытӥськом но солэн кузёмытэм вылаз солы ӵошась OD вандэт интыаськом. Собере D точкаэз B йылэн огазеаса, кык куиньсэрго поттӥськом: $AOC\triangle$ но $BOD\triangle$. Сооcлэн: 1) $CO = OB$; 2) $AO = OD$; 3) 1 но 2 сэрег’ёс ваче пумиг кыллись сэрег’ёс луэменызы, ӵошасесь луо ($1\angle = 2\angle$); озьы бере, куиньсэргоос ӵошасесь: $AOC\triangle = BOD\triangle$. Сооcлэн ӵошанысьтызы $ACO\angle = OBD\angle$ луэ шуса потэ, нош $OBD\angle$, педпал CBB_1 сэреглэн люкетэз луэмен, солэсь пичи, $OBD\angle < OBB_1\angle$ соин ик солы ӵошась ACO сэрег OBB_1 сэреглэсь пичи. ($ACO\angle < OBB_1\angle$) яке сыӵе ик, $CBB_1\angle > ACB\angle$. Сыӵе амалэн ик, $CBB_1\angle > A\angle$ шуса зэме поттӥське; зэме поттон повна m_c медиана ортчытӥськом.

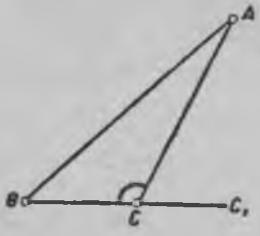
4. *Следстви. Куинсэргоын одиг сэрегез шонер яке мырк ке, мукет кык сэрег’ёсыз — йылсоэсь.*

Зэмзэ ик, 1) $ABC\triangle$-ын (76 сур.) $C\angle$ шонер ке, солы артэ луись педпал ACC_1 сэрег но озьы ик шонер луоз, соин ик $A\angle < d$ но $B\angle < d$, мукет сямен вераса йылсоэсь; 2) нош ABC куиньсэргоын (77 сур.) C мырк ке, соку солы артэ луись ACC_1 педпал сэрег — йылсо, соин ик $A\angle$ но $B\angle$ — йылсо сэрег’ёс.

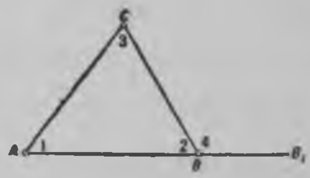
5. *Теорема.* **Котькыӵе куиньсэргоын котькуд пуш кык сэрег’ёслэн суммазы кык шонер сэрег’ёслэсь кулэс (ичи).**

Сётэмын: $ABC\triangle$-ын (78 сур.) *1, 2* но *3* сэрег’ёс.
Зэме поттыны кулэ: $A\angle + B\angle < 2d$-лэсь, яке $A\angle + C\angle < 2d$-лэсь, яке $B\angle + C\angle < 2d$-лэсь.

Зэме поттон. *2* но *4* сэрег’ёслэн суммазы артэ сэрег’ёс луэмен, $2d$-лы ӵоша ($2\angle + 4\angle 2d$), соку дыр’я $4\angle > 1\angle$ но $4\angle > 3\angle$.



77 сур.



78 сур.

$4\angle + 2\angle = 2d$ ӵошанлэн паллян пал люкетысьтыз $4\angle$-эз быдӟалаэз’я пичи сэреген — *1* сэреген яке *3* сэреген воштӥд ке, соку суммаэз кулэсмоз но ӵошанэз куашкалоз, таӵе ӵошантэм’ёс потозы:

$$1\angle + 2\angle < 2d, \text{ яке } A\angle + B\angle < 2d$$
$$3\angle + 2\angle < 2d, \text{ яке } C\angle + B\angle < 2d.$$

Та амалэн ик $1\angle + 3\angle < 2d$ шуса но зэме поттӥське.

§ 2. Куиньсэрголэн дур’ёсыз но сэрег’ёсыз куспын герзаськемзы.

1. Одӥг куиньсэргоын ик огкадесь дур’ёслэн пумитазы ӵошасесь сэрег’ёс кыллё шуса, асьмеос тодӥськом ини.

$ABC\triangle$-ын дурез $AC = AB$ ке, соку со огкадь дуро; со куиньсэргоын ӵошасесь дур’ёслэн пумитазы ӵошасесь сэрег’ёс кыллё; солэн вань дур’ёсыз огкадесь, озьы бере солэн вань сэрег’ёссы ик ӵошасесь. Огкадь дуро куиньсэрго огдырен ик огкадь сэрго луэ.

2. Котькыӵе куиньсэргоын бадӟым дурезлэн пумитаз бадӟым сэрег кылле.

Сётэмын: $ABC\triangle$-ын $AC > CB$ (79 сур.).
Зэме поттоно: $B\angle > A\angle$.

Зэме поттон. Бадӟым AC дур вылаз CB-лы ӵошась CD вандэт интыалом но D точкаэз B йылэн огазеалом, огкадь дур’ем CBD куиньсэрго поттом, солэн дӥньёсаз сэрег’ёсыз ӵошасесь, $1\angle=2\angle$. Нош $1\angle$, ADB куиньсэрголэн педпал сэрегез луэмен, A сэреглэсь бадӟым, $1\angle > A\angle$; нош мукет ласянь $1\angle=2\angle$, соин ик $2\angle$ но $> A\angle$; нош $2\angle$ $ABC\angle$-лэн люкетэз гинэ луэ, озьы бере $ABC\angle$ уката ик A сэреглэсь бадӟым, $B\angle > A\angle$.

3. Сётэм теоремаослы берлань теоремаосыз эскером. Услови интыэ сётэм теоремалэн заключениез яке заключениезлэн люкетэз луэ ке, куд ке дур’я мызон люкет’ёсын ватсамын нош заключени интыын сётэм теоремалэн условиез яке солэн люкетэз луэ ке сыӵе теорема сётэм теоремалы берлань теорема шуса нимаське. Кылсярись:

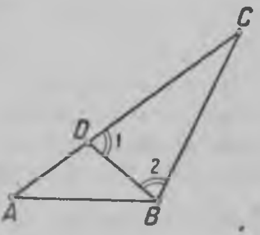
1) Котькыӵе куиньсэргоын ӵошась дур’ёслы пумит ӵошась сэрег’ёс кыллё.

Сётэмын: $AC=CB$; зэме поттыны кулэ: $B\angle=A\angle$.

2) Котькыӵе куиньсэргоын ӵошась сэрег’ёслы пумит ӵошась дур’ёс кыллё.

Сётэмын: $B\angle=A\angle$; $AC=CB$ шуса зэме поттыны кулэ.

Та сётэм теоремаос пöлысь кыкетӥез берлань теоремалы басьтӥське ке, соку нырысетӥ теорема, соиз теоремая, шонер теорема шуса нимаське.



79 сур.

Сётэм примерын кыкез ик теоремаос зэмесь. Нош со котьку ик озьы уг луы. Шонерез теорема зэме поттэмын ке, берлань теоремалэн зэмос луонэз сярись заключени лэсьтыны уг луы на али. Кылсярись, таӵе теорема зэм: „кык ваче пумит сылӥсь сэрег’ёс ӵошасесь“; нош со теоремалы берланез кык сэрег’ёс ӵошало ке, со сэрег’ёс ваче пумит кыллись“ шуон теорема котьку ик зэм уг луы.

4. ***Теорема (берланез).*** **Котькыӵе куиньсэргоын ӵошась сэрег’ёслы пумит ӵошась дур’ёс кыллё.**

Зэме поттон (пумито бордысь). $AC=BC$ шуса зэме поттыны кулэ. Талы пумит малпалом: AC BC-лы уг ӵоша шуса, BC-лэсь бадӟымгес шуом, $AC > BC$.

$AC > BC$ шуса малпамысьтымы куиньсэргоын бадӟым дурлы пумит бадӟым сэрег ик кылле бере, $B\angle > A\angle$ шуса потэ. Озьы ке но, потэм йылпум’янмы $A\angle=B\angle$ шуон теоремалэн условиезлы пумит луэ, соин ик $AC > BC$ шуэммы луонтэм; $AC < BC$ шуса малпам ке но, таӵе ик йылпум’янэ вуом.

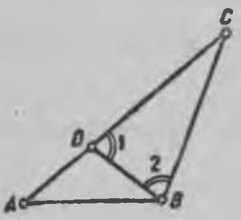
Озьыэн, $A\angle=B\angle$ ке, AC BC-лэсь бадӟым яке пичи луыны уг быгаты, нош AC-лэсь бадӟым но пичи луыны уг быгаты ке, соку AC BC-эн ӵашаны кулэ. Озьыэн $AC=BC$.

Берпум теоремаэз зэме поттон дыр’я теоремалы пумит карськон бордысен зэме поттон амалэз асьмеос кутйськом; со амал нош таӵе луэ: маэ ке зэме поттыны кулэ, солы ваче пумитсэ кутйськом но собере пöртэм визьнод'ёс вамен кылпум нуыса, асьмелэн малпаса лэсьтэммы зэм öвöл шуса йылпум'янэ вуиськом, мукет сямен, азьвыл кутэм теоремаослы со пумит луэ; соин сэрен малпаса гинэ басьтэммы шонертэменыз (кырыженыз) куштйське но, теоремаын сётэм заключенилэн зэмлыкез пуктйське.

5. ***Теорема (берланез).*** **Котькыӵе куиньсэргоын бадӟым сэреглы пумит бадӟым дур кылле.**

Сётэмын: $ABC\triangle$-ын $B\angle > A\angle$ (79 сур. bis).
Зэме поттыны кулэ: $AC > CB$.

Зэме поттон (пумито бордысь). $AC > CB$ шуса зэме поттыны кулэ. Талы пумит малпалом: AC дур CB-лэсь бадӟым öвöл шуса малпалом но соку кык учыр'ёсыз эскером: 1) $AC = CB$ яке 2) $AC < CB$.



79 bis.

$AC = CB$ шуэмысь, $B\angle = A\angle$ шуса потэ, нош та заключени теоремалэн условиэзлы пумитаське. Со условия $B\angle > A\angle$. Соин ик $AC = CB$ шуса лэсьтэм веранмы зэм öвöл; $AC < CB$ шуса мукет веранысь соку $A\angle$ но $> B\angle$ шуса потэ, со нош озьы ик теоремалэн условиэзлы пумитаське, малы ке шуоно, $B\angle > A\angle$. Соку $B\angle > A\angle$ ке AC но CB-лэсь бадӟым шуса йылпум'янэ вуиськом.

6. ***Следствиос.*** **1. Шонерсэрег'ем куиньсэргоын гипотенуза котькуд катетэзлэсь бадӟым.**

2. Мыркcэрег'ем куиньсэргоын мырк сэреглы пумит кыллись дур котькудйзлэсь бадӟымез луэ.

Юань'ёс но уж'ёс.

1. Кыӵе куиньсэргоын педпал сэрег соэн артэ луись пуш сэреглы ӵоша?
2. Шонерсэрг'ем куиньсэргоын котькуд катетэз малы гипотенузалэсь пичи? Кык катет'ёслэн суммазы малы гипотенузалэсь бадӟым? Та юан'ёслы веран понна кыӵе теоремаос уже кутэмын луыны кулэ?
3. ABC куиньсэргоын AB дурез $= 18$ *см*, $BC = 22$ *см* но $AC = 20$ *см*. Куиньсэрголэн сэрег'ёсыз пöлысь кыӵеэз котькудйзлэсь бадӟым, кыӵеэз пичи?
4. ABC куиньсэргоын $A\angle = 60°$, $B\angle = 80°$, но $C\angle = 40°$. Куиньсэрголэсь котькудйзлэсь бадӟымзэ но пичи дурзэ возьматоно.

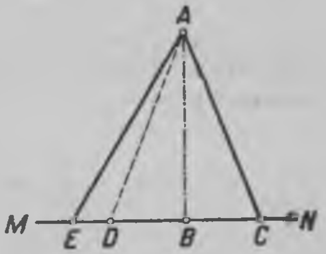
VI. ПЕРПЕНДИКУЛЯР НО НЯЛМЫТ ГОЖ'ЁС.

§ 1. Тoӵкалэн шонер гож вылэ проекциэз.

1. ***Теорема.*** **Шонер гожлэн палэнысьтыз точкаысен шонер гож бордэ одйг перпендикуляр гинэ ортчытыны луоз.**

Сётэмын: MN шонер гож но солэн палэназ A точка но $AB \perp MN$ (80 сур. .
Зэме поттыны кулэ: $AB - A$ точкаысь MN шонер гож вылэ ортчытэм одйг гинэ перпендикуляр луэ.

Зэме поттон (пумито бордысь). A точкаысь MN шонер гож бордэ, AB перпендикуляр сяна, нош ик мукет A перпендикуляр ортчытэмын шуса малпалом. Кык шонер сэреген $ABC \triangle$ поттом, нош озьы луыны уг быгаты, малы ке шуоно, куиньсэрголэн кык сэрегезлэн суммаэз котьку ик кык шонер сэреглэсь пичи луэ. Озьы бере, A точкаысь MN шонер гож бордэ AB перпендикуляр сяна мукет AC перпендикуляр ортчытыны луоз шуса лэземмы зэм уз луы. Соин ик, *шонер гожлэн палэназ луись A точкаысь со гож бордэ одиг перпендикуляр гинэ ортчытыны луоз.*



80 сур.

2. AB перпендикулярлэн B дӥнез *A точкалэн MN шонер гож вылэ проекциэз шуса нимаське. Шонер гож вылэ точкалэн проекциэз точка луэ.* B точка, AB перпендикулярлэн дӥнез, AB перпендикулярлэн одӥг A точкаэзлэн гинэ проекциэз уг луы — со, перепиндикуляр вылысь басьтэм котькуд точкаэзлэн но, отчы MN шонер гож вылын кыллись B точкаэз но пыртыса, проекциэз луэ.

§ 2. Перпендикуляр но нялмыт гож'ёс.

1. $AB \perp MN$ ке, соку AC, AD, AE шонер гож'ёс — нялмыт гож'ёс (80 сур.).

2. *Теорема.* **Сётэм шонер гож бордэ палэнысь точкаысь перпендикуляр но нялмыт гож ортчытӥд ке, со перпендикуляр котькыӵе нялмыт гожлэсь вакчи.**

Сётэмын: $\underline{AB \perp MN}$ но нялмыт гож — AC (80 сур.).

Зэме поттыны кулэ: $AB < AC$.

Зэме поттон. AB перпендикуляр но AC нялмыт гож шонер сэрег'ем ABC куиньсэрголэн дур'ёсыз луо: AB перпендикуляр — катет, AC нялмыт гож — гипотенуза. AC гипотенуза AB катетлэсь бадӟым, соин ик $AB < AC$.

Перпендикуляр — точкалэн шонер гож дорозь котькудӥзлэсь вакчи кусыпез.

Валэктон. Точкалэн шонер гож дорозь кусыпез шуса верало ке, соку котьку ик сётэм точкаысь сётэм шонер гож бордэ перпендикулярлэн кузьдалаэныз мертаськись котькудӥзлэсь вакчи ортчытэм кусыпез малпано луиськом, мукет сямен, пум'ёсыз сётэм точка но сётэм шонер вылэ солэн проекциэз луись, вандэт.

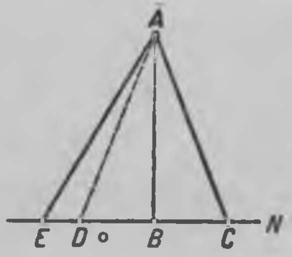
§ 3. Нялмыт гож'ёс но соослэн проекциоссы.

1. Пум'ёсыз AB перпендикулярлэн но AC нялмыт гожлэн B но C дӥньёсыз луись MN шонер гожлэн BC вандэтэз (80 а сур.) AC нялмыт гожлэн проекциэз шуса нимаське.

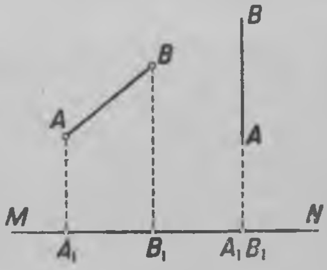
AB вандэт MN шонер гожез (80б сур.) уг вожвылты ке, сыӵе учыре MN шонер гож вылэ A_1B_1 вандэтэз солэн проекциез шуса нимало, солэн пум'ёсыз — A_1B вандэтлэн A но B пум'ёсызлэн проекциосыз луэ.

AB вандэт MN шонер гож бордэ перпендикулярной ке луэ, соку MN шонер гож вылэ солэн проекциез A^1 точка луэ, малы ке шуоно, AB вандэтлэн A но B пум'ёсызлэн A_1 но B_1 проекциосыз огзы вылэ огзы усё.

2. *Теорема.* 1) Одӥг педпал точкаысь ик шонер гож бордэ ортчытэм нялмыт гож'ёс, соослэн проекциоссы ӵошало ке, ӵошасесь луо.



80 а сур.



80 б сур.

2) Одӥг педпал точкаысь ик шонер гож бордэ ортчытэм кык нялмыт гож'ёс пӧлысь бадӟымез соиз луоз, кудӥзлэн ке со шонер гож вылэ проекциез бадӟым.

Зэме поттон. 1) ABC но ABD куиньсэргоос (80а сур.) — шонерсэрег'емесь, соослэн AB — оглом дурзы но условия $BC = BD$, озьы бере, соос ӵошасесь, соин ик $AC = AD$.

2) Условия $BE > BC$. B точка бордысен BE вандэт вылэ BC-лы ӵошась BD вандэт интыалом, D-эз A-эн огазеалом, AC-лы ӵошась AD нялмыт гож поттом. AED куиньсэргоэз эскером; солэн ADE сэрегез,— шонерсэрег'ем ABD куиньсэрголэн педпал сэрегез луэмен,— мырк. Озьы бере, $ADE\angle > AED\angle$, соин ик $AE > AD$, яке со ик $AE > AC$, малы ке шуоно, $AC = AD$.

3. *Теорема (берланез)* Одӥг педпал точкаысь ик шонер гож бордэ ортчытэм нялмыт гож'ёс ӵошасесь ке, со шонер гож вылэ ик соослэн проекциоссы ӵошасесь.

Сётэмын: $AB \perp MN$ но $AC = AD$ (80 а сур.).
Зэме поттыны кулэ: $BC = BD$.

Зэме поттон (пумито бордысь). $BC > BD$ шуса малпалом, соку AC но AD-лэсь бадӟым. Нош со условимылы пумит луэ, малы ке шуоно, $AC = AD$. Соин ик асьмелэн озьы шуэммы зэм ӧвӧл; $BC < BD$ шуса малпалом, соку AC но AD-лэсь бадӟым. Таиз но озьы ик условилы пумит луэ, малы ке шуоно, $AC = AD$. Соин ик асьмелэн шуэммы зэм ӧвӧл. Озьыен, BC BD-лэсь пичи но бадӟым но луыны уз быгаты, соин ик $BC = BD$.

4. *Теорема (берланез),* Одӥг педпал точкаысь ик шонер

гож бордэ ортчытэм кык ӵошасьтэм нялмыт гож'ёс пӧлысь — бадӟымез нялмыт гожлэн проекциэз но бадӟым.

Зэме поттон (пумито бордысь). BE (80 а сур.) BD-лэсь бадӟым ӧвӧл шуса малпалом, соку кык учыр'ёс луыны быгатозы: $BE = BD$ яке $BE < BD$. Нырисетӥ малпаммес басьтоно ке, соку $AE = AD$, со нош сётэм условилы пумит луэ, условимыя $AE > AD$, соин ик асьмелэн нырисетӥ малпаммы зэм ӧвӧл. Нош $BE < BD$ шуса малпам ке, соку $AE < AD$, со озьы ик условимылы пумит луэ. Озьы бере, та малпаммы но зэм ӧвӧл.

Озьыэн, BE BD-эн ӵошась луыны но BD-лэсь пичи луыны но уз быгаты. Соин ик BE BD-лэсь бадӟым гинэ луыны быгатоз, $BE > BD$, соэ ик зэме поттыны кулэ вал.

§ 4. Шонерсэрег'ем куиньсэргоослэн ӵошанзы.

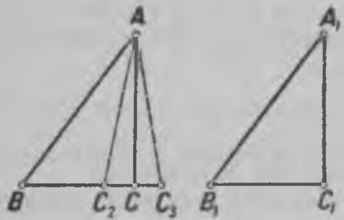
Шонерсэрег'ем куиньсэргооcлэн ӵошанзылэсь нош кык тодметсэс эскером.

1. *Теорема.* Одӥг куиньсэрголэн гипотенузаэз но йылсо сэрегез мукетэзлэн гипотенузаэныз но йылсо сэрегеныз ӵошало ке, шонер сэрег'ем куиньсэргоос ӵошасесь луо.

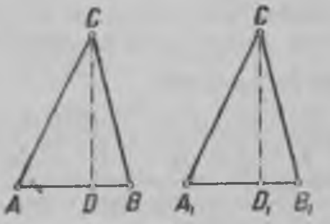
Сётэмын: $ABC \triangle$ но $A_1B_1C_1 \triangle$ 1) $A_1B_1 = AB$, 2) $B_1 \angle = B \angle$ (81 сур.)

Зэме поттыны кулэ: $A_1B_1C_1 \triangle = ABC \triangle$.

Зэме поттон. A_1B_1 но AB гипотенузаос огзы вылэ огзы мед усёзы шуса $A_1B_1C_1$ куиньсэргоэз ABC куиньсэрго вылэ поном, соку B но B_1 сэрег'ёслэн ӵошаменызы сэрен B_1C_1 дур BC дур вылэтӥ мыноз. Юано луэ: C_1 точка BC шонер гожлэн кыӵе точка вылаз усёз? Куинь учыр'ёс луыны быгатозы: C_1 точка C точкалэн паллян



81 сур.



82 сур.

палаз яке солэн бур палаз усёз яке соэн тупалоз. C_1 точка C точкалэн паллян палаз усиз шуса малпалом; соку A_1C_1 катет AC_2 кузя мынысал, со нош A точкаысь BC шонер гож бордэ кык перпендикуляр'ёс — AC но AC_2 ортчытэм луысал. Со нош луыны уз быгаты, малы ке шуоно, шонер гожлэн палэназ кыллись точкаысь со шонер гож вылэ одӥг перпендикуляр гинэ ортчытыны луэ. C_1 точка C точкалэн бур палаз усиз шуса малпам ке, асьмеос сыӵе ик заключениэ вуом. C_1 точка, асьмелэн оскеммыя, C точкалэн паллян палаз но бур палаз но усьыны уз быгаты, озьы бере, со точка со вылэ гинэ усьыны быгатоз. Озьыэн, $A_1B_1C_1$ куиньсэргоэз ABC куиньсэрго вылэ понон дыр'я, соэн тупалоз но, озьы бере, солы ӵошась луоз.

Следстви. **Ч̆ошась куиньсэргooслэн ӂуждалаоссы но ваче ч̆ошась луо.**

Сётэмын: $A_1B_1C_1 \triangle = ABC \triangle$; C_1D_1 но CD – сооcлэн ӂуждалаоссы (82 сур.).

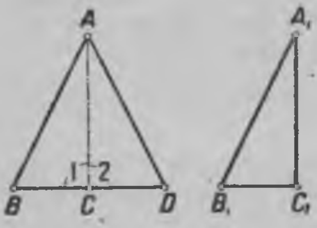
Зэме поттыны кулэ: $C_1D_1 = CD$.

Зэме поттон. $A_1C_1D_1$ но ACD куиньсэргoосыз эскером; та куиньсэргоос — шонерсэрег'емесь; сооcлэн $A_1C_1 = AC$ но $A_1 \angle = A \angle$ луэмен, соос огзылы огзы ч̆ошало; $A_1C_1D_1$ но ACD куинсэргооcлэн ч̆ошанысьтызы C_1D_1 но CD-лы ч̆оша шуса потэ, мукет сямен вераса, $A_1B_1C_1$ но ABC куиньсэргooслэн ӂуждалаоссы ч̆ошасесь.

2. *Теорема.* **Одйг куиньсэрголэн гипотенузаэз но катетэз мукет куиньсэрголэн гипотенузаэзлы но катетэзлы ваче ч̆ошало ке, шонерсэрег'ем куиньсэргоос ч̆ошало.**

Сётэмын: $A_1B_1C_1 \triangle$ но $ABC \triangle$; 1) $A_1B_1 = AB$ 2) $A_1C_1 = AC$ (83 сур.).

Зэме поттыны кулэ: $A_1B_1C_1 \triangle = ABC \triangle$.



83 сур.

Зэме поттон. Ч̆ошась A_1C_1 но AC катет'ёс мед тупалозы шуса $A_1B_1C_1$ куиньсэргоэз ABC куиньсэрго вöзэ пуктом. Кыч̆е ке но $ABCD$ фигура поттом. C точкаын луись *1* но *2* сэрег'ёсыз эскером. Та сэрег'ёс кыкез ик шонер сэрег луэмен, $1 \angle + 2 \angle = 2d$, озьы бере $BCD \angle$ — пазьгес (развернутый) сэрег луэ. Соин ик BC но CD одйг шонер гож луо. Потэм фигурамы — куиньсэрго шуса йылпум'яськом. Нош со куиньсэргоын $AB = AD$. Соин ик со огкадь урдэс'ем, солэн AC ӂуждалаэз соэ кык огкадесь куиньсэргоослы люке: $ABC \triangle = ACD \triangle$ озьы бере, $A_1B_1C_1 \triangle$ $ABC \triangle$-лы ч̆оша.

Юан'ёс но уж'ёс.

1. Огкадь урдэс'ем куиньсэрголэн дйнэз a сантиметрлы ч̆оша. Солэн урдэс дурезлэн проекциэз дйнез вылэ малы ч̆оша?

2. Шонерсэрег'ем куиньсэрголэн катет'ёсыз a сантиметрлы но b сантиметрлы ч̆ошало. Гипотенузалэн котькуд катет вылэ проекциоссы малы ч̆ошало?

Мырксэрег'ем куиньсэргоын мырк сэрег пöрмытйсь одйг дурез бордэ ӂуждала отчытоно.

4. Огшоры тус'ем ABC куиньсэргоын AD биссекриса ортч̆ытэмын AD бисcктрисалэн AB но AC дурёс вылэ проекциосыз ч̆ошало шуса зэме постоно.

5. AD — BAC сэрегдэн биссектрисаэз. Биссектриа вылысь басьтэм котькуд точка сэреглэн дур'ёсызлэсь огкадь кусыпын интыаськемын шуса зэме поттонно.

6. MN шонер гож но солэн палэназ A но B кыкточкаос сётэмын. MN шонер гож вылысь A но B точкаослэсь одйг кеме палэнтэм точкаэз шедьтоно.

VII. ВАЛЛИНЭСЬ ШОНЕР ГОЖ'ЁС.

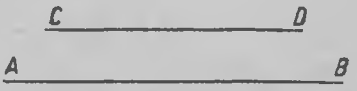
§ 1. Валлинэсь шонер гож'ёс.

1. Ч̆ошкес вылэ интыам кык AB но CD шонер гож'ёс огзыя огзы пöртэм интыаськем'ёс басьтыны быгатозы. Соос яке вожвылскыны быгатозы, яке огзы вылэ огзы усёзы, яке уз вожвылске.

1) Кык AB но CD шонер гож’ёс вожвылскон дыр’я сооcлэн одӥг оглом P точказы вожвылскон точказы луэ; со точка кыкезлэн ик шонер гож’ёслэн точказы луэ, мукет сямен котькуд шонер гож вылын луэ

2) Кык шонер гож’ёслэн оглом точказы одӥг ӧвӧл, кык луон дыр’я соос огзы вылэ огзы усё, малы ке шуоно, кык точкаос пыр одӥг шонер гож гинэ ортчытыны луэ. Соин ик одӥг шонер гожлэн котькуд точкаэз мукет шонер гожлэн точкаосыз пӧлысь одӥг точкаэз луэ.

3) Бератаз, одӥг чошкес вылэ интыам кык AB но CD шонер гож’ёслэн (84 сур.) одӥг но оглом точказы ӧвӧл дыр’я мукет сямен котькӧня асьмеос соосыз мыд-мыд палэ мед кузятом но, соос уг но вожвылско огзы вылэ огзы уг но усё. Сыче шонер гож’ёс валлинэсь шуса нимасько.



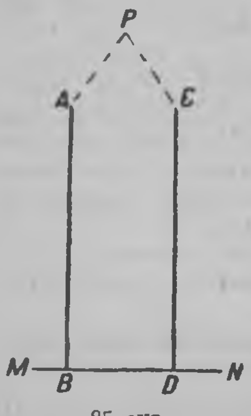
84 сур.

Одиг чошкес вылэ интыан но мыд-мыд палэ кузятон дыр’язы вожвылскисьтэм шонер гож’ёс валлинэсь шуса нимасько.

Шонер гож’ёслэсь валлинэсь луэмзэс пус’ён понна || пус кутӥське, $AB \parallel CD$ шуса гожтэм тазьы лыдзӥське: AB шонер гож CD шонер гожлы валлин луэ.

2. Валлинэсь шонер гож’ёслэсь ваньзэс асьмеос асьме котырысь арбериосыз нуналысь нуналэ чакласа, эскерыса оскиськом. Озьы ке но, валлинэсь шонер’ёслэсь ваньзэс теориэн но зэме поттыны луоно.

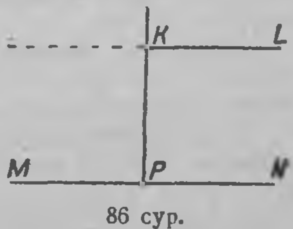
***Теорема.* Одӥг куинетӥ шонер гожлы перпендикулярной луись кык шонер гож‘ёс уг вожвылско ке,— соос валлинэсь луо.**



85 сур.

Сётэмын: $AB \perp MN$, $СД \perp MN$ (85 сур.).
Зэмэ поттыны кулэ: $AB \parallel CD$.

Зэме поттон (пумито бордысь). MN шонер гожлы перпендикулярной луись AB но CD шонер гож‘ёс кузёмытон дыр’я. кыче ке но P точкаын вожвылскозы шуом. Соку P точкаысь MN шонер гож бордэ кык AB но CD перпендикуляр’ёс ортчытэмын, нош озьы луыны уг быгаты. Малы ке шуоно, одӥг точкаысен шонер гож бордэ одӥг гинэ перпендикуляр ортчытыны луэ. Озьы бере, AB но CD гож’ёс вожвылскозы шуса малпаммы зэм ӧвӧл. MN шонер гожлы перпендикулярной луись AB но CD шонер гож’ёс вожвылскыны уз быгатэ, озьы бере, соос валлинэсь. Озьыен $AB \parallel CD$.



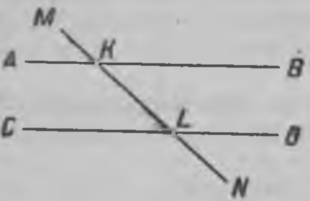
86 сур.

Задача. MN шонер гож но солы палэнын K точка сётэмын 86 сур). K точка пыр MN шонер гожлы валлин луись шонер (гож ортчытоно.

Лэсьтонэз. Сётэм K точка пыр MN шонер гож бордэ KP перпендикуляр ортчытіськом, нош собере — K точкаысь KP шонер гож бордэ KL перпендикуляр. KL — утчано шонер гожмы. Зэмзэ ик, кык $KL \parallel MN$ шонер гож'ёс, малы ке шуид KL но MN — KP шонер гожлы валлинэсь шонер гож'ёс.

§ 2. Валлинэсьёс сярись аксиома.

1. MN шонер гожлэн палэназ сётэм K точка пыр со шонер гожлы валлин гож ортчытыны луэ шуса асьмеос оским ини. Озьы ортчытэм KL шонер гож K точка пыр ортчись но MN шонер гожлы валлин луись одӥг гинэ шонер гож луоз шуса зэме поттыны кулэ на вал. Озьы ке но, сыӵе югдурез зэме поттыны уг луы, соэ аксиома шуса кутыны кулэ. Асьме эралэн кутскемезлэсь кема азьвыл вашкала грек геометр'ёсын та уж лэсьтэмын вылэм. Озьы ке но, со положениэз зэме поттон бордын дуннеысь вань вапум'ёслэн но калык'ёслэн туж усто геометр'ёссы ужазы. Нош со ужанзы азинлыктэк кылиз. Кылем XIX дауре гинэ та югдурез зэме поттыны луымтэзэ зэматыны луиз, мукет сямен вераса, соэ геометрилэн основааз кутіськись кылем аксиомасоысьтыз логической следствиэз сямен поттыны уг луы. Сыӵе зэме поттонлэн малпанэз данлыко германской математиклы Гаусслы (1777—1855) умой тодмо вал ини; нош зэмен та югдурез пыр-поч пумаз вуттытозяз кадь ик геометрио лэсьтоя 1829 аре ӟуч геометр Лобачевский Н. И. (1793—1856) сётіз но собере 1832 аре — венгерской математик И. Больай (1802—1860) сётіз. Соос бере уно геометр'ёс та зэме поттонэз пумозяз вуттізы на, та югдурез Евклид аксиома интыэ кутыса солэсь шонер вылэмзэ али дыр'я туж тодмо ини: солэн зэмлыкез котырысь луон'ёсысь асьмелэн чаклам'ёсынымы, калыклэн даур'ёсын люкам опытэнызы зэме поттіське.



87 сур.

***Аксиома.* Ӵошкес вылысь шонер гожлэн палэназ луись сётэм точка пыр сётэм шонер гожлы валлин одӥг шонер гож гинэ ортчытыны луэ.**

2. *Следствиос. I.* **Шонер гож кык валлинэсь шонер гож'ёс пӧлысь одӥгзэ вожвылтэ ке, соку со мукетсэ но вожвылтоз.**

Сётэмын: $AB \parallel CD$; MN гож AB-эз K точкаын вожвылтэ (87 сур.).

Зэме поттыны кулэ: MN гож CD-эз вожвылтэ.

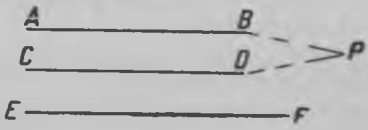
Зэме поттон (пумито бордысь). K точкаын AB-эз вожвылтісь MN шонер гож CD шонер гожен уг вожвылскы шуом. Со озьы ке, MN CD-лы валлин луыны кулэ, собере соку K точка пыр CD-лы валлинэсь AB во MN кык шонер гож'ёс ортчо, со нош валлинэсьёс сярись аксиомалы пумит луэ. Озьы бере K точка пыр AB шонер гож сяна но шонер гож ортчытӥське на, чылкак CD шонер гожез вожвылтӥсьтэм MN ортче, шуса малпаммы зэм уг луы. Озьыэн, MN шонер гож CD-лы валлин уг луы. Нош соку дыр'я со соэ вожвылтоно луэ.

2. Кык шонер гож'ёс нимазы куинетӥ шонер гожлы валлинэсь ке, соку соос асьсэ куспазы валлинэсь.

Сётэмын: $AB \parallel EF$ но $CD \parallel EF$ (88 сур.).

Зэме поттынэ кулэ: $AB \parallel CD$

Зэме поттон (пумито бордысь). AB но CD шонер гож'ёс валлинэсьтэм но кыӵе ке P точкаын вожвылско шуом. Таэ кутыса, P точка пыр куинетӥэзлы EF шонер гожлы валлинэсь кык пӧртэмесь AB но CD шонер гож'ёс ортчо шуса йылпум'янэ вуиськом. Со нош валлинэсьёс сярись аксиомалы пумит луэ. Озьы бере, малпаммы зэм ӧвӧл. Озьыэн, EF шонер гожлы валлинэсь луись AB но CD шонер гож'ёс вожвылскыны уз быгатэ; соос валлинэсь: $AB \parallel CD$.

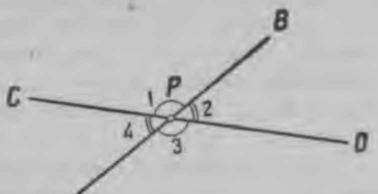


88 сур.

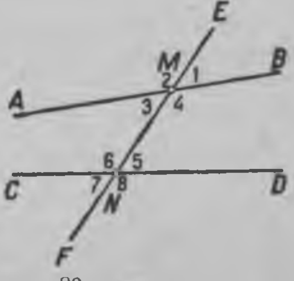
§ 3. Кык валлинэсьёсын но вамен вожвылтӥсен пӧрмытэм сэрег'ёс.

1. AB шонер гож (89 сур.) кыӵе но шонер гожез, кылсярись CD-эз, вожвылтэ ке, соку со 4 сэрег пӧрмытэ, соос пӧлысь кыкез йылсоэсь но кыкез мыркесь. Кыкез ик йылсо сэрег'ёс но кыкез ик мырк сэрег'ёс, ваче пумит интыаськем сэрег'ёс луэменызы, ваче ӵошасесь луо: $1\angle = 3\angle$ но $2\angle = 4\angle$.

Со сяна, йылсо сэрег'ёс пӧлысь котькудӥз, мырк сэрег'ёс пӧлысь котькудиныз артэ сэрг'ёс луэменызы суммаазы $2d$ сёто:



89 сур.



90 сур.

$$1\angle + 2\angle = 2d;\ 2\angle + 3\angle = 2d;\ 3\angle + 4\angle = 2d;\ 1\angle + 4\angle = 2d.$$

AB но CD вожвылскись шонер гож'ёс ваче перпендикулярноесь ке, соку соосын пӧрмытэм вань сэрег'ёс огзылы огзы ӵошало но соос пӧлысь котькудӥз сэрег — шонер.

2. EF шонер гож (90 сур.) одӥг гинэ ӧвӧл, AB но CD кык шонер гож'ёсыз вожвылтэ ке, соку EF-лэн AB но CD шонер гож'-

ёсын вожвылскон точкаосаз тямыс сэрег потэ: ньылез M точкаын AB шонер гожен вожвылсконаз одӥг йылэн, нош ньылез N-лэн CD шонер гожен вожвылскон точкааз одӥг йылэн. AB но CD шонер гож'ёсыз вожвылтӥсь EF шонер гож вожвылтӥсь шуса нимаське. Одӥгез M точкаын луись, мукетэз нош N точкаын луись нимаз кузо сэрег'ёсыз тодон понна, вожвылтӥсь гож'я сэрег'ёслэн интыаськемзыя соос пӧртэм ним'ёс куто.

1) $3\angle$ но $6\angle$, $4\angle$ но $5\angle$ пушпал огдур'ем сэрег'ёс шуса нимасько.

2) $1\angle$ но $8\angle$, $2\angle$ но $7\angle$ педпал огдур'ем сэрег'ёс шуса нимасько.

3) $3\angle$ но $5\angle$, $4\angle$ но $6\angle$ пушпал кечат кыллись сэрег'ёс шуса нимасько.

4) $1\angle$ но $7\angle$, $2\angle$ но $8\angle$ педпал кечат кыллись сэрег'ёс шуса нимасько.

5) $1\angle$ но $5\angle$, $2\angle$ но $6\angle$, $3\angle$ но$7\angle$, $4\angle$ но $8\angle$ тупасесь сэрег'ёс шуса нимасько.

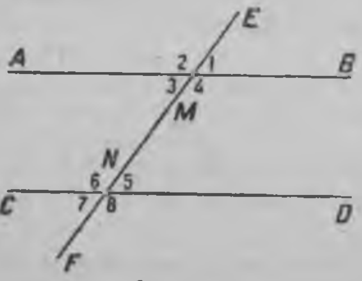
3. Кыӵе ке возьматэм куз сэрег'ёс кусыпын определённой герӟаськонысь котькуд мызон куз сэрег'ёс кусыпын определённой герӟаськон потэ.

Теорема. **Кык шонер гож'ёсыз куинетӥ шонер гожен вожвылтон дыр'я тупаса интыаськем сэрег'ёс ӵошало ке, соку: 1) пушпал кечат кыллись серег'ёс кусыпазы ӵошало, 2) педпал кечат киллись сэрег'ёс ӵошало, 3) пушпал огдур'ем сэрег'ёс ватсасесь (пополнительны), 4) педпал огдур'ем сэрег'ёс ватсасесь, мукет сямен, суммааз 2 *d* сёто.**

Сётэмын: AB но CD шонер гож'ёс но EF вожвылтӥсь; $1\angle=5\angle$ (91 сур)

Зэме поттыны кулэ:
1) $3\angle=5\angle$ но $4\angle=6\angle$
2) $1\angle=7\angle$ но $2\angle=8\angle$;
3) $4\angle+5\angle=2d$ яке $5\angle+6\angle=2d$;
4) $1\angle+8\angle=2d$ но $2\angle+7\angle=2d$;

Зэме поттон: а) Условия $1\angle=5\angle$, $1\angle=3\angle$ ваче пумит кыллеменызы, озьы бере, $3\angle=5\angle$, малы ке шуоно, кык быдзалаос, $3\angle$ но $5\angle$, куинетӥ быдӟалалы, мукет сямен $1\angle$-лы ӵошало бере, соос огзылы огзы ӵошало.



91 сур.

Озьыэн, тупаса интыаськись сэрег'ёс, $1\angle$ но $5\angle$ ӵошало ке, пушпал кечат кыллись сэрег'ёс но ӵошало: $3\angle=5\angle$. $1\angle=5\angle$ ке, $1\angle=7\angle$ шуса но озьы ик зэме поттӥське.

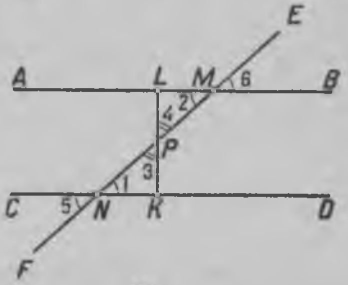
б) Условия $1\angle=5\angle$; $1\angle$ бордэ $4\angle$ огазеад ке но $5\angle$ бордэ $6\angle$ огазеад ке, артэ сэрег'ёс луэменызы $1\angle+4\angle=2d$ но $5\angle+6\angle=2d$. Озьыэн, котькудӥз ӵошась сэрег'ёс бордэ $1\angle$ бордэ но $5\angle$ бордэ быдэн одӥг сэрег будэтыса, асьмеос одӥг сумма ик, $2d$ басьтысалмы, со нош $4\angle = 6\angle$ дыр'я гинэ луоно, со ик пушпал кечат кыллись сэрег'ёс ӵошало шуса возьматэ. $1\angle = 5\angle$ ке, $2\angle = 8\angle$ шуса но озьы ик зэме поттӥське.

в) Условия $1\angle = 5\angle$-лы; $1\angle + 4\angle$, артэ сэрег'ёс луэменызы, $2d$=лы ӵошало. Берпум ӵошанысьтымы $1\angle$-эз солы ӵошась $5\angle$-эн воштыса, $5\angle + 4\angle = 2d$ шуса поттӥськом, мукет сямен вераса, пушпал огдур'ем сэрег'ёслэн суммазы $2d$-лы ӵоша. $1\angle = 5\angle$ ке, $3\angle + 6\angle = 2d$ шуса но озьы ик зэме поттӥське.

г) Условия $1\angle = 5\angle$; $5\angle + 8\angle$ артэ сэрег'ёс луэменызы $2d$-лы ӵошало. Берпум ӵошанысьтымы $5\angle$-эз солы ӵошась $1\angle$-эн воштыса, $1\angle + 8\angle = 2d$ шуса поттом, мукет сямен вераса, педпал огдур'ем сэрег'ёслэн суммазы $2d$-лы ӵоша. $1\angle = 5\angle$ ке, $2\angle + 7\angle = 2d$ шуса но озьы ик зэме поттӥське.

§ 4. Шонер гож'ёслэн валлинэсь луэмзылэн тодмет'ёссы.

1. Кык шонер гож'ёслэн валлинэсь луэмзылэн одӥг тодметэз таӵе луэ: одӥг шонер гожлы ик перпендикулярноесь луись кык пöртэм шонер гож'ёс валлинэсь луо. Кык шонер гож'ёс куинетӥэныз вожвылскон дыр'я пöрмем сэрег'ёслэн аслык'ёссы вылын мызон тодмет'ёсыз эскером.



92 сур.

***Теорема.* Куинетӥэныз шонер гожен вожвылтэм кык шонер гож'ёс валлинэсь луо: 1) пушпал кечат кыллись сэрег'ёссы ӵошало ке; 2) педпал кечат кыллись сэрег'ёссы ӵошало ке; 3) тупасесь сэрег'ёссы ӵошасесь ке; 4) пушпал огдур'ем сэрег'ёс тырмытӥсесь ке но 5) педпал огдур'ем сэрег'ёссы но — тырмытӥсесь ке, мукет сямен, суммазы $2d$ сёто.**

Та теоремалэсь нырисетӥ люкетсэ зэме поттом.

Сётэмын: AB но CD шонер гож'ёс но EF вамен вандӥсь гож $1\angle = 2\angle$ (92 сур.)

Зэме поттыны кулэ: $AB \parallel CD$.

Зэме поттон. EF вамен вандӥсь гож AB но CD шонер гож'ёсыз M но N точкасын вожвылтэ. MN вандэтэз шори люком но солэн P шор вадесэтӥз CD шонер гож бордэ PK перпендикуляр ортчытом но AB шонер гожен L точкааз вожвылскытозяз соэ кузёмытом. Кык куиньсэрго поттом: $PLM \triangle$ но $PKN \triangle$. Та куиньсэргоосын: 1) $PM = PN$—лэсьтэмзыя, 2) $1\angle = 2\angle$ условия, 3) $3\angle = 4\angle$ ваче пумит интыаськем сэрег'ёс луэменызы. Озьы бере $PLM \triangle = PKN \triangle$. Соослэн ӵошанысьтызы $K\angle = L\angle$ шуса потэ. Условия $K\angle = d$, малы ке шуоно, $PK \perp CD$, озьы бере $L\angle$ но $= d$ со нош $PL \perp AB$ луэ. Озьыэн AB но CD шонер гож'ёс одӥг KL шонер гожлы ик перпендикулярноесь. Озьы бере, соос валлинэсь, $AB \parallel CD$.

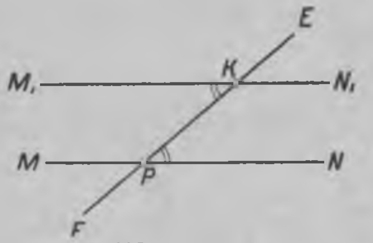
Педпал кечат кыллись сэрег’ёс ӵошасесь луон дыр’ялы, кылсярись $5\angle = 6\angle$ теоремаэз зэме поттон эскерем учырлы сётӥське.

$5\angle = 6\angle$ шуса сётэмын. Ваче пумит кыллись сэрег’ёс луэменызы $5\angle = 1\angle$ но $6\angle = 2\angle$, соку $1\angle = 2\angle$; нош соос — пушпал кечат кыллись сэрег’ёс но куспазы ӵошасесь, соин ик $AB \parallel CD$.

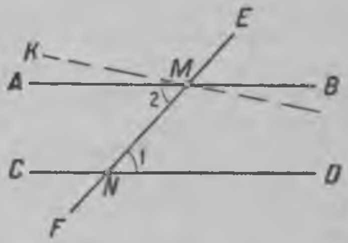
Ку ке тупаса интыам сэрег’ёс ӵошало шуса сётэмын ке, яке огпалдур’ем, пушпал яке педпал сэрег’ёс суммаазы $2d$ сёто шуса сётэмын ке, соку теоремаэз зэме поттон та выллем ик луэ.

Задача. *K точка пыр ортчись но сётэм MN шонер гожлы валлин луись шонер гож ортчытоно* (93 сур.).

Лэсьтонэз. MN шонер гож но солэн палэназ интыам K точка сётэмын. K точка пыр MN-лы мыл потэм’я EF вамен вандӥсь гож ортчытӥськом. Со MN шонер гожэн $KPN\angle$ пӧрмытоз. Собере K точкаын EF вамен вандӥсь гожлэн мызон пал дураз $M_1KP\angle = KPN\angle$ лэсьтӥськом. Соку со сэреглэн M_1K дурез MN гожлы валлин луись утчано шонер гожмы луоз, $M_1K \parallel MN$. Зэмзэ ик, лэсьтэм’я $M_1KP\angle = KPN\angle$, нош соос—пуш пал кечат кыллись сэрег’ёс. Озьы бере, $M_1N_1 \parallel MN$.



93 сур.



94 сур.

2. *Теорема* (берланез). **Кык валлинэсь шонер гож‘ёс куинетӥэныз вожвылтэмын ке, соку 1) пушпал кечат кыллись сэрег‘ёс ӵошало, 2) педпал кечат кыллись сэрег‘ёс ӵошало, 3) тупаса интыаськем сэрег‘ёс ӵошало, 4) пушпал огдурем сэрег‘ёсыз — тырмытӥсесь, педпал но пушпал дур‘ем сэрег‘ёслэн суммазы $2d$-лы ӵоша.**

Теоремалэсь нырисетӥ люкетсэ зэме поттом.

Сётэмын: $AB \parallel CD$; EF вамен вандӥсь гож (94 сур.).

Зэме поттыны кулэ: $1\angle = 2\angle$

Зэме поттон (пумито бордысь). $1\angle$ $2\angle$-лы уг ӵоша но солэсь бадӟым шуса малпалом $1\angle > 2\angle$. M точка но EF вамен вандӥсь пож бордын $1\angle$-лы ӵошась $KMN\angle$ лэсьтӥськом. $KMN\angle = MND\angle$ ке, соку $KM \parallel CD$, собере M точка пыр CD-лы валлин луись кык KM но AB шонер гож’ёс ортчо; со нош валлинэсь гож’ёслэн аксиомазылы пумит луэ. Соин ик $1\angle = 2\angle$ шуса малпаммы зэм уг луы.

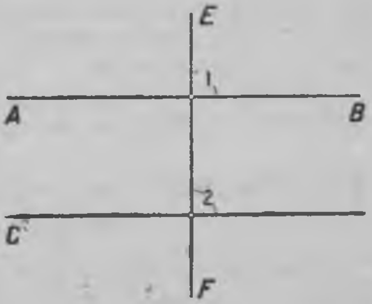
$1\angle < 2\angle$ шуса малпам ке, соку M точка но EF вамен вандӥсь гож бордын $1\angle$-лы ӵошась сэрег лэсьтыса, M точка пыр CD гожлы валлинэсь луись кык шонер гож’ёс ортчо шуса асьмеос нош ик йылпум’янэ вуом. Нош соэ, валлинэсь гож’ёс сярись аксиомалы пумиттаськеменыз, лэсьтыны уг луы. Озьыэн, $1\angle$ $2\angle$-лэсь пичи но бадӟым но луыны уг ке быгаты, соку $1\angle = 2\angle$. Со нош кык валлинэсь шонер гож’ёсыз куинетӥ шонер гожен вожвылтон дыр’я пöрмытэм пушпал кечат кыллись сэрег’ёс ӵошасесь шуэм луэ.

Теоремалэн мукет люкет’ёсызлэн зэмлыксы али зэме поттэмысь тодмо. Малы ке шуоно, пушпал кечет кыллись сэрег’ёс ӵошасесь луэменызы, педпал кечат кыллись сэрег’ёс, тупаса интыаськем сэрег’ёс ӵошасесь но пушпал но педпал огпалдур’ем сэрег’ёслэн суммазы $2d$ лы ӵоша.

3. *Следстви.* **Шонер гож кык валлинэсь шонер гож‘ёс пöлысь огезлы перпендикулярной ке, соку со кыкетӥэзлы но перпендикулярной луэ.**

Сётэмын: $AB \parallel CD$; $EF \perp AB$ (95 сур.).

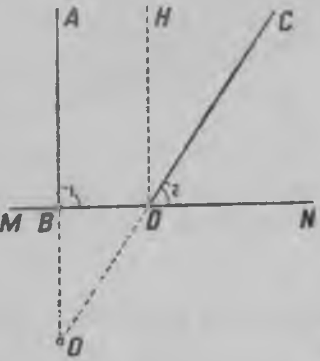
Зэме поттыны кулэ: $EF \perp CD$.



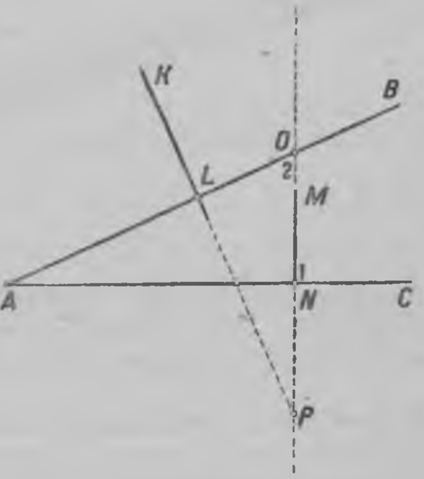
95 сур.

Зэме поттон $AB \parallel CD$ ке, соку 1 но 2 сэрег’ёс тупаса интыаськем сэрег’ёс луэменызы, ӵошасесь луо. Нош $1\angle = d$, озьы бере, $2\angle$ но $= d$, мукет сямен вераса, $EF \perp CD$.

4. **Одӥг со MN шонер гож бордэ ик ортчытэм AB перпендикуляр но CD нялмыт, гож вожвылско** (95 а сур.).



95 а сур.



95 б сур.

D точкаысь (95 а сур). MN шонер гож бордэ DN перпендикуляр ортчытом; AB-лы валлин (одӥг со ик куинетӥ шонер гож бордэ перпендикулярноесь кык шонер гож’ёслэн валлинэсь луэмзы сярись теоремая), D точка пыр AB-лы валлин луись одӥглэсь мултэс шонер гож лэзьыны уг луы бере, соку DC шонер гож AB-лы валлин уг луы, мукет сямен, соэ вожвылтэ.

5. **Кык вожвылскись AB но BC шонер гож‘ёс бордэ ортчытэм KL но MN перпендикуляр‘ёс вожвылско** (95 б сур.).

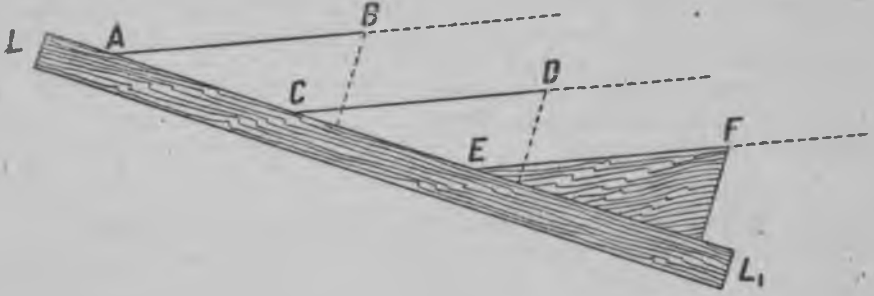
AB но *AC* шонер гож’ёс перпендикулярной луисьтэм учырез эскером. Зэмен ик, *AC* бордэ перпендикуляр но нялмыт гож кадь ортчытэм *MN* но *AB* вожвылско; *O* точка соослэн вожвылскемзы мед луоз. *AON* куиньсэргоэз эскером; отын $1\angle$ — педпал но шонер, $2\angle$ — пушпал но йылсо, соин ик $1\angle > 2\angle$; татысь потэ ини *AB* бордэ *MN* нялмыт луэмез.

Собере *AB* шонер гож бордэ ортчытэм *MN* нялмыт гожез но *KL* перпендикулярез эскерыса, одйг со *AB* шонер гож бордэ ик *KL* но *MN* перпендикуляр но нялмыт гож кадь вожвылско шуса йылпум’ яськом.

AB но *AC* шонер гож’ёс мырк но йылсо сэрег пӧрмытон учыр’ёсыз нимысьтыз эскероно.

§ 5. Линейкаэн но чертёжной куиньсэргоэн валлинэсь шонер гож‘ёсыз лэсьтон.

Тужгес огшоры амалэн валлинэсь шонер гож’ёс ортчытыны быгатон чертёжной уж’ёс быдэстон дыр’я бадӟым значени басьтэ. Сыӵе лэсьтон тужгес огшоры амалэн но чертёжной куиньсэргоэн быдэстӥське но кык валлинэсь шонер гож’ёсыз куинетӥэныз вожвылтон дыр’я пӧрмись тупаса интыаськись сэрег’ёслэн ӵошанзы бордэ пыкиське (96 сур.).



96 сур.

§ 6. Тупаса интыаськись валлинэсь дур‘ем сэрег‘ёслэн аслыксы.

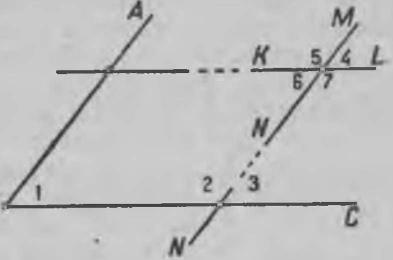
Теорема. **Валлинэсь дур‘ем сэрег‘ёс кыкез ик йылсоэсь яке кыкез ик мыркесь ке, соос яке ӵошало яке сэрег‘ёс пӧлысь одйгез йылсо, кыкетйэз — мырк ке, суммазы 2*d* луэ.**

Сёгэмын: $B\angle$ — йылсо; $MN \| AB$ но $KL \| BC$ (97 сур.).

Зэме поттыны кулэ: 1) $B\angle = 6\angle = 4\angle$;

2) $B\angle + 7\angle = 2d$; $B\angle + 5\angle = 2d$.

Зэме поттон. 1) *P* точкаысь сэреглэсь одйг пал дурзэ, кылсярись *MN* дурзэ шуом, *BC* дурен вожлылскытозь кузёмытом, соку $B\angle$ но $3\angle$, AB но MN валлин гож'ёс но BC вамен вандӥсь бордын тупаса интыаськем сэрег'ёс луэменызы, ӵошасесь луо. Нош $4\angle$ но $3\angle$ но BC но KL валлинэсь гож'ёс но MN вамен вандӥсь гож бордын тупаса интыаськем сэрег'ёс луэменызы, ӵошасесь луо. Озьыэн $B\angle$ но $4\angle$ нимазы $3\angle$-лы ӵошало, озьы бере, соос куспазы ӵошало: $B\angle = 4\angle$. Нош $4\angle$ но $6\angle$, ваче пумит интыаськем сэрег'ёс луэменызы, ӵошасесь луо. Озьы бере, $B\angle$ но $6\angle$-лы ӵоша. Озьыэн, $B\angle = 4\angle = 6\angle$; ваньмыз ик та сэрег'ёс йылсоэсь.



97 сур.

2) $4\angle + 7\angle = 2d$ артээсь луэмен, $4\angle = B\angle$ валлинэсь дур'ёсын йылсо сэрег'ёс луэмен. Нырисетӥ ӵошанын $4\angle$-ез солы ӵошась $B\angle$-ен воштыса, потэ: $B\angle + 7\angle = 2d$. Собере нош берпуметӥ ӵошанын $7\angle$-ез солы ӵошась $5\angle$-ен воштыса, потэ: $B\angle + 5\angle = 2d$.

§ 7. Куиньсэрголэн сэрег'ёсызлэн аслыксы.

Теорема. **Котькыӵе куиньсэрголэн пушпал сэрег'ёсызлэн суммазы $2d$-лы ӵоша.**

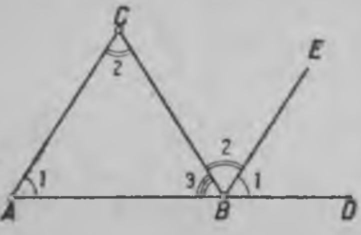
Сётэмын: $ABC\,\triangle$-ын A, B, C сэрег'ёс (98 сур.).

Зэме поттыны кулэ: $A\angle + B\angle + C\angle = 2d$.

Зэме поттон. ABC куиньсэрголэсь AB дурзэ кузёмытом но солэн B йылэз пыр AC-лы валлин луись BE шонер гож ортчытом.

B точкаын сэрег'ёслэн суммазы $2d$-лы ӵоша, мукет сямен вераса $1\angle + 2\angle + 3\angle = 2d$.

Соэн ӵош ик, лэсьтэм'я: 1) $1\angle = A\angle$-лы, тупаса интыаськись сэрег'ёс луэменызы, 2) $2\angle = C\angle$-лы кечат кыллись сэрег'ёс луэменызы, 3) $3\angle = B\angle$.



98 сур.

Нош $1\angle + 2\angle + 3\angle = 2d$, озьы бере, $A\angle + B\angle + C\angle$ но $= 2d$

Следствиос. **1. Куиньсэргоын шонер сэрег яке мырк сэрег одӥглэсь уно луыны уг быгаты.**

Зэмен но, куиньсэрголэн вань сэрег'ёсызлэн суммаэз $2d$-лы ӵоша сэрег'ёсыз пӧлысь одӥгез d-лы ӵоша ке яке d-лэсь бадӟым ке, соку кык кылемез сэрег'ёсызлэн суммаэз тупаса d-лы ӵошалоз яке d-лэсь пичи луоз, соин ик, кылем сэрег'ёсыз пӧлысь нимысьтыз сэрегез d-лэсь пичи луоз.

2. Шонерсэрег'ем куиньсэрголэн йылсо сэрег'ёсызлэн суммазы d-лы ӵоша.

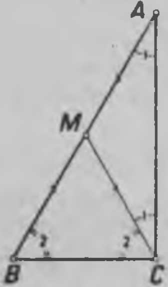
3. Одӥг куиньсэрголэн кык сэрег'ёсыз мызон куиньсэрголэн

кык сэрег‘ёсызлы ӵошало ке, соку со куиньсэрголэн куинетӥ сэрег‘ёссы но ваче ӵошало.

4. Куиньсэрголэн педпал сэрегез, соэн артэ луымтэ пуш сэрег‘ёслэн суммазылы ӵоша (98 сур.), соин артэ луисьтэм нимысьтыз пушпал сэреглэсь бадӟым.

5. Куиньсэрголэн педпал сэрег‘ёсызлэн суммазы $4d$-лы ӵоша

Зэмзэ ик, куиньсэрголэн котькуд йылысьтыз педпал но пушпал сэрег’ёслэн суммазы $2d$-лы ӵоша. Озьы бере, куиньсэрголэн вань педпал но, пушпал сэрег’ёсызлэн суммазы $6d$ луэ. Нош пуш сэрег’ёсызлэн гинэ суммазы $2d$-лы ӵоша бере, вань педпал сэрег’ёсызлэн суммазы $6d - 2d = 4d$ луоз.



98 а сур.

6. Огкадь дур’ем куиньсэрголэн нимысьтыз сэрегез 60°-лы, яке $\frac{2}{3}$ d-лы ӵоша

7. Шонерсэрег’ем куиньсэргоын 30°-ем сэрег вадесысь катет гипотенузалэн ӝыныэзлы ӵоша.

Зэмен ик, шонерсэрго ABC куиньсэргоын (98а сур.) A сэрег 30°-лы ӵоша, нош озьы бере B сэрег 60°-лы ӵоша. BA гипотенуза вылэ интыалом вандэт $BM = BC$ но C-эз M-эн огазеалом. Соку $MBC \triangle$ — огкадь урдэс’ем но $BMC \angle = BCM \angle = 60°$, соин ик, со огкадь дур’ем; мукет сямен, $BC = BM = MC$.

$ACM \angle = 90° - 60° = 30°$ но, озьы бере $CMA \triangle$ огкадь урдэс’ем, малы ке шуоно $ACM \angle = MAC \angle$; соин ик, $MC = MA$. Озьы дыр’я $BC = BM = MC = MA$ но $BC = \frac{1}{2} AB$.

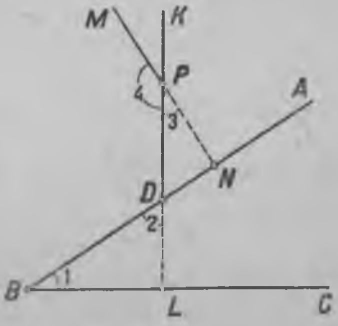
§ 8. Тупаса интыаськись перпендикуляриой дуро сэрег‘ёслэн аслыксы.

Теорема. **Тупаса интыаськись перпендикулярной дуро сэрег’ёс кыкез ик йылсоэсь яке мыркесь ке, соос яке ӵошало, яке, сэрег’ёс полысь огез йылсо, мукетэз — мырк ке, суммазы 2 d луэ.**

Сётэмын: $B \angle$ — йылсо; $MN \perp AB$ но $KL \perp BC$ (99 сур.).

Зэме поттыны кулэ: 1) $B \angle$ $3 \angle$-лы яке $MPK \angle$-лы ӵоша;

2) $B \angle + 4 \angle = 2d$ яке $B \angle + KPN \angle = 2d$



99 сур.

Зэме поттон. 1) BDL но PDN шонерсэрег’ем куиньсэргоосыз эскером. Соослэн $BDL \angle = PDN \angle$, соин ик $1 \angle = 3 \angle = MPK \angle$; озьыэн, та сэрег’ёс йылсоэсь но огкадесь.

P сэреглэн йылэз: 1) сётэм B сэреглэн пушказ, 2) солэн дур’ёсыз сётэм сэреглэсь кузёмытэмзэ вожвылтыса B сэреглэн педпалаз интыамын ке, сыӵе учыр’ёсыз ас понназы эскероно.

2) Йылсо $B\angle + 4\angle = 2d$ луэмзэ зэме поттон понна, P точкаысь 3 но 4 сэрег'ёсыз эскером. $3\angle + 4\angle = 2d$ нош $3\angle = B\angle$. Нырисетӥ ӵошанысь $3\angle$-эз солы ӵошась $B\angle$-эн воштыса, $B\angle + 4\angle = 2d$ шуса поттӥськом. Мукет сямен вераса, сётэм $B\angle$ но P точкаысь дур'ёсыз $B\angle$-лэн дур'ёсызлы перпендикулярной луись мырк сэрег суммаазы $2d$ сёто.

§ 9. Валлинэсь шонер гож'ёсын вожвылтэм валлинэсь шонер гож'ёслэн вандэт'ёссы лэнаслыксы.

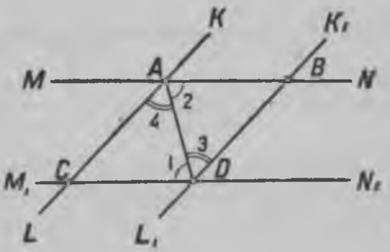
Теорема. **Валлинэсь шонер гож'ёсын вожвылтэм кык валлинэсь шонер гож'ёслэн вандэт'ёссы ӵошало.**

Сётэмын: $MN \parallel M_1N_1$ но $KL \parallel K_1L_1$ (100 сур.).

Зэме поттыны кулэ: $AB = CD$ но $AC = BD$.

Зэме поттон. A но D точкаосыз шонер гожен огазеалом но ABD но ACD куиньсэргоосыз эскером. Соос ӵошало, малы ке шуоно, соослэн: 1) AD — оглом дурзы, 2) $1\angle = 2\angle$, ваче кечат кыллись сэрег'ёс луэмен, 3) $3\angle = 4\angle$, ваче кечат сэрег'ёс луэмен.

Куиньсэргоослэн ӵошанысьтызы тупаса интыаськем дур'ёслэн ӵошанзы потэ, соин ик: 1) AB но CD дур'ёс, 3 но 4 ӵошась сэрег'ёслы пумит кыллись дур'ёс луэменызы, ӵошась луо но 2) AC но BD дур'ёс, 1 но 2 ӵошась сэрег'ёслы пумит кыллись дур'ёс луэменызы, ӵошасесь луо.



100 сур.

2. *Кык валлинэсь шонер гож'ёс пӧлысь одигезлэн кыче ке точкаысьтыз мукетэз гож вылэ ортчытэм перпендикулярлэн кузьдалаэз кык валлинэсь шонер гож'ёс вискысь кусыпез тодытэ.*

Следстви. **Валлинэсь шонер гож'ёс асьсэ кузёмытоназ огзы дорысь огзы одӥг кадь кусыпын луо.**

Сётэмын: $AB \parallel CD$ (101 сур.).

Зэме поттыны кулэ: $KL = MN$.

Зэме поттон. AB шонер гожлэн огшоры басьтэм K но M точкаосысьтыз CD шонер гож бордэ ортчытэм KL но MN перпендикуляр'ёс валлинэсь: $KL \parallel MN$. Нош $KL \parallel MN$ ке, соку соос AB но CD валлинэсь шонер гож'ёс вискысь валлинэсь вандэт'ёс луо но, озьы бере, ӵошало: $KL = MN$.

3. Вандэт шонер гожлы валлин ке, соку солэн со шонер гож вылэ проекциэз вандэтэн огкадь.

Зэмзэ ик, вандэт $KM \parallel CD$-лы ке (101 сур.), соку KM вандэт но солэн LN проекциэз валлинэсь шонер гож'ёсын вожвылтэм валлинэсь шонер гож'ёс кадь ӵошало.

4. ***Теорема.*** **Сэреглэн одӥг пал дураз солэн йыл бордысеныз ӵошасесь вандэт'ёс интыад ке но соослэн пумысенызы сэрег-**

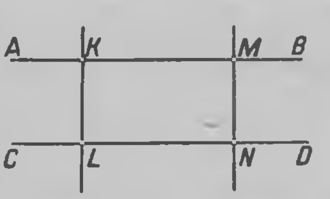
лэн мукет дуреныз вожвылскытозязы, валлинэсь шонер гож’ёс ортчытӥд ке, соку со дуре куспазы ӵошасесь вандэт’ёс пото.

ABC сэреглэн BA дур вылаз ӵошасесь вандэт’ёс интыалом, $BK = KM = MP$ (102 сур.), но K, M но P точкаос пыр валлинэсь шонер гож’ёс ортчытом: $KL \parallel MN \parallel PQ$.

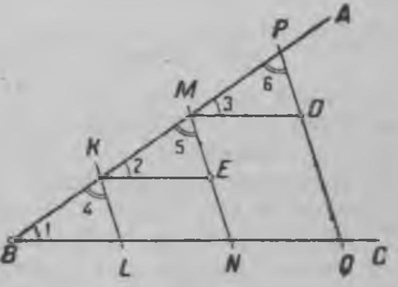
Сётэмын: $BK = KM = MP$; $KL \parallel MN \parallel PQ$

Зэме поттыны кулэ: $BL = LN = NQ$.

Зэме поттон. K но M точкаос пыр $KE \parallel BC$ но $MD \parallel BC$ шонер гож’ёс ортчытом но поттэм BKL, KME но MPD куиньсэргоосыз эскером. Соос дурез’я но кык бордаз кыллись сэрег’ёс’я ӵошало, малы ке шуоно, лэсьтэм’я $BK = KM = MP$, тупаса интыаськем сэрег’ёс луэмен, $1\angle = 2\angle = 3\angle$ но $4\angle = 5\angle = 6\angle$.



101 сур.

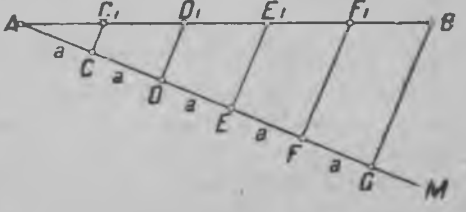


102 сур.

Куиньсэргоослэн ӵошанысьтызы ӵошась 4, 5 но 6 сэрег’ёслы пумит кыллись дур’ёслэн ӵошанзы потэ, соин ик $BL = KE = MD$. Нош 1) валлинэсь гож’ёс вискысь валлинэсь гож’ёслэн вандэт’ёссы луыса, $KE = LN$ но $MD = NQ$ луэмен но 2) зэме поттэм‘я $KE = MD = BL$ луэмен $LN = NQ = BL$.

§ 10. Вандэтэз ӵошасесь люкет‘ёслы люкылон.

Циркулен но линейкаэн асьмеос вандэтэз 2, 4, 8, 16 но мукет ӵошасесь люкет’ёслы люкыны быгатӥськом. Вандэтэз кӧня ке кулэ со, мында ӵошасесь люкет’ёслы, кылсярись 3, 4, 5, 6, 7, но мукет люкет’ёслы люконэз эскером.



103 сур.

Задача. *AB вандэтэз 5 огкадесь люкет‘ёслы люконо* (103 сур.).

Лэсьтонэз. AB вандэтлэн A пумез пыр кыӵе ке сэрег улсын солы юрттӥсь AM шонер гож ортчытом но A йылысеныз со вылэ кыӵе ке кузьдалао $AC = a$ вандэтэз 5 пол интыалом: $AC = CD = DE = EF = FG = a$. Берпум вандэтлэсь G пумзэ AB сётэм вандэтлэн B пуменыз огазеалом но C, D, E но F люкись точкаосыз пыр BG-лы валлинэсь шонер гож’ёс ортчытом. Соос AB вандэтэз куспазы ӵошасесь 5 люкет’ёслы люко: $AC_1 = C_1D_1 = D_1E_1 = E_1F_1 = F_1B$.

Лэсьтэмлэсь шонерлыксэ зэме поттонэз талэсь азьвыл мынӥсь теорема вылэ выжыамын.

Юан'ёс но уж'ёс

1. Ӵошкес вылэ сётэмын: $AB \perp MN$ но $CD \perp MN$ шуса гожтэм'я кыче йылпум'ян лэсьтыны луоз? Чертёж лэсьтоно.

2. $AB \perp KL$ но $AB \parallel CD$ шуса сётэмын. Одӥг ӵошкес вылын кыллись возьматэм шонер гож'ёслэн куспазы интыаськемзы сярись кыӵе йылпум'ян лэсьтыны луоз? Ответсэ чертёжен валэктоно.

3. 1) Сэрег'ёс пӧлысь одӥгез соэн артэ кыллись сэреглэсь куинь пол бадӟым ке; 2) сэрег'ёс пӧлысь одӥгез мукетэзлэсь сярись 22° 30'-лы пичи ке; 3) одӥгез сэрег мукет сэреглэн 0,8 люкетэз луэ ке; 4) кык артэ сэрег'ёслэн разностьсы 37° луэ ке, кык валлинэсь шонер гож'ёсыз вамен вандӥсь гожен вожвылтон дыр'я пӧрмытэм вань сэрег'ёслэсь быдӟалазэс лыд'яно.

4. $AB \parallel CD$ но EF вамен вандӥсь гож сётэмын. 1) AB но CD бордысь кык огкадесь сэрег'ёслэн биссектрисаоссы ва линэсь, 2) кык ӵошасьтэм сэрег'ёслэн биссектрисаоссы перпендикулярноесь шуса зэме ноттоно.

5. *Огкадь урдэс'ем шонерсэрег'ем куиньсэргоын h_c жуждалаэз гипотенузалэн жыныэзлы ӵоша шуса* зэме поттоно.

6. Шонерсэрег'ем куиньсэргоын солэн йылсо сэрег'ёсызлэсь биссектрисассэс ортчытоно но биссектрисаоссы кусыпысь сэрег 135°-лы ӵоша шуса зэме поттоно.

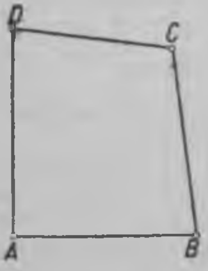
7. Куиньсэргоысь педпал но соэн артэ луись пушпал сэрег'ёс кусыпазы огзылы огзы 3:2, 4:5, 11:7, 5:13 кадь отношенио луо шуса тодмо ке, сооslэсь бадӟымлыксэс лыд'яно но кык мукет пуш сэрег'ёсызлэн суммазы малы ӵошамзэ гожтоно.

8. Куиньсэрголэн сэрег'ёсыз кусыпазы огзылы огзы 1:2:3 кадь отношенио луо шуса тодмо ке, сооslэсь быдӟалазэс лыд'яно. Куиньсэрголэн дур'ёсыз ваче кусыпазы 1:2:3 кадь отношенио луыны быгатозы-а, соэ возьматоно.

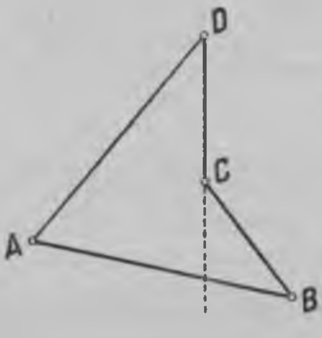
VIII. НЬЫЛЬСЭРГООС НО УНОСЭРГООС.

§ 1. Ньыльсэргоос.

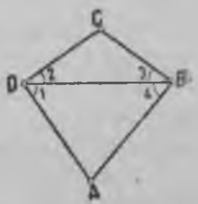
1. *Ныль вандэт'ёслэсь луись вистэм тиаськем гожен котыртэм ӵошкеслэн люкетэз ньыльсэрго луэ.*



104 сур.



105 сур.



106 сур.

Ньыльсэрголэн вань дур'ёсызлэн кузьдалаоссылэн суммазы ньыльсэрголэн периметрез шуса нимаське. Ньыльсэргоос поглес'ёсыз (104 но 106 сур.) но поглэстэм'ёсыз (105 сур.) луо.

Азьланьын асьмеос поглес'ёссэ гинэ ньыльсэргоосыз эскером.

Ньыльсэрголэн котькуд пуш сэрегез пазьгес сэрегезлэсь, мукет сямен вераса $2d$-лэсь пичи ке, сыӵе ньыльсэрго поглес ньыльсэрго шуса нимаське. Поглес ньыльсэрго котьку ик уносэрголэн куд ке но одӥг палаз интыамын луэ.

Ньыльсэрголэн нимысьтыз сэрегаз, куиньсэргоын кадь ик, кык педпал сэрег’ёс лэсьтыны луэ $DCF\angle$ но $BCE\angle$ (104 сур.), со сэрег’ёс ӵошасесь но, куиньсэргоын сямен ик, соос пӧлысь одӥгез гинэ лыдэ басьтӥське; соин сэрен ньыльсэрголэн педпал сэрегез ньыль гинэ шуса лыд‘яло, со нош ньыльсэрголэн йыл’ёсызлэн, дур’ёсызлэн но сэрег’ёсызлэн лыдзылы тупа.

2. *Теорема.* Ньыльсэрголэн пуш сэрег’ёсызлэн суммазы 36°-лы яке $4d$-лы ӵоша.

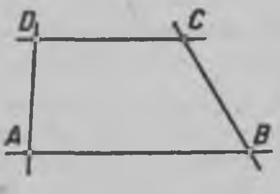
Сётэмын: $ABCD$ ньыльсэргоын A, B, C но D сэрег·ёс (106 сур.).

Зэме поттыны кулэ: $A\angle+B\angle+C\angle+D\angle=4d.$

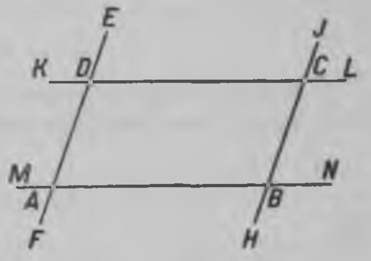
Зэме поттон. BD диагональ ортчытом. Со ньыльсэргоэз кык куиньсэргоослы люкоз. Котькуд куиньсэргоын пуш сэрег’ёслэн суммазы $2d$-лы ӵоша. Озьы бере, кыкез ик куинэсэргосын яке $ABCD$ ньыльсэргоын пуш сэрег’ёслэн суммазы $2d \cdot 2 = 4d$-лы ӵоша.

3: *Теорема.* Ньыльсэрголэн вочак ньыль педпал сэрег’ёсызлэн суммазы 360°-лы яке $4d$-лы ӵоша.

Зэм ик, ньыльсэрголэн котькуд йылаз интыаськем педпал но пушпал сэрег’ёсызлэн суммазы $2d$-лы ӵоша. Озьы бере, ньыльсэрголэн вань педпал но пушпал сэрег’ёсызлэн суммазы $8d$ луэ. Ньыльсэрголэн пуш сэрег’ёсызлэн суммазы нош $4d$-лы ӵоша, соин ик педпал сэрег’ёсызлэн суммазы $8d - 4d = 4d$-лы.



107 сур.



108 сур.

Котькыӵе ньыльсэрголэн педпал сэрег’ёсызлэн суммазы, солэн пушпал сэрег’ёсызлэн суммазы сямен ик, $4d$-лы ӵоша.

4. Ньыльсэргоос пӧлысь асьсэ тусэнызы ваче пумит кыллись дур’ёссылэн интыаськемзыя кык тус’ёс вис’ясько: трапеци но параллелограм.

Трапеци — ваче пумит кыллись дур’ёсыз валлинэсь луись ньыльсэрго.

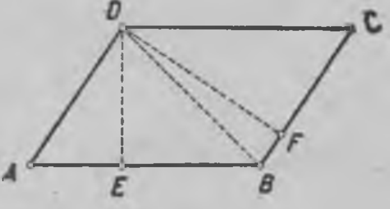
$ABCD$ ньыльсэрго — трапеци (107 сур.).

Параллелограм — ваче пумит кыллись дур’ёсыз кузэн-кузэн валлинэсь луись ньыльсэрго. Кыӵе ке кык KL но MN валлинэсь шонер гож’ёсыз кык мукет EF но IH валлинэсь шонер гож’ёсын вожвылтон дыр’я со потэ.

$ABCD$ ньыльсэрго — параллелограм (108 сур.).

§ 2. Параллелограм но солэн аслык'ёсыз.

1. Параллелограмлэн дйнез но ӂуждалаэз. Параллелограмлэн кыч̆е ке кык валлинэсь дур'ўсыз, кылсярись $ABCD$ параллелограмын AB но DC дур'ёсыз (109 сур.) солэн дйньёсыз луо, соос вискысь перпендикулярен мертаськись кусыпез параллелоргамлэн ӂуждалаэз шуса нимаськe. Ӂуждалаэз параллелограмлэн куд ке но одйг йылысеныз ортчыто: DE но DF — $ABCD$ параллелограмлэн кык пӧртэм ӂуждалаосыз.



109 сур.

2. Параллелограмлэн дур'ёсызлэн аслыксы.

***Теорема.* Параллелограмлэн ваче пумит кыллись дур'ёсыз кузэн-кузэн ч̆ошасесь луо**

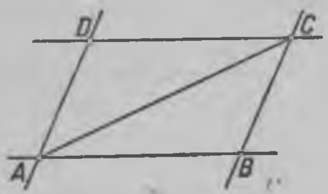
Сётэмын: $ABCD$ — параллелограм, $AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$.

Зэме поттыны кулэ: $AB = DC$, $AD = BC$.

Сётэм теоремалэн зэмлыкез тач̆е теоремаысь меч̆ак потэ: валлинэсь гож'ёс вискысь валлинэсь вандэт'ёс ч̆ошало.

3. Параллелограмлэн сэрег'ёсызлэн аслыксы.

***Теорема.* Параллелограмлэн ваче пумит кыллись сэрег'ёсыз ч̆ошало нош одйг дурез бордын кыллись сэрег'ёс суммаазы $2d$ сёто, мукет сямен вераса, соос — ватсась сэрег'ёс.**



110 сур.

Та теоремалэн зэмлыкез тупаса интыаськись валлин дуро сэрег'ёслэн аслык'ёссы сярись теоремаысь потэ.

***Следстви.* Параллелограмлэн сэрег'ёсыз пӧлысь одйгез шонер ке, соку солэн вань сэрег'ёсыз шонересь.**

Параллелограмлэн сэрег'ёсызлэн верам аслык'ёссыя, солэсь нимаз сэрег'ёсызлэсь быдз̆алазэс тодон понна одйг сэрегезлэсь быдз̆алазэ тодэм гинэ тырме.

4. Параллелограмлэн диагональёсызлэн аслыксы.

***Теорема.* Диагональ параллелограмез кык огкадесь куиньсэргоослы люке.**

Сётэмын: $ABCD$ — параллелограм; AC — диагональ (110 сур.).

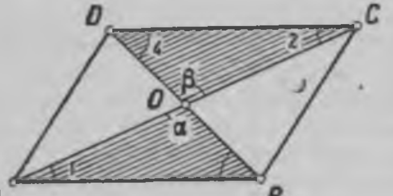
Зэме поттыны кулэ: $ABC \triangle = ACD \triangle$.

Зэме поттон. ABC но ACD куиньсэргоосын быдэн куинь тупаса интыаськем, ч̆ошась дур'ёссы: параллелограмлэн ваче пумит кыллись дур'ёсыз луэмен, $AB = DC$ но $AB = BC$, AC диагональ нош — соослэн ог'я дурзы, соин ик $ABC \triangle = ACD \triangle$.

***Теорема.* Параллелограмын диагональёс соослэн ваче вожвылскон точкаазы шори люкисько.**

Сётэмын: $ABCD$—параллелограм; AC но BD—диагональёс (111 сур.).
Зэме поттыны кулэ: $AO = OC$ но $BO = OD$.

Зэме поттон. AOB но DOC куиньсэргоосыз эскером; параллелограмлэн ваче пумит кыллись дур'ёсыз луэмен, $AB = DC$; пушпал кечат кыллись сэрег'ёс луэмен $1\angle = 2\angle$ но $3\angle = 4\angle$. Озьы бере, куиньсэргоос дурзыя но тупаса интыаськем ӵошась со бордын кыллись кык сэрег'ёссыя ӵошась луо $AOB\triangle = DOC\triangle$. Куиньсэргооcлэн ӵошанысьтызы тупаса интыам элемент'ёслэн ӵошанзы потэ. Соин ик AO но OC дур'ёс, огкадесь куиньсэргоосын ӵошась 3 но 4 сэрег'ёслы ваче пумит кыллись дур'ёс луэменызы, ӵошасесь луо. OD но BO дур'ёс — ӵошась 1 но 2 сэрег'ёслы ваче пумит кыллись дур'ёс луэменызы, ӵошасесь луо.



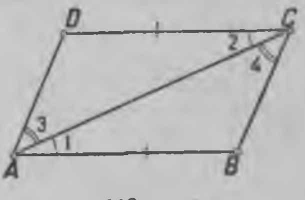
111 сур.

§ 3. Параллелограмез тодытӥсь тодмет'ёс.

1. *Теорема.* Ньыльсэргоын кык ваче пумит кыллись дур'ёсы ӵошало но валлинэсь ке, соку сыӵе ньыльсэрго параллелограм луэ, мукет сямен вераса, солэн кык мызон дурьёсыз но валлинэсь.

Сётэмын: $ABCD$ — ньыльсэрго; $AB = DC$ но $AB \parallel DC$ (112 сур.).
Зэме поттыны кулэ: $AD \parallel BC$.

Зэме поттон. AC диагональ ортчытом но ABC но ACD куиньсэргоосыз эскером. Та куиньсэргоосын: 1) AC — оглом дурзы 2) $AB = DC$ — условия; 3) $1\angle = 2\angle$, соин ик $ABC\triangle = ACD\triangle$. Куиньсэргоослэн ӵошанысьтызы $3\angle = 4\angle$ шуса потэ. Соос AD но BC шонер гож'ёслы но AC вамен вандӥсь гож бордысь кечат кыллись сэрег'ёс, соин ик $AD \parallel BC$.



112 сур.

2. *Теорема.* Ньыльсэргоын ваче пумит кыллись дур'ёс куз'яса ӵошало ке, соку сыӵе ньыльсэрго параллелограм луэ, мукет сямен вераса, солэн дур'ёсыз кузэн-кузэн валлинэсь.

Сётэмын: $ABCD$ — ньыльсэрго; $AB = DC$ но $AD = BC$(112 сур.).
Зэме поттыны кулэ: $AB \parallel DC$ но $AD \parallel BC$.

Зэме поттон. AC диагональ ортчытом но ABC но ACD куиньсэргоосыз эскером. Соос ӵошало: AC — сооcлэн ог'я дурзы, $AB = DC$ но $AD = BC$. Куиньсэргоослэн ӵошанысьтызы сооcлэн тупаса интыаськем сэрег'ёслэн ӵошанзы потэ, нимысьтыз вераса: $1\angle = 2\angle$, со сэрег'ёс пушпал кечат кыллись сэрег'ёс, соин ик $AB \parallel DC$. Со сяна, $3\angle = 4\angle$, соин ик $AD \parallel BC$

Озьыэн, $AD \parallel BC$ но $AB \parallel CD$, мукет сямен вераса, $ABCD$

ньыльсэрголэн ваче пумит кыллись дур'ёсыз кузэн-кузэн валлинэсь. Озьы бере, сыӵе ньыльсэрго — параллелограм.

3. *Теорема.* Ньыльсэргоын диагональёсыз ваче шори люкисько ке, соку сыӵе ньыльсэрго параллелограм луэ, мукет сямен вераса, солэн ваче пумит, кыллись дур'ёсыз кузэн-кузэн валлинэсь (111 сур.).

Сётэмын: $ABCD$ — ньыльсэрго; AC но BD—диагональёс; $AO = OC$ но $BO = OD$.
Зэме поттыны кулэ: $AD \parallel BC$ во $AB \parallel CD$, мукет сямен вераса $ABCD$ — параллелограм.

Зэме поттон. $AOB\triangle$ но $DOC\triangle$ эскерӧн, соосы диагональёслэн AO но OC, BO но OD вандэт'ёс но AB но DC дур'ёс пыро. Та куиньсэргоосын: $AO = OC$ но $BO = OD$ — условия но $\alpha\angle = \beta\angle$ ваче пумит кыллись сэрег'ёс луэмен. Озьы бере, $AOB\triangle = DOC\triangle$. Куиньсэргоослэн ӵошанысьтызы огкадесь дур'ёслы ваче пумит кыллись сэрег'ёслэн ӵошанзы потэ, нимысьтыз вераса: $1\angle = 2\angle$ но $3\angle = 4\angle$. Та сэрег'ёс кечат кыллисесь, соин ик $AB \parallel DC$. AOD но COB куиньсэргоосыз эскерыса, соос ӵошало но $AD \parallel CB$ шуса поттом.

Озьыэн, $AD \parallel BC$ но $AB \parallel CD$ — $ABCD$ ньыльсэрголэн ваче пумит кыллись дур'ёсыз — кузэн-кузэн валлинэсь, $ABCD$ — параллелограм.

Возьматэм тодмет — параллелограм лэсьтон дыр'я кутӥське, ку ке солэн кык m но n диагональёсыз но соос виске пыртэм $\alpha\angle$ сётэмын. Та аслыкез уже кутыса, валлин гож'ёсыз лэсьтытэк, циркулен но линейкаэн параллелограм лэсьто.

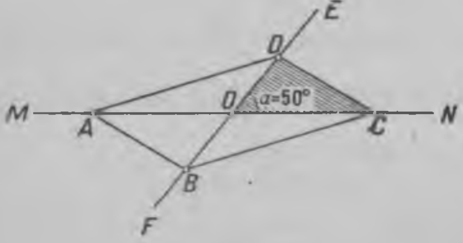
§ 4. Параллелограмез лэсьтон.

1. **1 задача.** *$m = 10$ см диагональя но $a = 6$ см но $b = 7$ см дур'ёс'я параллелограм лэсьтоно.*

Лэсьтонэз. a, b но m дур'ёс'я куиньсэрго лэсьтоно, собере нош соэ параллелограм дорозь ватсано.

2 задача. *$a = 5$ см, $b = 4$ см дур'ёс'я но $40° = C$ сэрег'я параллелограм лэсьтоно.*

Лэсьтонэз. Нырись a но b кык дур'ёс'я но сётэм дур'ёс кусыпысь C сэрег'я куиньсэрго лэсьтоно, собере нош куиньсэргоэз параллелограм луытозяз ватсано.



113 сур.

3 задача. *$m = 6$ см, $n = 10$ см диагональёс'я но соос кусыпысь $\alpha = 50°$ сэрег'я параллелограм лэсьтоно.*

Лэсьтонэз. 50° сэрег пӧрмытыса вожвылскись MN но EF кык шонер гож'ёс ортчытом (113 сур.) но соос вылэ котькудаз соослэн вожвылскем O точказылэн мыд-мыд палаз сётэм диагональёслэн ӝынызылы тупаса ӵошась вандэт'ёс интыалом, собере нош потэм вандэт'ёслэсь пумзэс огазеалом: $ABCD$ потэм ньыльсэрго — параллелограм.

4 задача. *m но n диогональёс'я но a дур'я параллелограм лэсьтоно.*

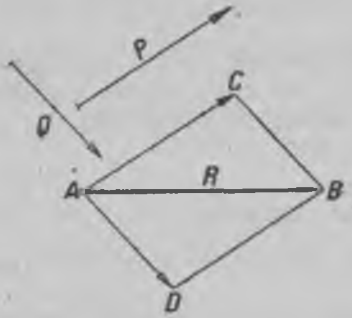
Лэсьтонэз. Задачалэн лыд'янэз $a, \frac{m}{2}, \frac{n}{2}$ (113 сур.) дур'ёс'я куиньсэрго лэсьтонэ вуэ.

$\frac{m}{2} - \frac{n}{2} < a < \frac{m}{2} + \frac{n}{2}$ задачаэз лыд'яны луоно.

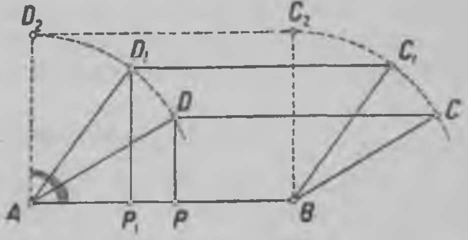
5 задача. *Параллелограм кузьдалаэз'я но кудланез'я сётэм R диагонаез'я но солэн P но Q дур'ёсызлэн сётэм кудланьёссыя парллеалограм лэсьтоно* (114 сур.).

Лэсьтонэз. Кузьдалаэз'я но кудланез'я сётэм $AB = R$ диагональлэн A пумаз дур'ёслэн сётэм кудланьзылы валлинэсь шонер гож'ёс ортчытӥськом. Собере диагональлэн мукет пал пумтӥз — B точкаэтӥ со кык кудланьёслы ик валлинэсь шонер гож'ёс ортчытӥськом.

2. Со — параллелограм'ёс лэсьтонлэн шор-сюлэм учыр'ёсыз. Параллелграмез одӥг диагонален яке кыкеныз ик диагональёсын люкись куиньсэргоос пӧлысь одӥгзэ лэсьтэмен, быдэс параллелограмез тодоно.



114 сур.



115 сур.

Татысен параллелограм'ёслэн ӵошанзылэн таӵеэсь тодмет'ёссы пото.

Параллелограм'ёслэн таӵе элемент'ёссы ӵошало ке, соос асьсэос но ӵошало:

1) кык артэ дур'ёс но соос кусыпысь сэрег;
2) кыкез ик диагональёс но соос кусыпысь сэрег;
3) кык артэ дур'ёс но диагональ;
4) кыкез ик диагональёс но дурез.

Параллелограмлэсь сэрег'ёссэ шедьтон понна, соос пӧлысь одӥгезлэсь гинэ бадӟымлыксэ тодэм кулэ шуса твдыса улыны кулэ.

3. Задача. Ӟирыо $ABCD$ параллелограмын (115 сур.) солэн сэрег'ёсыз пӧлысь одӥзэ, кылярись. A сэрегзэ вoштыса параллелограмлэн DP ӝуждалаэзлэсь но, солэн периметрезлэсь воштӥськемзэс эскероно.

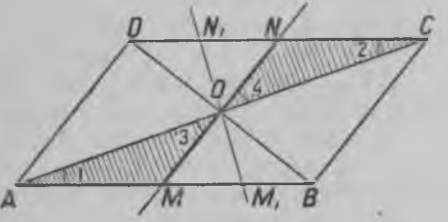
Эскерон. Параллелограмлэсь A сэрегзэ воштэм'я солэн DP ӝуждалаэз воштӥське, собере $A\angle 90^\circ$-озь будэ ке, со бадӟыма, $A\angle 0^\circ$ озь кулэсме ке, со ичиоме. $A = 0^\circ$ дыр'я параллелограм уг луы ни, солэн дур'ёсыз огзы вылэ огзы усё но параллелограм шонер гожлы пӧрме. Солэн кузьдалаэз параллелограмлэн кык артэ дур'ёсызлэн суммазылы ӵоша.

$A\angle = 90^\circ$ дыр'я параллелограмлэн вань сэрег'ёсыз шонересь луозы но DP ӝуждалаэз котькудӥзлэсь бадӟымез луоз. Параллелограмлэн периметрез нош котькудаз учыр'ёсын уг воштӥськы, мукет сямен вераса, вош‘яськытэк кыле.

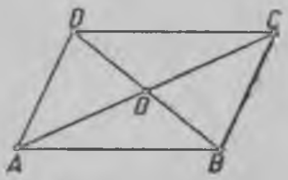
§ 5. Шоретӥ симметри.

1. $ABCD$ параллелограмын (116 сур.) солэн диагональёсызлэн вожвылскон O точказы пыр кыӵе ке шонер гож ортчытэмын. Со M но N точкаосын кык валлинэсь дур'ёссэ вожвылтэ. MN вандэтлэсь O точкаын шори люкиськемзэ зэме поттоно.

Зэмен но AOM но ONC куиньсэргоос ӵошало, малы ке шуоно $AO = OC$, $1\angle = 2\angle$, кечат кыллись сэрег'ёс луэмен, но $3\angle = 4\angle$ ваче пумит интыаськем сэрег'ёс луэмен: куиньсэргослэн ӵошанысьтызы $OM = ON$ шуса потэ.



116 сур.



117 сур.

Озьыэн параллелограмлэн дур'ёсыз виске интыам солэн диагональёсызлэн вожвылскон O точказы пыр ортчись котькыӵе вожвылтӥсь шонергожлэн вандэтэз со точкаын шори люкиське.

2. $ABCD$ параллелограмын (117 сур) солэсь AC но BD диагональёссэ ортчытом. Соос O точкаын вожвылско: 4 куиньсэрго поттом. Чертёжлэн ӵошкестӥз соос пӧлысь одӥгзэ кылсярись AOB куиньсэргоэз O точка котыр 180°-лы берыктом, соку B йыл D йылэн тупалоз ($OB = OD$) но A йылэз C йылэн тупалоз ($OA = OC$). AOB но COD куиньсэргоослэн вань куинь йыл'ёссы тупазы. Озьы бере, куиньсэргоос асьсэос но огзы вылэ огзы усёзы. Озьы ик BOC но DOA куиньсэргоосын но луэ, ABC но CDA куиньсэргоосын но озьы ик, $MBCN$ но $NDAM$ ньыльсэргоосын но (116 сур.).

3. A но C, B но D кык точкаос. AB но CD, BC но DA, AO но OC, OB но OD вандэт'ёс но $AOB\triangle$, но $COD\triangle$, $ABC\triangle$ но $CDA\triangle$ кык фигураос, O точка котыр 180° лы берыктон дыр'я (фигуралэн интыаськем ӵышкесаз) соос пӧлысь огез мукетэз

вылэ усе ке, O точка ласянь шоретӥ симметрио луо шуса иимасько.

Фигура сётэм O точка котыр 180°-лы берыктон дыр'я солэн котькуд люкетэз мукетэн азьло басьтылэм интыэз басьтӥз ке, со фигураосыз шоретӥ симметрио шуо. O точкаэз кудӥз ке котыр 180°-лы берытске, симметрилэн шорез шуо.

4. Диагональёслэн вожвылскон точкаазы луись симметрио центрен параллелограм шор симметрио фигура луэ.

5. Параллелограмлэн симметри черс'ёсыз ӧвӧл.

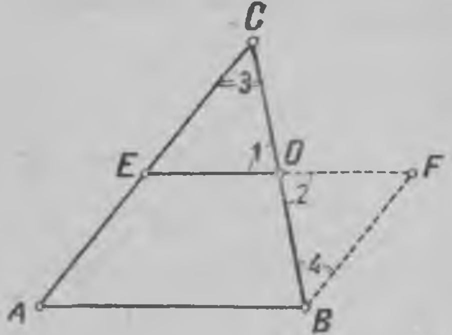
§ 6. Куиньсэрголэн шор гожез.

Вандэтлэн пум'ёсыз куиньсэрголэн кык дур'ёсызлэн шор вадессез луись вандэт куиньсэрголэн шор гожез шуса нимаське.

Теорема. **Куиньсэрголэн шор гожез куинетӥ дурезлы валлин но солэн ӝыныэзлы ӵоша.**

Сётэмын: ABC — куиньсэрго; $AE = EC$ но $BD = DC$ (118 сур.).

Зэме поттыны кулэ: $ED \parallel AB$ но $ED = \frac{1}{2} AB$.



118 сур.

Зэме поттон ED-лэн кузёмытэмаз ED-лы ӵошась DF вандэт интыалом но F точкаэз B точкаэн огазеалом. $CD = BD$, $ED = DF$ но $1\angle = 2\angle$ луэмен, $CED\triangle$-лы ӵошась $BDF\triangle$ поттом. Куиньсэргооснэн ӵошанысьтызы $3\angle = 4\angle$ шуса потэ. Соин ик $BF \parallel EC$ мукет сямен вераса, $BF \parallel AC$, со сяна, $BF = EC = AE$. Озьы бере $ABFE$ ньыльсэрго — параллелограм, малы ке шуоно, солэн BC но AEваче пумит кыллись дур'ёсыз ӵошало но валлинэсь. Озьы бере, $EF \parallel AB$ но $EF = AB$, нош $EF = ED + DF = 2\ ED = AB$, соин ик $ED = \frac{1}{2} AB$.

§ 7. Шонерсэрго. Солэн аслык'ёсыз.

1. KL но MN валлинэсь шонер гож'ёс ортчытӥд ке но соосыз шонер сэрег услын кык EF но HQ валлинэсь шонер гож'ёсын вожвылтӥд ке (119 сур.), соку валлинэсь шонер гож'ёс вискысь вандэт'ёс шонерсэрег'ем $ABCD$ параллелограм пӧрмытозы. Сыӵе параллелограм шонерсэрго шуса нимаське. Озьыэн,

шонесрэрег'ем параллелограм — шонерсэрго луэ.

Шонерсэрго со дыр'я ик параллелограм но луыса, параллелограмлэсь вань аслык'ёссэ кутэ.

Шонерсэргоын: 1) ваче пумит кыллись дур'ёсыз ӵошало; 2) ваче пумит кыллись сэрег'ёсыз ӵошало но котькудӥз сэрегез шонер сэрeглы ӵоша; 3) соэ диагональ кык огкадесь шонер-

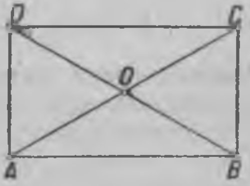
сэрег'ем куиньсэргооcлы люке; 4) иагональёсыз ваче шори люкисько; 5) солэн диагональёсызлэн вожвылскон точказы солэн шор симметриез луэ.

Шонерсэрголэн огпал дурез солэн дӥнез шуса нимаське: шонерсэрголэн дӥненыз артэ луись дурез солэн ӝуждалаэз шуса нимаське,

2. *Теорема.* Шонерсэрголэн диагональёсыз куспазы ӵошало.

Зэмепоттон. $ABD \triangle$ но $ACD \triangle$ (120 сур.) — шонерсэрег'емесь но тупаса ӵошась катет'ёс'я соос огкадесь: сооcлэн AD катетсы оглом но $AB = CD$ шонерсэрголэн ваче пумит дур'ёсыз луэмен. Куиньсэргооcлэн ӵошанысьтызы $AC = BD$ потэ, мукет сямен, шонерсэргооcлэн диагональёссы ӵошало.

119 сур.



120 сур.

Кырыжсэрго параллелограмын сэрег'ёсыз шонересь ӧвӧлэн со озьы уг луы; солэн диагональёсыз огкадесь ӧвӧл, йылсо сэрег'ёсызлэсь йыл'ёссэ огазеась диагональ мырк сэрег'ёслэсь йыл'ёссэ огазеась диагональ сярись бадӟым.

§ 8. Шонерсэргоэз лэсьтон.

Параллелограмез лэсьтон понна солэсь куинь элемент'ёссэ тодыны кулэ.

Шонерсэргоэз лэсьтон понна нош, кудӥз ке шонер сэрег'ёсын параллелограм луэ, солэсь кык гожо элемент'ёссэ гинэ тодыны кулэ. Шонерсэрго понна куинетӥ элементсэ — артэ дур'ёс вискысь сэрегзэ — возьматыны мултэс луэ, малы ке шуоно, шонерсэргоын вань сэрег'ёсыз шонересь.

Шонерсэргоэз лэсьтыны луоз, сётэмын ке:

1) a но b кык артэ дур'ёсыз, 2) m диагональ но дур'ёс пӧлысь одӥгез, 3) дур'ёсыз пӧлысь одӥгез, a яке b но диагонален но сётэм дурен пӧртымэм сэрег, 4) m диагональ но диагональёс вискысь α сэрег.

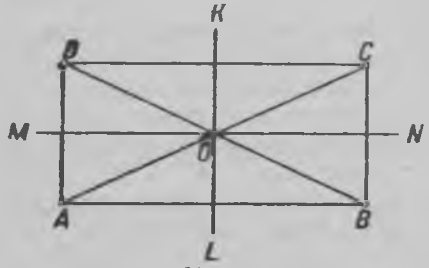
Задача. *$m = 8$ см диагональя солэн диагональёсыз вискысь $\alpha = 30°$ сэрег'я шонерсэрго лэсьтоно.*

Лэсьтонэз. Кык MN но KL шонер гож'ёсын 30° α сэрег лэсьтыса вожвылтом но сооcлэн вожвылскон O точкаысьтызы мыд-мыд палаз $\frac{m}{2} = \frac{8}{2} = 4$ *см* ӵошась вандэт'ёс интыалом, собере нош вандэт'ёслэсь пумзэс кусыпазы шонер гож'ёсын огазеалом.

Сыӵе лэсьтонэн потэм ньыльсэрго — шонерсэрго луэ.

§ 9. Шонерсэрголэн симметри черс'ёсыз.

ABCD шонерсэрголэн *AC* но *BD* диагональёсызлэн вожвылскон *O* точказы пыр солэн дур'ёсызлы перпендикуляро луись *KL* но *MN* гож'ёс ортчытӥд ке (121 сур.), собере нош *KL* яке *MN* шонер гож'я чертёжез куасалтӥд ке, соку чертёжлэн одӥг люкетэз чертёжлэн мызон пал люкетэз вылэ усёз, соин ик:



121 сур.

1) Шонерсэрголэн дур'ёсызлы перпендикулярной луись но диагональёслэн вожвылскон точкаэтизы ортчись KL но MN шонер гож'ёс солэн симметри черс'ёсыз луо.

2) Шонерсэрголэн кык симметри черсэз луэ.

Шонерсэрголэн симметри черсэзлэн аслыкысьтыз со черс шонерсэрголэсь ваче пумит кыллись дур'ёссэ шори люке шуса потэ. Шонероэрголэн ваче пумит кыллись дур'ёсызлэсь шор вадес'ёссэ огазеась вандэт, солэн **ш о р г о ж е з** шуса нимаське со шонерсэрголэн солы валлин луись дурезлы ӵоша.

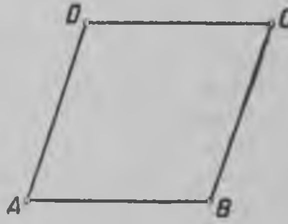
§ 10. Ромб. Солэн аслык'ёсыз.

1. Вань дур'ёсыз огкадь луись параллелограм ромб шуса нимаське. **Ромб огкадь дур'ем параллелограм луэ.**

Ромбез тодытонысь потэ (122 сур.):

1) $AB \parallel CD$ но $AD \parallel BC$;

2) $AB = BC = CD = AD$.



122 сур.

2. Ромблэн аслык'ёсыз. Ромб огкадь дур'ем параллегограм луыса, солэсь вань аслык'ёссэ кутэ.

Ромбын: 1) ваче пумит кыллись сэрег'ёсыз ӵошало, соку соос кыкез ик йылсоэсь яке кыкез ик мыркесь луо; 2) котькудӥз ик дурез вӧзысь сэрег'ёсыз тырмытӥсь сэрег'ёс луо, мукет сямен вераса, суммазы $2d$ **луэ; 3) диагональ ромбез кык огкадесь люкет'ёслы, соэн ӵош огкадь урдэс'ем куиньсэргоослы люке; 4) диагональёс огзэс огзы ваче шори люко; 5) солэн диагональёсызлэн вожвылскон точказы солэн симметриэзлэн шорез луэ.**

3. *Теорема.* **Ромблэн диагональёсыз: 1) ваче перпендикулярноесь; 2) солэсь сэрег'ёссэ шори люко; 3) солэн симметри черс'ёсыз луо; 4) соэ 4 огкадесь шонерсэрег'ем куиньсэргоослы люко.**

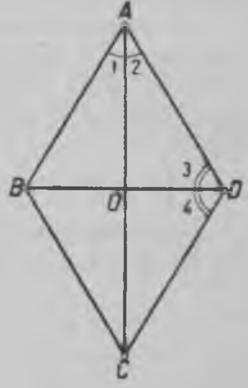
Сётэмын: *ABCD* — ромб; *AC* но *BD* — солэн диагональёсыз (123 сур.).

Зэме поттыны кулэ: 1) $AC \perp BD$; 2) $1\angle = 2\angle$; $3\angle = 4\angle$.

3) *AC* но *BD* — симметрилэн черс'ёсыз.

4) $AOB\triangle = BOC\triangle = COD\triangle = DOA\triangle$.

Зэме поттон. ABD куиньсэргоэз эскером.— Со огкадь урдэс'ем: $AB = AD$ условия. Ромблэн та куиньвсэргоын BD дурезлэн шор вадесэтӥз ортчись AC диагоналез ADB куиньсэрголэн медианаэз, $A\angle$-лэн биссектрисаэз, куиньсэрголэн ӝуждалаэз но солэн симметри черсез луэ но $ABD\,\triangle$-эз кык огкадесь шонерсэрег'ем — AOB но AOD куиньсэргооslы люке шуса со бордысь потэ.



123 сур.

Озьыэн: 1) $AC \perp BD$; 2) $1\angle = 2\angle$; 3) AC — ромблэн симметирэзлэн черсэз; 4) $AOB\,\triangle = AOD\,\triangle$.

Огкадь урдэс'ем ADC куиньсэргоэз эскеремысь (со куиньсэргоын $AD = DC$ но DO AC дурлэн шор вадестӥз ортче) таӵе йылпум'яськом: 1) $OD \perp AC$; 2) $3\angle = 4\angle$; 3) DB — ромблэн симметриэзлэн черсэз; 4) $DOA\,\triangle = DOC\,\triangle$.

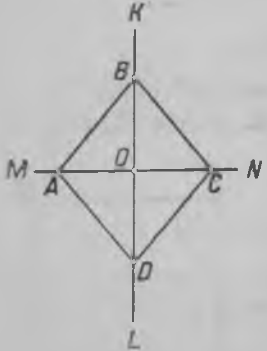
AOB но AOD, AOD но DOC, DOC но COB куиньсэргослэн ӵошанысьтызы $AOB\,\triangle = AOD\,\triangle = COD\,\triangle = BOC\,\triangle$ шуса потэ.

4. Ромбез лэсьтон дыр'я солэн диагоналёсызлэсь ваче шори люкиськон но огзылы огзы перпендикулярной луонаслыксы уже пыртӥське.

§ 11. Ромбез лэсьтон.

1. 1 задача. *а дурез'я но А сэрег'я ромб лэсьтоно.*

Лэсьтонэз. $A\angle$ лэсьтом но солэн йылысеныз дур'ёсаз интыалом огкадесь вандэт'ёс $AB = AD = a$. B но D пум'ёссэс огазеаса потэм $ABD\,\triangle$-эз ромб дорозь ватсалом.



124 сур.

2 задача. *т но п диагональёсыз'я ромб лэсьтоно.*

Лэсьтонэз. Огзылы огзы ваче перпендикулярноесь луись кык MN но KL шонер гож'ёс ортчытӥськом (124 сур.) но, сооcлэсь вожвылскон O точказэс ромблэн диагональёсызлэн вожвылскон точказы интыэ кутыса, шонер гож'ёс вылэ O точкаысен мыд-мыд палаз куз'яса куспазы ӵошасесь вандэт'ёс интыалом, со вандэт'ёс диагональёс пӧлысь котькудӥзлэн ӝыныэзлы ӵошало: $AO = OC = \frac{m}{2}$ но $OB = OD = \frac{n}{2}$; собере вандэт'ёслэсь пум'ёссэс огазеаськом: лэсьтэм $ABCD$ ньыльсэрго — ромб.

2. Ромбез лэсьтон понна солэсь кык элемент'ёссэ тодэм тырме: 1) дурзэ но сэрегзэ, 2) диагональёссэ кыксэ ик, 3) диагональзэ но дурзэ, 4) диагональзэ но сэрегзэ.

§ 12. Квадрат но солэн аслык‘ёсыз.

Кык артэ дур’ёсыз ӵошась шонерсэрго квадрат шуса нимаське (125 сур.).

Шонерсэргоын ваче пумит кыллись дур’ёсыз ӵошало; квадратын ваче пумит кыллись дур’ёсыз но артэ дур’ёсыз ӵошало:

$$AB = BC = CD = AD.$$

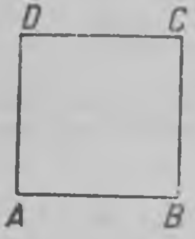
Озьы бере, квадрат огкадь дур‘ем шонерсорго луэ.

Сэрег’ёсыз пӧлысь одӥгез шонер ке, сыӵе ромб квадрат шуса нимаське (126 сур.).

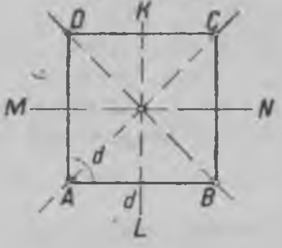
Ромбын ваче пумит кыллись сэрег’ёсыз ӵошало; квадратын ваче пумит кыллись сэрег‘ёсыз ӵошало но соэн ӵош ик шонересь.

$$A\angle = B\angle = C\angle = D\angle = d.$$

Озьы бере, квадрат огкадь сэрег’ем ромб луэ, мукет сямен вераса огкадь сэрег’ем ромб.



124 сур.



126 сур.

Квадрат шонерсэрголэсь но ромблэсь вань аслык’ёссэ кутэ.

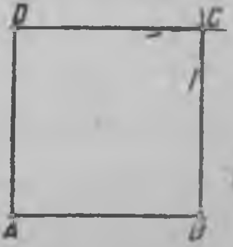
Квадратын (126 сур). **1) диагональёс огзэс огзы шори люко 2) диагональёсыз куспазы ӵошало, 3) шор гожез симметрилэн черсэз луэ 4) диагональёсыз ваче перпендикулярноесь, 5) диагональёсыз солэсь сэрег‘ёссэ шори люко, 6) диагональёсыз симметрилэн черсэз луо, 7) симметрилэн черсэз ньыль:** AC, BD, MN но KL.

§ 13. Квадратэз лэсьтон.

1 задача $a = 2{,}5$ *см дуро квадрат лэсьтоно* (127 сур.).

Лэсьтонэз. Шонер сэрег лэсьтӥськом но солэн йылысныз солэн дур’ёсыз вылэ $a = 2{,}5$ *см* вандэт’ёс интыаськом. Кыкезлэн ик вандэт’ёслэн пумысьтызы, озьы ик $a = 2{,}5$ *см* ӵошась радиусо букоос ортчытӥськом но букоослэсь вожвылскон точказс вандэт’ёслэн пуменызы огазеаськом. Лэсьтэм ньыльсэрго — квадрат луэ.

Квадратэз лэсьтон понна солэн дурезлэсь кузьдаллазэ тодэм гинэ тырме.



127 сур.

2 задача. *Солэн* $m = 6$ *см диагоналез‘я квадрат лэсьтоно.*

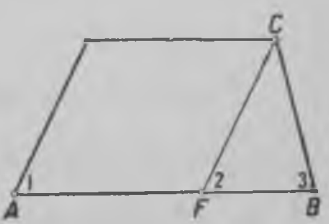
Лэсьтонэз. Шонер сэрег улсын вожвылскись MN но KL шонер гож’ёс ортчытӥськом но соослэн вожвылскон O точкаысенызы мыд-мыд пал дураз ик огкадесь вандэт’ёс $\frac{m}{2} = 3$ *см* интыаськом но вандэт’ёслэсь пумзэс куспазы огазеаськом. Потэм ньыльсэрго — квадрат.

Квадратэз лэсьтон понна солэн диагоналэзлэсь кузьдалазэ гинэ тодэм тырме

§ 14. Трапеци.

1. Кык ваче пумит кыллись дур'ёсыз валлинэсь луись $ABCD$ ньыльсэрго трапеци шуса нимаське.

2. Трапецилэн валлинэсь дур'ёсыз солэн дӥньёсыз шуса нимасько, нош кык мызон, AD но CB дур'ёсыз — трапецилэн урдэс дур'ёсыз.



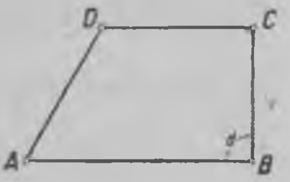
128 сур.

3. Урдэс дур'ёсыз ӵошасёсь трапеци огкадь дур'ем трапеци шуса нимаське (128 сур.): $AB \parallel DC$ но $AD = BC$.

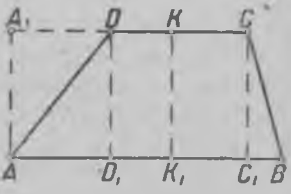
4. Сэрег'ёсыз пӧлысь одӥгез шонер луись трапеци шонер сэрег'ем шуса нимаське (129) сур.). Со трапецилэн $AB \parallel DC$ но $CB \perp AB$.

5. Трапецилэн дӥньёсыз вискысь котькудӥзлэсь вакчи кусыпез одӥг дӥнезлэн кыӵе ке точкаысьтыз мызоназ ортчытэм перпендикулярлэн кузьдалаэныз тодытӥське. Со перпендикуляр со дыр'я ик трапецилэн ӝуждалаэз но луэ (130 сур.). AA_1, DD_1, KK_1, CC_1 ӝуждалаос, валлинэсь гож'ёс куспысь валлинэсь вандэт'ёс луэменызы ӵошало:

$$AA_1 = DD_1 = KK_1 = CC_1.$$



129 сур.



130 сур.

§ 15. Огкадь урдэс'ем трапецилэн аслык'ёсыз.

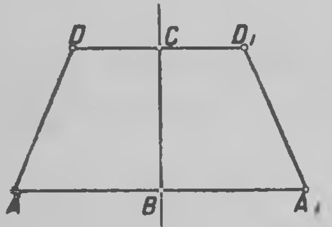
3. ***Теорема.*** **Огкадь урдэс'ем трапециын дӥньёсыз пӧлысь одӥгез вӧзысь сэрег'ёс ӵошало.**

Сётэмын: $ABCD$ — трапеци; $AD = BC$ (128 сур.).

Зэме поттыны кулэ: $A\angle = B\angle$ но $C\angle = D\angle$.

Зэме поттон. $CF \parallel AD$ ортчытӥськом. $CFB \triangle$ поттӥськом, $AD = CF = CB$ луэмен со огкадь урдэс'ем, озьы бере, $2\angle = 3\angle$ — огкадь урдэс'ем куиньсэрголэн дӥняз сэрег'ёс луэмен, нош AD но CF валлинэсь гож'ёсын тупаса интыаськемен $2\angle = 1\angle$, соин ик $1\angle = 3\angle$.

2. $CB \perp AB$ луись $ABCD$ шонерсэрег’ем трапециын CB-эз симметри черс интыэ кутӥд ке, но солы симетрио CBA_1D_1 трапеци лэсьтӥд ке, сыӵе лэсьтонэн потэм AA_1D_1D огкадь урдэс’ем трапеци луэ. Со трапециын B но C точкаосыз AA_1 но DD_1 диньёслэн шор вадес’ёссы. Со точкаосыз огазеась CB шонер гож огкадь урдэс’ем $AA_1\,D_1D$ трапецилэн симметри черсэз луэ (131 сур.).



131 сур.

Огкадь урдэс·ем трапецилэн одӥг симметри черсэз луэ. Симметрилэн черс трапецилэн диньёсызлэн шорвадесэтӥзы ортче но соослы перпендикулярной луэ, мукет кыл‘ёсын верася, огкадь урдэс‘ем трапецилэи валлинэсь дур‘ёсызлэн шор гожзы солэн симметри черсэз луэ

Мызон тус’ем трапециослэн симметри черссы уг луы.

§ 16. Трапецилэн урдэс дур’ёсызлэн шор гожзы.

1. *Пум‘ёсыз трапецилэн урдэс дур‘ёсызлэн шор вадес‘ёсыз луись вандэт, трапецилэн шор гожез луэ.*

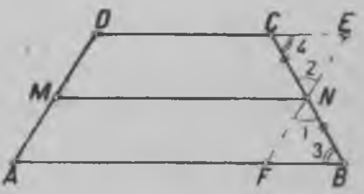
$ABCD$ трапециын (132 сур.) M точка — AD дурлэн шор вадесэз, N точка — BC дурлэн шор вадесэз; $AM = MD$ но $BN = NC$; MN — трапецилэн шор гожез.

2. ***Теорема.*** **Трапецилэн шор гожез солэн дӥньёсыслы валлин луэ но соослэн суммазылэн ӝынызылы ӵоша.**

Сётэмын: $ABCD$ — трапеци; M — шор гож (132 сур).

Зэме поттыны кулэ: 1) $MN \parallel AB \parallel DC$; 2) $MN = \frac{AB + DC}{2}$.

Зэме поттон. 1) DC дурзэ кузёмытом но CB-лэн шор вадестӥз, N точка пыр AD-лы валлин луись EF шонер гож ортчытом; кык куиньсэрго поттом: $CNE\triangle$ но $FNB\triangle$ соослэн: 1) $CN = NB$ — условия, 2) $1\angle = 2\angle$ — ваче пумит луэменызы, $3\angle = 4\angle$ — валлинэсь гож’ёс бордысь сэрег’ёс луэменызы.



132 сур.

Озьы бере, $CNE\triangle = FNB\triangle$.

Куиньсэргоослэн ӵошанысьтызы $CE = FB$ но $EN = NF$, яке $EN = \frac{EF}{2}$ шуса потэ, нош EF вандэт AD-лы ӵоша но солы валлин луэ, соин ик $EN = \frac{AD}{2} = MD$. Озьыэн, $EN = MD$ но $EN \parallel MD$; озьы бере, $MDEN$ ньыльсэрго — параллелограм, татысен $DE \parallel MN$ шуса потэ.

Трапециын $DC \parallel AB$ но зэме поттэм’я $DC \parallel MN$, соин ик $MN \parallel AB$. Озьыэн, $MN \parallel AB \parallel DC$. Теоремалэн нырисетӥ люкетэз зэме поттэмын.

2) $AMNF$ но $DMNE$ параллелограм'ёсыз эскером. Соослэн:

$$\frac{\begin{array}{c} MN = AF = AB - FB \\ MN = DE = DC + CE \end{array}}{2MN = AF + DE = AB + DC - FB + CE,}$$

нош $FB = CE$, соин ик $2MN = AB + DC$, яке $MN = \frac{AB + DC}{2}$.

Синйылтон. Трапецилэн шор гожез кыкезлэн ик дӥньёсызлэн шор арифметическойзылы ӵоша. Озьы, трапецилэн дӥньёсыз тупаса ӵошало ке: $a = 14$ *см* но $b = 8$ *см*, соку трапецилэн шор гожез $m = \frac{a+b}{2} = \frac{14+8}{2} = 11$ *см*.

§ 17. Трапециэз лэсьтон.

1. Трапеци ньыль элемент'ёсыныз тодытӥське, со элемент'ёслэн лыдазы трапецилэн дӥнез вӧзысь одӥгез яке кык сэрег'ёсыз пырыны быгато, кылсярись.

1) асьсэ ньыль дур'ёсыныз,

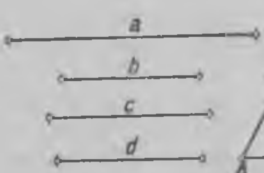
2) кык дӥньёсыныз, одӥг урдэс дуреныз но сэрег'ёсыз одӥгеныз,

3) кык дӥньёсыныз, одӥг урдэс дуреныз но диагоналеныз,

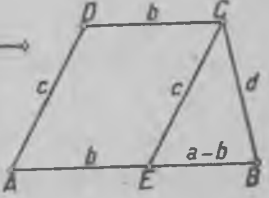
4) кык дӥньёсыныз одӥг урдэс дур еныз но ӝуждалаэныз,

5) дӥненыз, со вӧзысь кык сэрег'ёсын но ӝуждалаэныз.

2. Огкадь урдэс'ем яке шонерсэрег'ем трапеци лэсьтон понна та вылӥ верам элемент'ёс пӧлысь куинез гинэ кулэ луэ, со лыд пӧлэ одӥг сэрег но пырыны быгатоз, малы ке шуоно, огкадь урдэс'ем трапециын солэн кык урдэс дур'ёсыз но дӥньысьтыз сэрег'ёсыз ӵошало, шонерсэрег'ем трапециын нош солэн кык сэрег'ёсыз шонересь



133 сур.



134 сур.

3. Задача. *a, b, c но d — ньыль дур'ёсыз'я трапеци лэсьтоно; a но b — дӥньёсыз c но d — урдэс дур'ёс* (133 но 134 суред'ёс).

Лэсьтонэз. $ABCD$ трапеци (134 сур.) лэсьтэмын шуса малпалом. AD дурзэ аслыз валлин CE интыэ воштом. Соку трапеци $ADCE$ параллелограмлы но BCE куиньсэрголы люкиськоз. Соосыз асьмеос лэсь тыны быгатӥськом, малы ке шуоно, соосыз лэсьтон понна вань кулэ сётэм'ёс (данные) вань: куиньсэрго понна — солэн вань дур'ёсыз $CE = c$, $CB = d$, $BE = a - b$, параллелограм понна — $AD = c$, $AE = b$ но $AEC\angle$.

Таэ эскерем бере лэсьтонэз быдэстӥськом. Задачалэн сётэм'ёсыз'я $BCE\triangle$ лэсьтӥськом, BE гожез кузёмытыса $BA = a$ вандэт интыаськом; A точкаысь ортчытӥськом $AD \parallel CE$, нош C точкаысь ортчытӥськом $CD \parallel AB$ но утчано $ABCD$ трапеци поттӥськом.

Задача луоно таӵе дыр'я: $c - d < a - b < c + d$ ке.

§ 18. Ньыльсэргоэз тодытӥсь элемент'ёслэн лыдзы.

1. Огзылы огзы ӵошась но огзылэсь огзы асьсэ инты басьтэмензы гинэ пӧртэм'яськись, нош асьсэ тусэнызы но асьсэ быдӟалаосынызы пӧртэм'яськисьтэм лыдтэм уно куиньсэргоос куинь сётэм элемент'ёс'я лэсьтыны луэ ке, соку соос ваньзы ик одӥг куиньсэрголэн ик кӧчырем'ёссы (копии) луо. Сыӵе дыр'я одӥг гинэ куиньсэрго, мукет сямен вераса, кыӵе ке одӥг тус'ем но быдӟалао куиньсэрго лэсьтыны луоно шуо. Сыӵе куиньсэрго вылысь лыдтэм уно кӧчырем'ёс лэсьтыны луоз шуса тодмо.

Куиньсэрго, солэн таӵеэсь куинь основной элемент'ёсыз сётэмын ке, лэсьтыны луонэз тодмо ини:

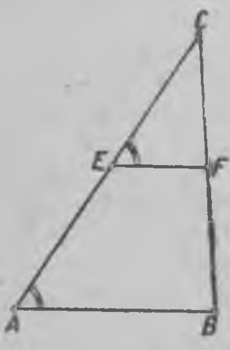
1) одӥгез дурез но со вӧзысь кык сэрег'ёс (соослэн суммазы $2d$-лэсь пичи);

2) кык дур'ёсыз но соос виске пыртэм сэрег (180°-лэсь пичи);

3) куинь дур'ёсыз (соос пӧлысь бадӟымез кык мызон'ёсызлэн суммазылэсь пичи.)

Кык основной элемент'ёсыз'я кыӵе ке одӥг быдӟалао куиньсэрго лэсьтыны уг луы кылсярись, кык дур'ёсыз'я, дурез'я но сэрегез'я огзылэсь огзы асьсэ тусэнызы но асьсэ быдӟалаэнызы пӧртэм'яськись лыдтэм уно куиньсэргоос лэсьтыны луоз. Нош кык сётэм сэрег'ёсыз'я лыдтэм уно куиньсэргоос лэсьтыны луоз, соос огзылэсь огзы асьсэ быдӟалаэнызы пӧртэм'яськозы.

Кылсярись, ABC куиньсэрго сётэмын мед луоз (135 сур). AC дурлэн кыӵе ке E точкаэз пыр AB дӥнезлы валлин EF шонер гож ортчытӥд ке, соку $CEF\triangle$ поттом. Солэн сэрег'ёсыз $ABC\triangle$-лэн сэрег'ёсызлы тупаса ӵошало: C сэрег — огломысь, $E\angle = A\angle$ но $F\angle = B\angle$ тупаса интыаськем сэрег'ёс луэменызы Со куиньсэргоос ӵошасьтэм шуса адске: соослэн ваче ӵошасесь сэрег'ёссы ке но вань, соос огзылэсь огзы асьсэ быдӟалаэнызы пӧртэм луо. Озьыэн, куинь сэрег'ёс'я кыӵе ке одӥг быдӟалао куиньсэрго лэсьтыны уг луы. Куиньсэрголэн сэрег'ёсыз асьсэ куспазы нимысьтыз соотношениэн герӟаськемын: $A\angle + B\angle + C\angle = 180°$. Соин ик куиньсэрголэсь сэрег'ёссэ тодон понна, солэсь кык сэрег'ёссэ гинэ тодэм тырме, малы ке шуоно, куинетӥ сэрег соосын тодытӥське ни, кылсярись $C\angle = 180° - (A\angle + B\angle)$. Татысен, суммазы 180°-лы ӵошась куинь сэрег ке сётэмын, со условилэн асьсэ куспын герӟасыкымтэ элемент'ёсыз кык — кыкез сэрегез — гинэ луо, куинетӥ сэрег соосын тодытӥське шуса потэ.



135 сур.

Куиньсэргоэз кусыпазы герзаськымтэ куинь элемент'ёс'я лэсьтыны луэ.

Кусыпазы герӟаськымтэ куинь элемент'ёс'я одӥг гинэ ӧвӧл, кык пӧртэм тус'емесь но быдӟалаоэсь куиньсэргоос но лэсьтыны луоно, соэ асьмеос азьланьын адӟом али. Кылсярись, кык сётэм дур'ёс'я но пичиезлэн дурлэн пумитаз кыллись сэрег'я кык пӧртэмесь куиньсэрго лэсьтыны луоз. Нош лэсьтон понна сётэм куинь элемент’ёс пӧлэ соосыз герӟаськисьёсыз но пыро ке, соку пӧртэмесь лыдтэм уно куиньсэргоос потозы.

Соин ик, куиньсэрго лэсьтэм бере, задачалэн условиаз сётэм элемент’ёсыз кӧня лыд’янэн лыд’яны луэ, одӥг яке уно-а но, кыӵе сётэм’ёс дыр’я задачаэз лыд’яны уг луы, мукет сямен вераса, задачалэсь лэсьтыны луонтэмзэ эскероно.

2. Параллелограм’ёсыз лэсьтонлэн куиньсэргоос лэсьтонлы вуттӥськемез тодмо ини. Соин ик параллелограмез лэсьтон понна солэсь куспазы герӟаськымтэ куинь элемент’ёссэ тодэм тырме.

3. Шонерсэргоэз лэсьтон понна солэсь кык гожо элемент’ёссэ гинэ тодэм тырме; куинетӥ элементсэ — солэсь сэрегзэ — шонерсэргоын вань сэрег’ёсыз шонересь луэмен, сётыны кулээз но уг луы ини.

4. Ромбез лэсьтон понна озьы ик солэсь кусыпазы герӟаськымтэ кык элемент’ёссэ гинэ тодэм тырме.

5. Квадратэз лэсьтон понна солэсь одӥг гожо элементсэ гинэ — дурзэ яке диагональзэ — тодэм тырме.

6. Трапециэз лэсьтон понна, солэн тусэз’я чакласа, таӵе пӧртэм лыдо элемент’ёсыз кулэ луо:

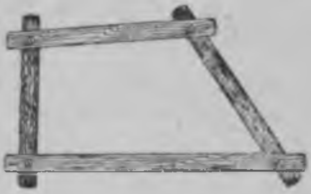
1) огкадь урдэс’ем трапеци понна — 3 элементэз,

2) шонерсэрег’ем трапеци понна — 3 элементэз,

3) оглом вераса трапеци понна (огкадь урдэстэмлы но шонер сэрегтэмезлы) — 4 элементэз.

7. Ньыльсэрго лэсьтон понна кусыпазы герӟаськымтэ 5 элемент’ёсыз кулэ.

Зэмен но, ӟирыо ньыльсэрго басьтӥд ке (136 сур.), солэн вань дур’ёсызлэсь кузьдалазэс воштытэк кельтыса, солэн дур’ёсыз вискысь сэрег’ёссэ вош’яса, туссыя пӧртэмесь лыдтэм уно ньыльсэргоос поттыны луоз. Татысен 4 дур’ёс асэнызы кыӵе ке определенной ньыльсэргоэз уг тодыто шуса потэ. Ньыльсэрго тодытэмын луон понна, солэсь витетӥ элементсэ сётыны кулэ на: яке, сэрег’ёсыз пӧлысь одӥгзэ, яке солэн кык диагональёсызлэсь одӥгзэ.



136 сур.

Зэмзэ ик, ньыльсэргоын диагональёсыз пӧлысь одӥгзэ отрчытӥд ке (со ньыльсэрголэсь кыксэ йыл’ёссэ кусыпазы герӟалоз), соку кыӵе ке определенной ньыльсэрго поттом, малы ке шуоно, ньыльсэрго кык куиньсэргоос лэсьтэмен пӧрме, соос ньыльсэрголэн диагоналеныз но дур’ёсыныз тодытӥсько.

Озьыэн тӥни, диагональ ньыльсэрголы чурыт тус сётэ.

Кылсярись, ньыльсэрголэн таӵеэсь вить элемент’ёсыз сётэмын ке, со лэсьтэмын луоз: 1) 4 дур’ёсыз но диагоналез, 2) 4 дур’ёсыз но сэрегез, 3) 3 дур’ёсыз но кык диагональёсыз, 4) 3 дур’ёсыз но кыкез сэрегез, 5) 2 дур’ёсыз но 3 сэрегез, азьланьын но озьы ик.

8. Ньыльсэрголэн дур’ёсызлэсь кузьдалазэс возён дыр’я солэн сэрег’ёсызлэсь быдӟалазэс воштӥд ке, ньыльсэрго аслэсьтыз ту-

ссэ воштэ. Куиньсэргоэн мызон сямен ужпум сылэ. Куиньсэрголэн дур'ёсызлэсь кузьдалазэс возён дыр'я, солэсь туссэ воштыны уг луы. Сыӵе кулэлыко — аслэсьтыз туссэ вош'янтэм — аслыкен сэрен куиньсэрго чурыт фигура шуса нимаське.

Куиньсэрголэн вылӥ возьматэм аслыкез техникаын но лэсьтӥськонын нимаз ик туж бадӟым данлык басьтэ.

Куиньсэрголэн тусэз стропилаосыз, выж фермаосыз, ӝутӥсь кран'ёсыз, котькыӵе пӧртэмесь тӥрлык'ёсыз но машинаослэсь детальёссэс дасян, лэсьтон дыр'я кутӥське. Куиньсэрголэсь пӧртэм, ньыльсэрго чурыт фигура уг луы.

Ньыльсэрголы чурыт тус сётон понна, солэсь артэ луымтэ кык йыл'ёссэ диагонален ӝиг-ӝиг юнматоно. Сыӵе амалэн соэ кык куиньсэрголы пӧрмытыса, соос пӧлысь котькудӥз фигура ас понназ чурыт, йыгмыт луэ.

Ньыльсэрголэн дур'ёсызлэсь кузьдалазэс воштытэк кельтыса, солэн кык артэ дур'ёсыз кусыпе ӝиг-ӝиг угольник пыртӥд ке, сыӵе дыр'я но ньыльсэрго чурыт тус басьтэ.

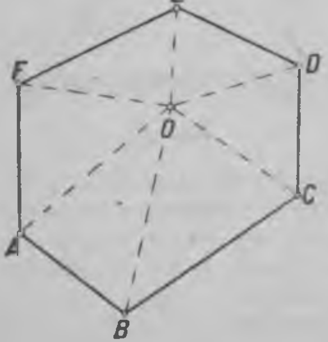
§ 19. Уносэрго. Солэн сэрег'ёсызлэн аслыксы.

1. *n дур'ёслэсь луись вистэм тӥаськем гожен котыртэм чошкеслэн люкетэз, n-сэрго шуса нимаське*: n-эз коткыӵе быдэс лыдэн, куиньлэсь бадӟым яке 3-лы ӵошась карыны луэ.

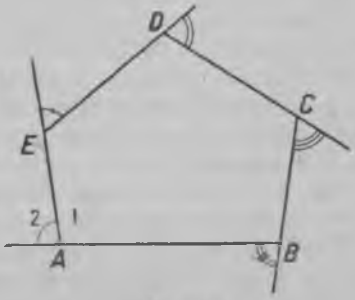
Азьланьын асьмеос поглес куиньсэргоосыз гинэ эскериськом, мукет сямен, сыӵеоссэ, кудаз ке нимысьтыз пушпал сэрегез $2d$-лэсь пичи.

2. *Теорема.* n-сэрголэн пуш сэрег'ёсызлэн суммазы $2d$ (n—2) яке 180° (n — 2) ӵоша.

Зэме поттон. Уносэрголэн кытчыаз ке пушказ O точка басьтом (137 сур.). но соэ солэн вань йыл'ёсыныз шонер гож'ёсын валчеалом: n куиньсэргоос поттом; уносэрголэн кӧня ке дур'ёсыз луо, куиньсэргоос со мында луозы. Вань n куиньсэргооcлэн пуш сэрег'ёссылэн сумназы $2d$. n ӵоша, со пӧлэ O точкаысь оглом йылэн вань сэрег'ёсыз но пыртыса. Сооcлэн суммазы $4d$-лы ӵоша. Нош n-сэрголэн пуш сэрег'ёсызлэн суммазы n куиньсэрго-



137 сур.



138 сур.

ослэн пуш сэрег‘ёссылэн суммазылы, соос пӧлысь O точка котыртӥ интыаськем сэрег’ёслэсь суммазэс куштыса, ӵоша, ӵапак: $2dn - 4d = 2d\ (n - 2)$, яке $180°\ (n - 2)$. Озьыэн,

n-сэрголэн пуш сэрег‘ёсызлэн суммазы солэн кыкезтэк дур лыдэзлы уноам $2d$-лы ӵоша.

3. $ABCDE$ уносэргоын (138 сур.) солэсь одӥг дурзэ, кылсярись AB-эз шуом кузёмытӥд ке, соку со дурлэн кузёмытэмез соэн артэ луись AE дурен сэрег пӧрмытоз, со уносэрголэн педпал сэрегез шуса нимаське.

Суредын возьматэм’я (138 сур.) $ABCDE$ уносэрголэсь вань дур’ёссэ кузёмытыса, кӧня ке уносэрголэн дур’ёсыз яке сэрег’ёсыз луо, асьмеос со мында ик педпал сэрег’ёс басьтом.

4. ***Теорема.*** **Котькыӵе уносэрголэн вань педпал сэрег ёсызлэн суммазы $4d$-лы яке $360°$-лы ӵоша.**

Зэме поттон. Уносэрголэн котькуд йылысьтыз пуш но педпал сэрег’ёсызлэн суммазы $2d$ луэ; n йыл’ёс понна, $2d \cdot n$ луэ; нош n-сэрголэн вань пуш сэрег’ёсызлэн суммазы $2dn - 4d$ ӵоша; озьы бере, n-сэрголэн вань педпал сэрег’ёызлэсь суммазэс поттон понна, $2dn$-ысь $2dn - 4d$-эз куштыны кулэ, поттом:

$$2dn - (2dn - 4d) = 2dn - 2dn + 4d = 4d, \text{ яке } 360°.$$

Озьыэн,

котькыӵе уносэргорлэн вань педпал сэрег‘ёсызлэн суммазы $4d$-лы ӵоша. Суммаэз солэн дур’ёсызлэн лыдэныз уг герӟаськы.

Юан‘ёс но уж‘ёс

1. Уносэрголэн пуш сэрэг‘ёсызлэн суммазы $7d$-лы яке $11d$-лы, ог‘я вераса — кузтэм лыдлы, малы уг ӵоша?

2. $ABCD$ ньыльсэрголэн $AC = m = 6{,}4$ *см* ӵошась диагоналез соэ кык куиньсэрголы люке. Ссослэн периметр’ёссы 16,8 *см* но 20,2 *см* луо. $ABCD$ ньыльсэрголэсь P периметрзэ шедьтоно.

3. $P = 8$ *кг*, $Q = 6$ *кг*, $(P, Q) \angle = 60°$ шуса тодмо ке, P но Q кужым‘ёслэн R огкадь луись (равнодействующий) кужымлэсь бадӟымлыксэ но кудланьзэ — лэсьтон пыр тодоно.

4. P но Q пӧрмытӥсь кужым’ёслэсь кудланьзэс но быдӟалазэс лэсьтонэн шедьтоно; огкадь луись кужымез $R = 20$ *кг* но тупасесь кужым‘ёсын $(P, R) \angle = 30°$ но $(Q, R) \angle = 90°$ шуса тодмо ке.

5. Таӵе сётэм’ёс’я параллелограм лэсьтоно: a но b — солэн дур’ёсыз m но n — солэн диагональёсыз:

1) $a = 4{,}5$ *см*, $b = 3{,}2$ *см*, $A \angle = 40°$;
2) $a = 7$ *см*, $b = 5,$[illegible] *см*. $B \angle = 110°$;
3) $a = 6{,}3$ *см*, $b = 4{,}7$ *см*, $m = 8$ *см*;
4) $m = 8$ *см*, $n = 6{,}4$ *см* соос вискысь сэрег $\beta = 45°$;
5) $a = 7$ *см*, $A \angle = 130°$ но диагональёсыз пӧлысь огеныз параллелограмлэн a дуреныз лэсьтэм α сэрег 40°-лы ӵоша;
6) $a = 8$ *см*, $b = 6$ *см*, ӝуждалаез $h = 4$ *см*.

6. Шонер сэрго лэсьтоно, таӵеос сётэмын

1) солэн кык дурёсыз $a = 6{,}4$ *см* но $b = 4{,}3$ *см*;
2) a дурез $= 5{,}7$ *см*, но b диагональ $= 7{,}5$ *см*;
3) m диагональ $= 8{,}4$ *см* но диагонален но дурен куспысь α сэрег $= 40°$
5) m диагональ $= 8$ *см* но диагональёс кусыпысь $\beta \angle = 60°$;
5) b дурез $= 5$ *см* но диагональёс кусыпысь $\beta \angle 110°$;

7. Ромб лэсьтоно:

1) $a = 4$ *см* дурез‘я но $\alpha = 40°$ сэрегез‘я;
2) $\alpha = 5$ *см* дурез‘я но $m = 5$*см* диагоналез’я но солэсь сэрег‘ёссэ тодоно
3) $m = 6$ *см* диагоналез’я но $\alpha = 120°$ сэрегез’я;
4) кык диагональёс’я — $m = 5$ *см* но $n = 8$ *см*;
5) $a = 5$ *см* дурез’я но $h = 3$ *см* ӝуждалаэз’я.

8. Квадрат лэсьтон : 1) $a = 3,5$ *см* дур'я, 2) $m — 4,5$ *см* диагоналез'я

9. *Огкадь урдэс'ем трапециын диагональёсыз чощало но диньёсынызы чошасесь сэргёс пӧрмыто шуса зэме поттоно.*

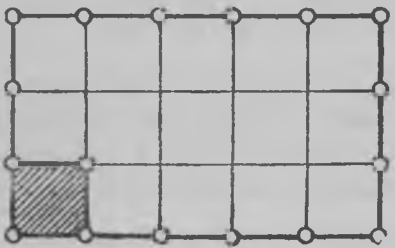
10. *Огкадь урдэс'ем трапециын диагональёсыз трапециэз 4 куиньсэрголы люконо, соос полысь кыкез. диньёс вӧзысьесыз огкадь урдэс'емесь нош урдэс дур вӧзысь кыкез кусыпазы чошло шуса зэме поттоно.*

11. Огкадь урдэс'ем трапециын диагональёсыз ваче кусыпазы перпендикулярноесь. Трапециλэн ӝуждалаэз 10 *см.* Шор гожезлэсь кузьдалаэ лыд'яно.

IX. ШОНЕР ГОЖО ФИГУРАОСЛЭН ПЛОЩАДЬЁССЫ.

§ 1. Площадьёсыз мертан.

1. *Площадез мертан, со—сётэм площадез единицалы басьтэм мызон площаден чошатон луэ.* Площадь мертэт единицалы квадратлэн площадез басьтӥське. Солэн дурез кыӵе ке но гожо единицалы ӵоша, кылсярись миллиметрлы, сантиметрлы, метрлы но мукет Сыӵе мертэт единица-квадрато единица шуса нимаське.



139 сур.

2. Квадрато единицаос тазьы гожтӥсько: 1 *кв. мм*, яке 1 $мм^2$; 1 *кв. см*, яке 1 $см^2$; 1 *кв. м*, яке 1 $м^2$, мук. но. Площадь мертэт единицаэз бырйыса, фигуралэсь площадьзэ мертало, мукет сямен вераса, мертано площадь кӧня квадрато единицаос интыамзэ тодо.

3. Фигуралэсь площадьзэ мертаны быр'ем единицаэн быдэсак шонер мертаны тодыны уг луы, мукет сямен вераса, 139 суред вылын возьматэм сямен солэсь площадьзэ единицалы басьтэм площадкаосын шобыртэмен уг луы. Фигуралэн площадезлэн быдӟалаэз косвенной мертанэн тодытӥське: фигуралэсь дур'ёссэ но фигураын ортчытэм нимаз юрттӥсь гож'ёсыз мертаса, потэм лыд'ёс'я площадез лыд'яло.

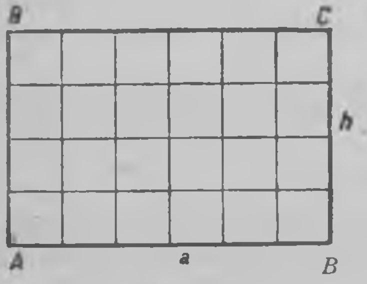
§ 2. Шонерсэрголэн но квадратлэн площадез.

Теорема. **Шонерсэрголэн площадез — солэсь-дӥньзэ ӝуждалаэзлы уноам произведенилы ӵоша.**

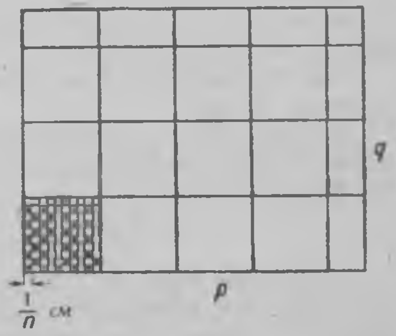
Сётэмын: *ABCD* — шонерсэрго (140 сур.).
$AB = a$ — дӥнь; $CB = h$ — ӝуждала.
Зэме поттыны кулэ: площадь $S = a.h.$

Одӥг единицаэн ик мертам дӥнь но ӝуждала, 1) быдэс лыд'ёсын но 2) дробо люкет'ёсын возьматӥськем учыр'ёсыз нимазы эскером.

З э м е п о т т о н. *I учыр. Дӥнь* $AB = a$ *см* но ӝуждала $BC = h$ *см* мед луоз, отын a но h — быдэс лыд'ёс. AB дӥнез огкадесь, быдэн 1 сантиметрлы ӵошась a люкет‘ёслы но CB ӝуждалаэз сыӵе ик h люкет’ ёслы люком но люкем точкаос пыр шонерсэрголэн дур’ёсызлы валлинэсь шонер гож‘ёс ортчытом; шонерсэрго котькудӥз $1\ см^2=$лы ӵошась площадё квадрат′ёслы люкиськоз. Со квадрат‘ёслэн лыдзы $a{\cdot}h$ ӵоша, малы ке шуоно, AB дӥньлы валлинэсь шонер гож’ёс шонерсэргоэз h полосаослы люко, нош CB ӝуждалалы валлинэсь шонер гож‘ёс котькудзэ со полосаэз котькудӥз $1\ см^2$ площадё a квадрат‘ёслы люко.



140 сур.



141 сур.

Озьыэн, $ABCD$ шонерсэрголэн площадез быдэн $1\ см^2$ площадё $a{\cdot}h$ квадрат’ёслы люкиське. Формулаэн со тазьы гожтӥське:

$$\boxed{S=a{\cdot}h}\ см^2$$

Мукет сямен, *шонерсэрголэн площадез солэсь диньзэ но ӝуждалазэ одиг ним‘ем гожо единицаосын возьматись лыд‘ёсыз ваче уноаса потэм квадрато единицаослэн лыд‘ёссылы ӵоша.*

II учыр. AB дӥнь $=a\ см$ но CD ӝуждала $=h\ см$, a но h — дробо лыд’ёс. Та дробо лыд’ёс одӥг знаменательлы вуттэм бере: $a=\frac{p}{n}$ но $h=\frac{q}{n}$ мед луозы. a но h вандэт’ёслэн ог’я мертэтсы интыэ $\frac{1}{n}$ сантиметрлы ӵошась вандэт басьтом, соку та ог’я мертэт a-ын p пол но h-ын q пол интыаськоз. Люкон точкаос пыр шонерсэрголэн дур’ёсызлы валлинэсь шонер гож’ёс ортчытом, соин сэрен соку со шонерсэрго $\frac{1}{n}\ см$ дур’ем $p{\cdot}q$ пичиэсь квадрат’ёслы люкиськоз (141 сур.); 1 сантиметрын сыӵе пичиэсь квадрат’ёс $n{\cdot}n=n^2$ интыаськемын луозы. Кылсярись, квадратлэсь 1 *см* кузьдалаем артэ дур’ёссэ 10 огкадесь люкет’ёслы люким ке, соку со квадрат $10{\cdot}10=10^2=100$ пичи квадрат’ёслы люкиськоз но котькудӥз со квадрат $1\ см^2$ площадё квадратлэн $\frac{1}{100}$ люкетэз луоз.

Озьыэн, $1\ см^2$-ын n^2 пичиэсь квадрат’ёс интыаськемын ке, соос пӧлысь котькудӥз 1 $см^2$-лэн $\frac{1}{n^2}$ люкетэз луоз. Сётэм шонерсэргоын $p \cdot q$ пичик вадрат'ёс интыаськизы. Озьы тӥни, со $\frac{p\ q}{n^2}см^2$,яке $\frac{p}{n} \cdot \frac{q}{n}$ $см^3$ луэ; нош $\frac{p}{n} = a$ но $\frac{q}{n} = h$, соин ик $\frac{p}{n} \cdot \frac{q}{n} = a \cdot h\, см^2$ шуса гожтэммы луоз; со нош шонерсэрголэн площадез: солэн дӥнен ӝуждалаэн произведенилы ӵоша шуса возьматэ.

Шонерсэрголэн артэ дур'ёсыз пӧлысь огез, яке кыкез ик ирациональной лыд'ёсын возьматэмын ке но, соку но та теорема шонер ик кыле.

Следствиос. **1. Квадратлэн площадез солэн дурезлэн квадратэзлы ӵоша.**

Квадрат, со — шонерсэрго, солэн дур'ёсыз огкадесь луо. Квадратлэсь дурзэ a букваэн пус'ём, соку солэн h ӝуждалаэз но a-лы ӵоша, соин ик:

$$S = a \cdot a = a^2 \text{ кв. ед.}$$

2. Пӧртэм дине но ӝуждалао кык шонерсэргоослэн площадьёссылэн отношенизы сооcлэн дӥньёссылэн но ӝуждалаоссылэн отношенизылэн произведениэзлы ӵоша.

$$S_1 = a_1 h_1 \text{ но } S_2 = a_2 h_2.$$

отысен

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{a_1 h_1}{a_3 h_2} = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{h_1}{h_2}$$

3. Огкадь дӥнё луись кык шонерсэргоослэн площадьёссы сооcлэн ӝуждалаоссы кадь отношенио луо; нош сооcлэн ӝуждалаоссы ӵошало ке, соку соос сооcлэн дӥньёсы кадь отношенио луо.

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{ah_1}{ah_2} = \frac{h_1}{h_2}; \quad \frac{S_1}{S_2} = \frac{a_1 h}{a_2 h} = \frac{a_1}{a_2}$$

4. Кык квадрат'ёслэн площадьёссы, сооcлэн дур'ёссылэн квадрат'ёссы кадь отношенио луо.

$$S_1 = a^2 \text{ но } S_2 = b^2,$$

отысен

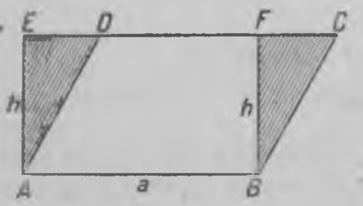
$$\frac{S_1}{S^2} = \frac{a^2}{b^2}.$$

§ 3. Ӵошаесь огкадь лэсьтэм но огкадь быдӟалаоэсь фигураос.

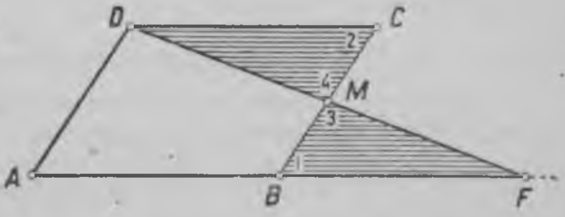
1. $ABCD$ параллелограмын (142 сур.) солэн A но B йыл'ёсысьтыз солэсь AE но BF ӝуждалаоссэ ортчытом; кык огкадесь шонерсэрег'ем ADE но BCF куиньсэргоос поттом: AD гипотенуза $= BC$ но ED катет $= FC$.

Собере $ABCD$ параллелограм бордысь BFC куиньсэрго вандӥд ке но AD но BC дур'ёс мед тупалозы шуса, параллелограмлэн AD дур бордаз понйд ке, соку $ABFE$ шонерсэрго потоз, со шонерсэрго $ABCD$ параллелограмлэн люкет'ёсызлэсь ик лэсьтйськемын: шонерсэрег'ем $ABFD$ трапецилэсь но куиньсэрголэсь.

2. $ABCD$ параллелограм басьтом (143 сур.). Солэн D йылысеныз BC дурлэн M шор вадесэтйз шонер гож ортчытом но соэ AB дур нуйтэм вылысь F точкаын вожвылскытозяз ортчытом:



142 сур.

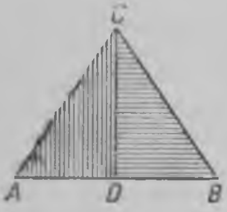


143 сур.

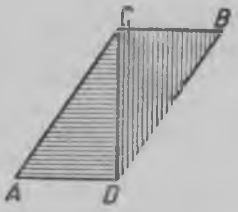
асьмеос кык огкадесь куиньсэргоос поттом: $DMC\triangle$ но $BMF\triangle$; соослэн $MB = MC$, M точкаысь сэрег'ёсыз ваче пумито луэменызы ӵошасесь, нош $B\angle$ но $C\angle$ кечат кыллись луэменызы ӵошало.

$ABCD$ параллелограмез но ADF куиньсэртоэз эскерыса, кыкез ик соос огкадь люкет'ёслэсь: $ABMD$ трапецилэсь но куиньсэрголэсь дэсьтэмын шуса йылпум'яськом.

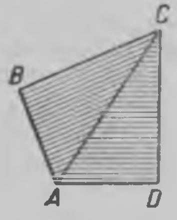
3. ABC огкадь урдэс'ем куиньсэргоэз эскером на (144 сур.); CD жуждалаэн со кык ӵошась куиньсэргоослы люкиське. Со куиньсэргоосыз огез вылэ огзэ поныку, соос тупало, озьы бере, площадьзы соослэн одйг быдӟа луэ. Та кык куиньсэргоослэсь, соос пӧлысь одйгез бордэ мукетсэ солэн ӵошась дур'ёсынызы ваче пуктылыса, пӧртэм фигураос лэсьтыны луоз. Соослэн туссы огезлэсь огез пӧртэм ке но бадӟымлыкен площадьзы огкадь луоз. Кылсярись, $CBD\triangle$-эз $ACD\triangle$ бордэ пуктыса, соос яке $ADBC$ параллелограм (145 сур.) яке $ADCB$ ньыльсрго (146 сур.) яке огкадь урдэс'ем $ABC\triangle$ (147 сур) пӧрмытозы.



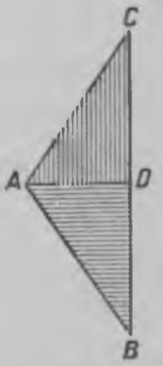
144 сур.



145 сур.



146 сур.



147 сур.

Ваньмыз та фигураослэн, ӵошась люкет'ёслэсь лэсьтэмен, площадьзы одйг. Соэн ӵош ик соосыз огез вылэ огзэ поныса интыаськымтээнызы, асьсэос со фигураос уг ӵошало.

4. 1) Ӵошась люкет’ёслэсь лэсьтэм фигураос огкадь лэсьтэм фигураос шуса нимасько.

2) Ӵошась площадё кык фигураос огкадь быдӟалао фигураос шуса нимасько.

3) Кык ӵошасесь фигураос огкадь быдӟалаэсь.

4) Лэсьтэмен огкадь кык фигураос ог быдӟалаэсь.

5) Кык ог быдӟалаэсь уносэргоосыз котьку ик огмында огкадесь люкет’ёслэсь лэсьтыны луэмез, пус’ёно луэ, мукет сямен лэсьтэмен огкадесь луо.

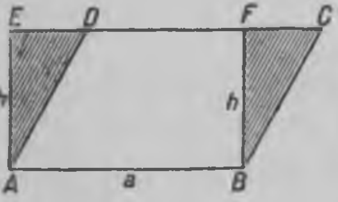
§ 4. Параллелограмлэн площадез.

Теорема. **Параллелограмлэн площадез солэсь дӥньзэ ӝуждалаэзлы уноам произведениезлы ӵоша.**

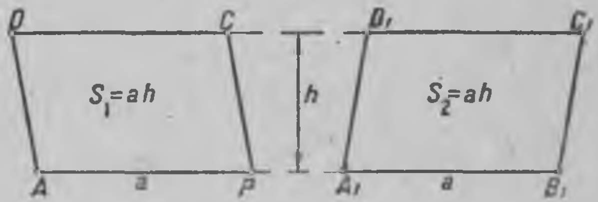
Зэме поттон. Параллелограмын солэсь ӝуждаладаоссэ ортчытом, кык ӵошасесь ADE но BCF шонерсэрег’ем куиньсэргоос поттом.

Сётэм $ABCD$ параллелограм но $ABFE$ шонерсэрго,— огкадь лэсьтэмын луэменызы, огкадь быдӟалаэсь. $ABFE$ шонерсэрголэн площадез $= ah$, озьы бере, $ABCD$ параллелограмлэн но площадез но $= a \cdot h$.

$$\boxed{S = a \cdot h.}\ \text{кв. ед.}$$



148 сур.



149 сур.

Следствиос. 1. **Ӵошась дӥнё но ӵошась ӝуждалао параллелограм‘ёс огкадь быдаӟалаэсь.**

$ABCD$ но $A_1B_1C_1D_1$ параллелограм’ёслэн (149 сур.) ӝуждалаоссы но дӥньёссы ӵошасесь: $AB = A_1B_1 = d$. Соослэн площадьёссы $S = a \cdot h$ но $S_2 = a \cdot h$, озьы бере, $S_1 = S_2 = a \cdot h$: параллелограм’ёс огкадь быдӟалаэсь.

$ABCD$ но $A_1B_1C_1D_1$ параллелограм’ёс ӵошасьтэмесь, огез вылэ огзэ поныку соос уз тупалэ, малы ке шуоно, соослэн сэрег’ёссы быдӟалазыя пӧртэмесь.

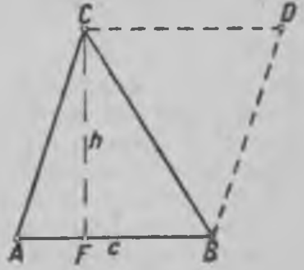
2. **Ӵошась дӥнё параллелограм’ёслэн площадьёссы тупась ӝуждалаоссы кадь отношенио луо: нош соослэн ӝуждалаоссы ӵошась ке луо, соослэн площадьёс параллелограм’ёслэн тупась дӥньёссы кадь отношенио луо.**

§ 5. Куиньсэрголэн площадез.

1. *Теорема.* **Куиньсэрголэн площадез солэсь дӥньзэ ӝуждалаэзлы уноамлэн ӝыны произведениезлы ӵоша.**

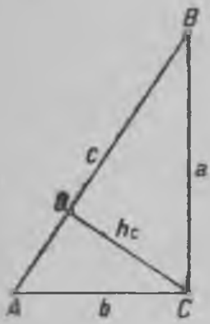
Зэме поттон. AC-лы валлин BD но AB-лы валлин CD ортчытыса, сётэм $ABC\triangle$-эз (150 сур.) $ABCD$ параллелограмозь ватсалом. $ABCD$ параллелограмлэн площадез $c \cdot h$-лы ч̆оша; $ABC\triangle$-лэн площадез $ABCD$ параллелограмлэн ӂыны площадез луэ; озьы бере, $ABC\triangle$-лэн плошадез $\frac{1}{2} c \cdot h$-лы ч̆оша Озьыэн,

$$\boxed{S = \frac{1}{2}ch} \text{ кв. ед.}$$



150 сур.

Следствиос. Шонерсэрег'ем ABC куиньсэрголэсь катет'ёссэ (151 сур). a но $в$ букваосын, гипотенузазэ — c буквэн но, гипотенуза вылэ ортчытэм ӂуждэлазэ h_c букваэн пусйид ке, шонерсэрег'ем куиньсэрголэсь площадьзэ кык сямен возьматыны луоз:



151 сур.

$$1)\ S = \frac{1}{2} a \cdot b \text{ но } 2)\ S = \frac{1}{2} c \cdot h_c.$$

Озьы бере:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot b = \frac{1}{2} c \cdot h_c, \text{ яке } a \cdot b = c \cdot h_c$$

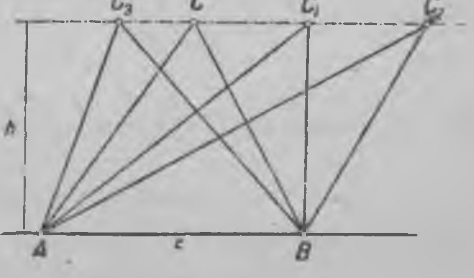
Озьыэн:

1) Шонерсэрег'ем куиньсэрголэн площадез солэн катет'ёсызлэн ӂыны произведенизылы ч̆оша.

2) Шонерсэрег'ем куиньсэрголэн катет'ёсызлэн произведенизы гипотенузаэз солэн тупась ӂуждалаэзлы уноамлэн произведениэзлы ч̆оша.

3) Ч̆ошась дйнё куиньсэргоослэн площадьёссы тупась ӂуждалаос кадь отношенио луо; нош сооспэн ӂуждалаоссы ч̆ошало ке, соку куиньсэргооспэн площадьёссы тупась дйньёс кадь отношенио луо.

4) Пŏртэм дйнё но пŏртэм ӂуждалао куи́ньсэргооспэн площадьёссылэн отношенизы сооспэн диньёссылэсь отношенизэс сооспэн ӂуждалаоссылэн отношенизылы уноам произведенилы ч̆оша.



152 сур.

$$S_1 = \frac{1}{2} a_1 \cdot h_1 \text{ но } S_2 = \frac{1}{2} a_2 \cdot h_2$$

отысен:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{a_1 h_1}{a_2 h_2} = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{h_1}{h_2}$$

5) Ч̆ошась дйнё но ч̆ошась ӂуждалао куиньсэргоос огкадь быдз̆алаэсь.

$ABC\triangle$ сётэмын. Солэсь C йылзэ куиньсэрголэн AB дйнезлы валлин луись шонер гож кузя, дйньзэ вош'ятэк кельтыса, вош'яд ке (152 сур.), соку трос ABC_1 ABC_2 но мукет куиньсэргоос потозы. Соос пӧлысь котькуд куиньсэрголэн площадез $\frac{1}{2}\ c\cdot h$-лы ч̆оша, озьы бере, соос огкадь быдз̆алаэсь.

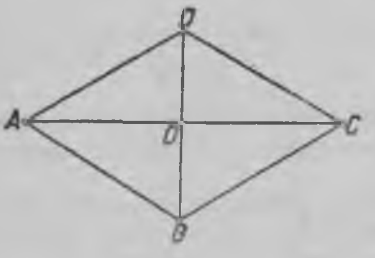
6) Ромблэн площадез, котькыч̆е параллелограмлэн сямен ик, солэн дйньзэ ӂуждалаэзлы уноам произведениэзлы ч̆оша, мукет сямен вераса, $S=a\cdot h$. Со сяна, ромблэн площадез солэн диагональёсызлэн ӂыны произведенизылы ч̆оша.

Зэмзэ ик $ABCD$ ромблэн AC но BD диагональёсыз (153 сур.) огзылы огзы перпендикурноесь, озьы бере:

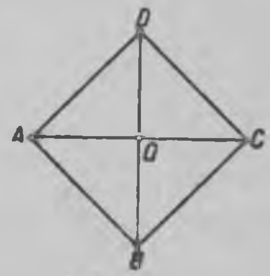
$$ADC\triangle\text{-лэн площадез}=\frac{1}{2}\,AC\cdot DO$$

$$ABC\triangle\text{-лэн площадез}=\frac{1}{2}\,AC\cdot OB$$

$$ABCD\text{-лэн площадез }\frac{1}{2}\,AC\,(DO+OB)=\frac{1}{2}\,AC\cdot BD$$



153 сур.



154 сур.

7) Квадратлэн площадез солэн диагоналезлэн ӂыны квадратэзлы ч̆оша.

Квадратын диагональёс огзылы огзы перпендикулярноесь но ч̆ошасесь (154 сур.), озьы бере, $ABCD$ квадратлэн площадез ч̆оша $\frac{1}{2}\ AC\cdot BD=\frac{1}{2}\ AC^2$-лы

2. Куиньсэрголэн площадез солэн котькуд дурез но солы тупась ӂуждалаэз пыр возьматэмын луыны быгатэ:

$$S\triangle=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c.$$

Татысь тазьы потэ:

$$1)\quad a=\frac{2S}{h_a};\ b=\frac{2S}{h_b};\ c=\frac{2S}{h_c};$$

$$2)\quad h_a=\frac{2S}{a};\ \ h_b=\frac{2S}{b};\ h_c=\frac{2S}{c};$$

1) Дур'ёсызлэсь отношенизэс но 2) куиньсэрголэн ӝуждалаосызлэсь отношенизэс басьтыса, таӵе потоз:

$$1)\ a:b:c=\frac{2S}{h_a}:\frac{2S}{h_b}:\frac{2S}{h_c},\quad \text{яке}\quad a:b:c=\frac{1}{h_b}:\frac{1}{h_b}:\frac{1}{h_c}.$$

Со выллем асьмелэн вань:

$$2)\ h_a:h_b:h_c=\frac{2S}{a}:\frac{2S}{b}:\frac{2S}{c}\quad \text{яке}\quad h_a:h_d:h_c=\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c},$$

мукет сямен вераса, *куньсэрголэн дур'ёсыз соослы тупась ӝуждалаослы берлань пропорцио луо.*

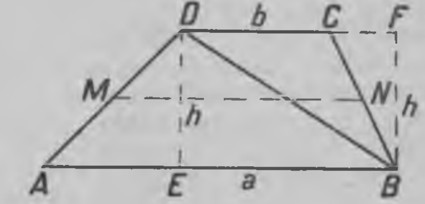
3. Дур'ёсыз но ӝуждалаосыз кусыпын сыӵе ик кусыпаськон параллелограмын но луэ Нош дур'ёсыз ӵошась ромбын ӝуждалаосыз озьы ик ӵошасесь, малы ке шуоно, солэн дур'ёсызлэн отношенизы 1-лы ӵоша.

§ 6. Трапецилэн площадез.

Теорема. **Трапецилэн площадез дӥньёсызлэсь ӟыны суммазэ ӝуждалаэзлы уноамлэн произведениэзлы, яке шор гожзэ ӝуждалаэзлы уноамлэн произведениэзлы ӵоша.**

Сётэмын: $ABCD$ — трапеци; a но b диньёс; h ӝуждала (155 сур.).

Зэме поттыны кулэ: $ABCD$-лэн площадез$=S=\frac{a+b}{2}\cdot h.$



155 сур.

Зэме поттон. $ABCD$ трапеци BD диагонален кык куиньсэргооспы $ABD\triangle$-лы но $DBC\triangle$-лы люкиське; трапецилэн площадез потэм куиньсэргооспэн площадьзылэн суммазылы ӵоша: $ABCD$-лэн площадез$=ABD$-лэн площадез$+BDC$-лэн площадез$=$

$$=\frac{1}{2}ah+\frac{1}{2}bh=\frac{a+b}{2}\cdot h$$

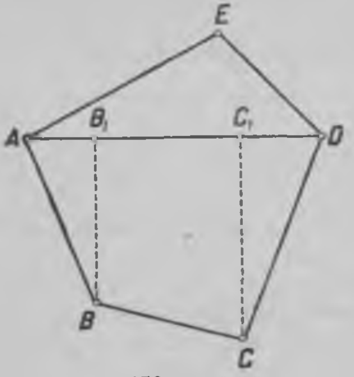
$$\boxed{S=\frac{a+b}{2}\cdot h=m\cdot h}\quad \text{кв. ед.}$$

отын $m=\frac{a+b}{2}=MN$ — трапецилэн шор гожезлы.

§ 7. Уносэрголэн площадез.

Уносэрголэн площадез соэ куиньсэргооспы но трапециослы люкмен шедьтӥське. Куиньсэргооспы люкылон дыр'я солэн одӥг йылысьтыз вань диагональёссэ ортчытыса, потэм куиньсэргооспэн нимаз площадьзэс лыд'яло; вань куиньсэргооспэн суммазы уносэрголэсь площадьзэ сётэ.

Трапециослы люкылон дыр'я одӥг диагональ ортчыто но уносэрголэн йыл'ёсысьтыз диагональёс бордэ ортчытэм перпендикуляр'ёсын соэ шонерсэрег'ем куиньсэргооослы но трапециослы люко (156 сур.). Потэм куиньсэргооослэн но трапецилэн площадьёссылэн суммазы уносэрголэсь площадьэз сётэ.



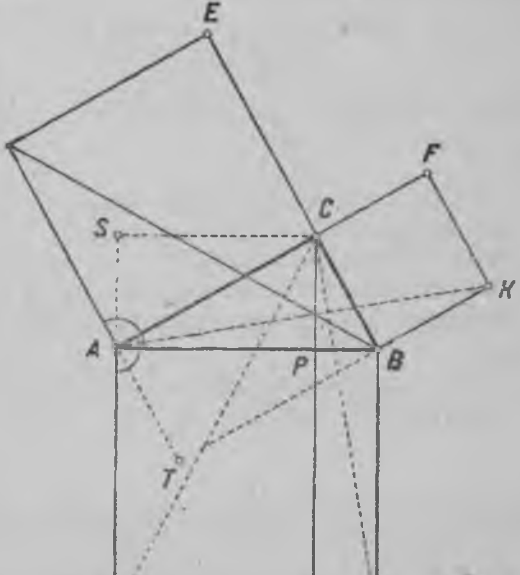
156 сур.

§ 8. Пифагорлэн теоремаэз.

Теорема. **Шонерсэрег'ем куиньсэрголэн гипотенуза вылаз лэсьтэм квадратлэн площадез солэн катет'ёсыз вылэ лэсьтэм квадрат'ёслэн суммазылы ӵоша.**

Сётэмын: $ABC\triangle$-ын $CL = d$; $ABNL$, $ACDE$,Г $BCFK$ квадрат'ёс (157.)

Зэме поттыны кулэ: $ABNL$-лэн площадез $=$ $ACED$-лэн площадез $+$ $BCFK$-лэн площадезлы.



157 сур.

Нырисетӥэз зэме поттон. Евклидэн „Кутскон'ёсаз“ („Начала“) сётэмын. $CM \perp LN$ ортчытӥськом; CM гож $ABNL$ квадратэз кык шонерсэргоослы $APML$-лы но $PBNM$-лы люкэ. Соос пӧлысь котькудӥз шонерсэрго катет'ёс вылэ лэсьтэм квадрат'ёс пӧлысь одӥгензы тупаса, огкадь быдӟалао луэ шуса, эзме поттом. Озьы $APML$ шонерсэрго $ACED$ квадратэн огкадь быдӟалао луэ. Зэмзэ ик: D-эз B-эн но C-эз L-эн огазеаса, кык куиньсэргоос поттом: $ABD\triangle$ но $ACL\triangle$, соос ӵошало, малы ке шуоно, $AD = AC$, $AB = AL$ но $DAB\angle$ но $CAL\angle$ шонерсэрголэн но ABC куиньсэрголэн A сэрегысьтыз лэсьтэм сэрег'ёс луэменызы, ӵошало ($DAB\angle = CAL\angle$). Нош $ABD\triangle$-лэн площадез $ACED$-лэн площадезлэн ӝыныэзлы ӵоша. Малы ке шуоно, шонерсэргоэн оглом (одӥг) дӥнь возе, собере солэн BT ӝуждалаэз квадратлэн DE ӝуждалаэзлы ӵоша. Чапак озьы ик, $ACL\triangle$-лэн площадез

$APML$-лэн площадезлэн жыныэзлы ӵоша, малы ке шуоно, шонерсэрголэн оглом (одиг) AL дӥнь возе, собере солэн CS жуждалаэз но шонерсэрголэн ML жуждалаэзлы ӵоша. $ABD\triangle = ACL\triangle$, соин ик $APML$-лэн $\frac{1}{2}$ площадез $ACED$-лэн $\frac{1}{2}$ площадезлы ӵоша, яке $APML$-лэн площадез $=$ $ACED$-лэн площадезлы, мукет сямен вераса, $APML$ шонерсэрголэн площадез $ACED$ квадратлэн площадезлы ӵоша. Собере A-эз, K-эз но C-эз N-эн огазеаса, $BNMP$ шонерсэрголэн площадез $BCFK$ квадратлэн площадезлы ӵоша шуса асьмеос озьы ик зэмe поттом. Озьыэн.

$$APML\text{-лэн площадез} = ACED\text{-лэн площадезлы но}$$

$$BNMP\text{-лэн площадез} = BCFK\text{-лэн площадезлы.}$$

Озьы бере,

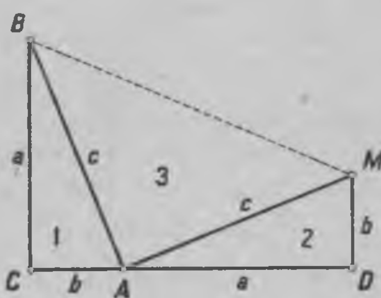
$APML$-лэн площадез $+$ $BNMP$-лэн площадез $=$ $ACED$-лэн площадез $+$ $BCFK$-лэн площадез.

Отысен,

$ABNL$-лэн площадез $=$ $ACED$-лэн $+$ $BCFK$-лэн площадезлы.

Теорема зэмe поттэмын.

Кыкетӥез зэмe поттон. Шонерсэрег’ем ABC куиньсэрго сётэмын. 158 суред вылын возьматэм сямен лэсьтон ортчытом но B точкаэз M точкаэн огазеалом. a но b дӥньёсын но $a+b$-лы ӵошась CD жуждалаэн шонерсэрег’ем $CDMB$ трапеци поттом. Та трапеци ик куинь $1, 2, 3$, шонерсэрег’ем куиньсэргоослэсь лэсьтэмын.



158 сур.

$1\triangle$-лэн площадез $+$ $2\triangle$-лэн площадез $+$ $3\triangle$-лэн площадез $=$ $=CDMB$-лэн площадезлы.

мукет сямен вераса,

$$\frac{ab}{2}+\frac{ab}{2}+\frac{c^2}{2}=\frac{(a+b)(a+b)}{2},$$

яке

$$2ab+c^2=a^2+2ab+b^2$$

$$\boxed{c^2=a^2+b^2}$$

мукет сямен вераса,

гипотенузалэн квадратэз катет’ёслэн квадрат’ёссылэн суммазылы ӵоша.

1 задача. *a но b дуро кык квадрат’ёслэн площадьёссылэн суммазылы ӵошась площадё квадрат лэсьтоно.*

Лыд’янэз. Шонерсэрег’ем куиньсэрго лэсьтом, солэн катет‘ёсыз a но b вандэт’ёс луо. Соку Пифагорлэн теоремаз’я: $c^2=a^2+b^2$, мукет сямен вераса, куиньсэрголэн c гипотенузаэз вылын лэсьтэм квадрат a но b дур’ёсын сётэм квадрат’ёслэн суммазылы огкадь быдӟалао луо.

2 **задача.** *Кык сётэм квадрат'ёслэн площадьёссылэн кылемезлы чошась площадё квадрат лэсьтоно.*

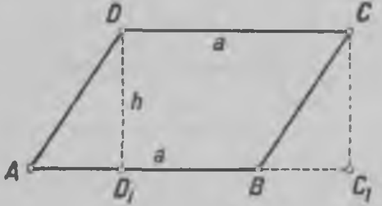
Лыд'янэз. Сётэм квадрат'ёс пӧлысь бадӟымезлэн дурез c но пичи квадратлэн a мед луоз; c-эз гипотенуза интыэ кутыса но a-эз одӥг катет интыэ басьтыса, куиньсэрго лэсьтӥськом; соку мызон b катет утчано квадратлэн дурез луоз. b вандэт вылэ лэсьтэм квадрат — утчано квадратмы луоз.

§ 9. Шонер гожо фигураосыз соосын огкадь быдӟалао луись мукет фигураослы пӧрмытон.

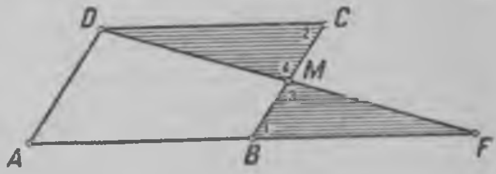
Кыӵе ке фигураэз быдӟалаэн соин огкадь мызон фигураэ берыктон — лэсьтонлы задача луэ; соэ лыд'яку фигураослэн площадьзы сярись теоремаос уже пыртӥсько.

1 **задача.** *ABCD параллелограмез сыче ик динё огкадь быдзалаэ берыктоно* (159 сур.).

Лэсьтонэз. $ABCD$ параллелограмлэн a но h дӥнез но ӝуждалаэз, солэн площадез $S=ah$; быдӟалаэн соин огкадь шонерсэрголэн площадез сыӵе ик луыны кулэ.



159 сур.



160 сур.

Параллелограмлэн сётэм a дӥнь вылаз сыӵе ик ӝуждалаэн шонерсэрго лэсьтыса, утчано DD_1C_1C шонерсэрго потэ. $S=ah$ луэмен со задачалэн условиэзлы тупа.

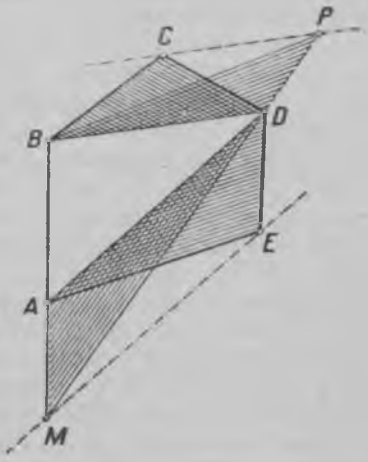
2 **задача.** *ABCD параллелограмез быдзалаэн соин огкадь куиньсэргоэ берыктоно.*

Лэсьтонэз. Сётэм $ABCD$ параллелограмлэсь куд ке но дурзэ (160 сур.) BC-эз, шуом, шори люкиськом но D йылысь BC дурлэн M шорвадесэтӥз AB дурлэн кузёмытэм дуреныз F точкаын вожвылскытозяз DF шонер гож ортчытом. Сётэм $ABCD$ параллелограмлы быдӟалаэн огкадь $ADF\triangle$ поттом. Зэмзэ ик,

$ABCD$ пл.$=ABMD$ пл.$+DCM$ пл.;ADF пл.$=ABMD$ пл.$+$ $+BMF$ пл. нош $DCM\triangle=BMF\triangle$, малы ке шуид, $CM=BM$, $1\angle=2\angle$ но $3\angle=4\angle$, соин ик $ABCD$ пл.$=ADF$ пл. соносш $ADF\triangle$ $ABCD$ параллелограмлы бадӟалаэн огкадь луэмез возьматэ.

3 **задача.** *ABCDE уносэргоэз быдзалаэн огкадь куиньсэргоэ берыктоно* (161 сур.).

Лэсьтонэз. AD диагональ ортчытӥськом; со диагональ сётэм $ABCDE$ уносэрго бордысь $ADE\triangle$ вандоз: E йылтӥ $ME \parallel AD$ шонергож ортчытӥськом со BAдурлэсь кузёмытэм палзэ M точкаын вожвылтоз. M точкаэз D йылэн огазеаса DEA куиньсэрголы быдӟалаэн огкадь $DMA\triangle$ поттом: сооcлэн дӥньзы AD ог’я луэмен но сооcлэн E но M йыл’ёссы дӥньлы валлин луись шонер гож вылын кыллё, DEA куиньсэргоэз соин огкадь быдӟалао DMA куиньсэргоэн воштыса, сётэм $ABCDE$ уносэрголы быдӟалаэн огкадь $MDCB$ уносэрго поттом, нош дур’ёсызлэн лыдэз, сётэмезлэн сярись, одӥглы кулэс луэ. Та выллем лэсьтонэз сётэм уносэргоэз куиньсэрголы быдӟалаэн огкадь берытскытозяз ортчытоно. Суред вылын $ABCDE$ уносэрголэн AD но BD диагональёсыз ортчытэмын, кулэзз’я лэсьтэмен со быдӟалаэн огкадь MBP куиньсэрголы берыктэмын.

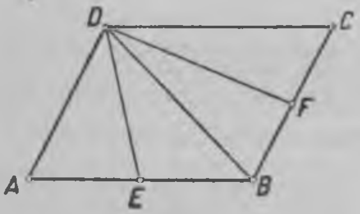


161 сур.

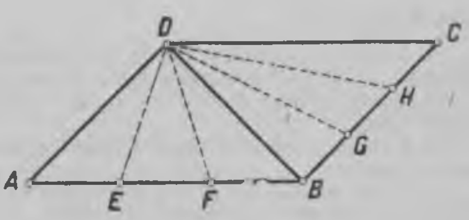
4 задача. *Сётэм куиньсэргоэз солэн йыл’ёстиз ортчись шонер гож’ёсын быдзалаэн огкадесь n люкет’ёслы люконо.*

Лэсьтонэз. Куиньсэрголэсь дӥньзэ огкадесь n люкет’ёслы люкиськом но люкон точкаоссэ йылэныз огазеаськом; соку дӥнен огкадесь но ог’я йыл’ем n куиньсэргоос поттом, озьы ке, ӝуждалаэз но одӥг, соин ик соос бадӟымен огкадесь луо.

5 задача. *Сётэм параллелограмез одиг йылысь потись шонергож’ёсын быдзалэн огкадесь 4 люкет’ёслы люком.*



162 сур.



163 сур.

Лэсьтонэз. DB диагонален $ABCD$ параллелограм кык огкадесь люкет’ёслы: $ABD\triangle = BDC\triangle$ люкиське (162 сур.). Параллелограмлэсь AB но BC дур’ёсызлэсь E но F шор’ёссэ D йылэн огазеаса, быдӟалаэн огкадесь 4 куиньсэргоос потозы.

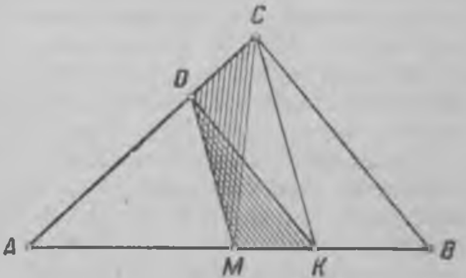
6 задача. *Сётэм параллелограмез одиг йылысь потись шонер гож’ёсын быдзалаэн огкадесь куинь люкет’ёслы люконо.*

Лэсьтонэз. DB диагонален $ABCD$ параллелограм кык огкадесь куиньсэргоослы люкиське (163 сур.). AB но BC дур’ёсыз куинь огкадесь люкет’ёслы люкиськом но E, F, G но H люкон точкаосыз D йылэн огазеаськом; бадӟымен огкадесь 6 куиньсэрго поттӥськом. Нимысьтыз куиньсэрголэн площадез параллелограмлэн площадезлэн $\frac{1}{6}$-эзлы чоша, соин ик, нимысьтыз

$ADF\triangle$-лэн $BFDC_1$ ньыльсэрголэн но $CDG\triangle$ площадьзы параллелограмлэн площадезлэн $\frac{1}{3}$ луэ.

7 задача. *Куиньсэрголэн дур вылаз огшоры басьтэм точка пырти, куиньсэргоэз быдзалаэн огкадь кык люкетлы люкись шонер гож ортчытом.*

Лэсьтонэз. ABC куиньсэрголэн AB дур вылаз огшоры басьтэм K точка сётэмын (164 сур.), K точкаэз C йылэн огазеалом но C йылысь CM медиана ортчытом. CM медиана куиньсэргоэз быдз̆алаэн огкадь кык CMA но CMB куиньсэргоослы люке. $MD \parallel CK$ ортчытом но D точкаэз K точкаэн огазеаса, быдз̆алаэн огкадь куиньсэрго поттом: $CMD\triangle$ но $DMK\triangle$; DM соослэн ог'я дйньзы но соослэн C но K йыл'ёссы DM-лы валлйн шонер гож вылын кыллё; соин ик, $CDM\triangle$-эз площадез'я солы ч̆ошась DKM куиньсэргоэн вошгыны луоз. Озьы бере, сётэм куиньсэрголэн жыны площадезлы ч̆ошась ACM куиньсэрголэн площадез, солы ч̆ошась ADK куиньсэрголэн площаденыз воштйське.



164 сур.

Озьы дыр'я, DK шонер гож сётэм ABC куиньсэргоэз быдз̆алаэн огкадь кык люкет'ёслы: $ADK\triangle$ но $BCDK$ ньыльсэрголы люке.

Юан'ёс но уж'ёс.

1. Шонерсэрголэсь *a* дйньзэ воштытэк кельтыса h жуждалазэ нош: 1) 3 пол будэтыса, 2) 2 пол кулэстыса кызьы солэн площадез воштйськоз?

2. Квадратлэсь котькуд пал дурзэ куинь пол будэтйд ке, кызьы солэн площадез будоз?

3. Пöртэм дйнё но пöртэм жуждалао шонерсэргоос быдз̆алаэн огкадь луыны быгатозы-а?

4. Пасьталаэз'я 160 *м* шонерсэрег'ем муз'ем участокез квадрато тус'ем 200 *м* дур'ёсын муз'ем участокен воштыса, шонерсэрег'ем участоклэн кузьдалаэз мар кузьда луыны кулэ?

5. Шонерсэрго но квадрат одйг кадь периметр возё. Шонерсэрголэн одйг пал дурез 90 *см*, квадратлэн дурез 60 *см*. Кудйзлэн соослэн площадьзы бадз̆ымгес но кöнялы бадз̆ым луоз?

6. Шонерсэрго но квадрат быдз̆алаэн огкадесь. Шонерсэрголэн одйг пал дурез 120 *см*-лы ч̆оша, квадратлэн дурез 60 *см*. Кудйзлэн периметрез бадз̆ымгес, конялы бадз̆ымгес?

7. *Параллелограмлэн диагоналеныз пöрмытэм ньыль куиньсэргоослэсь быдзалаэн огкадь луэмзэс зэматоно?*

8. Параллелограмлэн пичи диагоналез $n = 5$ *см*-лы но одйг пал дурезлы перпендикулярной луыса, солы ч̆оша. Параллелограмлэсь площадьзэ лыд'яно.

9. *Йыл'ёсыз, сётэм параллелограмлэн дур'ёсызлэн шор вадес'ёсыз луись, ньыльсэрголэн площадез параллелограмлэн жыны площадезлы ч̆оша. Соэ зэматоно.*

10. Огкадь урдэс'ем трапециын диагональёсыз шонер сэреген вожвылско. Трапецилэн h жуждалаэз. Трапецилэн площадез $S = h^2$ луэмзэ зэматоно.

11. Трапециэз быдз̆алаэн огкадь 1) параллелограме но 2) шонерсэргоэ берыктоно.

12. Дӥнез $a = 5$ *см* но ӝуждалаэз $h = 8$ *см* луись йылсосэрег'ем куиньсэргоэз сыӵе ик дӥнё быдӟалаэн огкадь шонерсэрголы берыктоно.

13. *ABCD* трапеци сётэмын. *Солэн валлинэсь дур'ёсызлэсь K но L шор'ёсыз огазеясь шонер гож трапециэз быдзалаэн огкадь кык трапециослы вандэмзэ зэматоно.*

14. Сётэм квадратлэн площадез сярись кык пол бадӟым площадё квадрат лэсьтоно.

Валэктон. Сётэм квадратлэсь диагональзэ уже пыртоно.

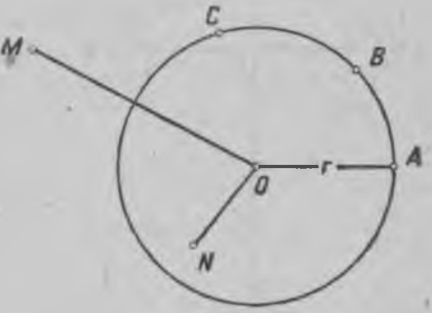
X. ГЕОМЕТРИО ИНТЫОС.

§ 1. Гож — точкаослэн геометрио интызы кадь.

Котыргожлэн точкаосызлэн нош таӵе аслык'ёссы луо;со точкаос котыргожлэн шорезлэн одӥг точкаысеныз солэн радиусэзлы ӵошась одӥг кемын ик интыасько.

Та аслыксы сётэм котыргож вылын кыллись ӵошкес вылысь точкаослэн гинэ вань; котыргож сямен ик со ӵошкес вылын ик интыаськем точкаос котыргож вылын уг ке кыллё, та аслыксы уг улы.

Зэмзэ но, $p = 3$ *см* радиусо *O* точкаын шореныз котыргож сётэмын ке (165 сур.), шорысеныз 3 *см*-лы ӵошась кусыпын интыаськись котькуд *A*, *B* яке *C* точкаэз одӥг котыргож вылын кылле.



165 сур.

Котькыӵе *M* точка *O* шорысеныз $OM > r$, радиуслэсь бадӟымгес, *OM* кемын интыаськемын ке, со сётэм котыргож сьӧрын луоз; *O* шорысен *ON* кемын, радиуслэсь пичи $ON < r$ кусыпын интыаськись *N* точка котыргож пушкын кылле. Озьы, 1) одӥг котыргож вылын кыллись точкаос, асьсэлы таӵе аслык куто: ваньмыз соос шорысеныз одӥг точкаысен одӥг кемын ик интыасько; 2) сётэм котыргож вылын кыллисьтэм точкаос та аслыкез уг куто.

Гож'ёслэн кылсярись котыргожлэн вань точкаоссы кыче ке определенной аслык'ёс куто ке, нош со гож'ёс вылын кыллисьтэм та точкаослэн сыче аслыксы ӧвӧл ке, сыче гож'ёс, сётэм аслыко точкаослэн геометрио интызы шуса нимасько.

§ 2. Геометрио интыос.

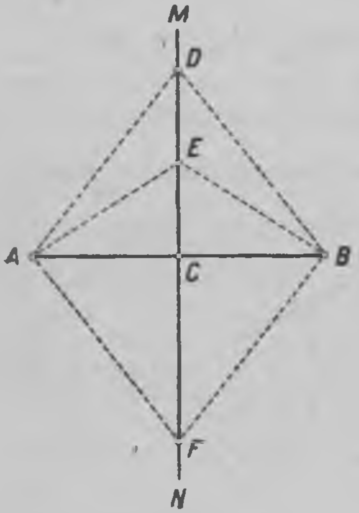
1. *Одиг точкаысь котыргожлэн шорысеныз сётэм кусыпе палэнтэм чошкес вылысь котыргож точкаослэн геометрио интызы луэ.*

2. ***Теорема.* Вандэт вылэ лэзем но солэн шор вадестӥз ортчытэм перпендикуляр, вандэтлэн пумысеныз огкеме палэнтэм точкыослэн геометрио интызы луэ.**

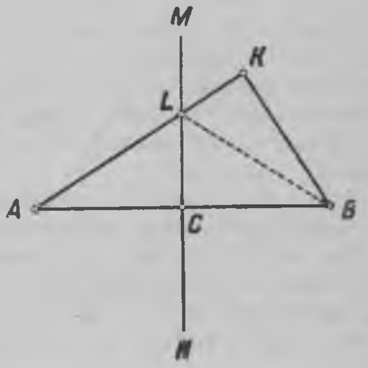
Сётэмын: $AC = CB$, $MN \perp AB$ но MN перпендикуляр вылын $D, E, F, \ldots$ точкаос (166 сур.)

Зэме поттыны кулэ: $DA = DB$, $EA = EB$, $FA = FB \ldots$

Зэме поттон. D, E, F но мукет точкаосыз A но B точкаосын вандэтлэн пум'ёсыныз огазалом; DA но DB, EA но EB, FA но FB вандэт'ёс потозы; та вандэт'ёс одӥг точкаысь потӥсь нялмыт гож'ёс но AC но CB огкадесь проекциоссы ванен кузэн ӵошасесь, соин ик, $DA = DB$, $EA = EB$, $FA = FB$ но мукет. Озьыэн тӥни AB вандэтлэн шор вадестӥз ортчись перпендикулярлэн котькуд точкаэз A но B пум'ёсызлы ог кемын интыаське.

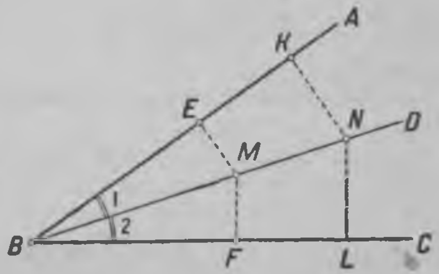


166 сур.



167 сур.

Сётэм MN перпендикуляр вылын кыллисьтэм огшоры K точкаэз басьтом (167 сур.), соку KA гож KB-лы уг ӵоша. Зэмен ик KA-лэн вожвылсконзэлэсь L точказэ MN-лэн B точкаэныз огазеаса $KLB\triangle$-ысь $BK < KL + LB$ поттӥськом. LB вандэтэз солы ӵошась AL вандэтэн воштыса: $BK < KL + LA$, яке $KB < KA$ потоз. Озьы дыр'я MN перпендикуляр вылын кыллись котькудӥз точка, вандэтлэн пум'ёсысеныз огкеме палэнтэмын; MN перпендикуляр вылын кыллисьтэм котькудӥз точка сыӵе аслык уг куты. Соин ик, AB вандэт бордэ солэн C шор вадестӥз ортчытэм MN перпендикуляр, вандэт'ёслэн пумысьтызы огкеме палэнтэм точкаослэн геометрио интызы луэ.



168 сур.

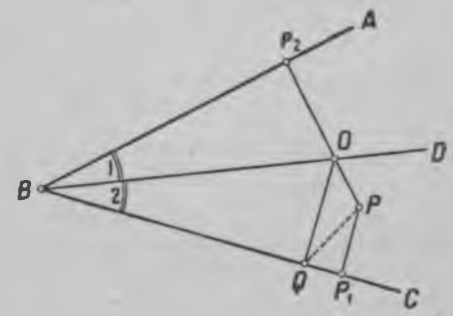
3. *Теорема.* Сэреглэн биссектрисаэз со сэреглэн дур'ёсызлэсь огкеме палэнтэм точкаослэн геометрио интызы луэ.

Сётэмын: BD—биссектриса; $1\angle = 2\angle$ (168 сур.).
$ME \perp AB$ но $MF \perp BC$; $NK \perp AB$ но $NL \perp BC$ но мук.

Зэме поттыны кулэ: $ME = MF$, $NK = NL$ азьланьын но озьы ик.

Зэме поттон. $MBE\triangle = MBF\triangle$: MB ог'я гнпотенуза но $1\angle = 2\angle$ луэмен соос ӵошало. Соин ик: $ME = MF$, $NK = NL$ быдэсак озьы ик зэме поттӥське.

BD биссектриса вылын кыллисьтэм огшоры P точка басьтӥд ке, (169 сур.), B сэреглэн дур'ёсысьтыз солэн PP_1 но PP_2 кусып'ёсыз уг ӵошало. Зэмен ик, O точкаысь PP_2-лэн BD биссектрисаэн вожвылсконэзлэн BC дур бордэ OQ перпендикуляр ортчытыса асьмелэн: $OQ = OP_2$ луэ; нош PP_1 перпендикуляр PQ нялмыт гожлэсь ичигес, $PP_1 < PQ$; мукет ласянь $OPQ\triangle$-ысь $PQ < PO + OQ$ луэ, озьы бере уката но $PP_1 < PO + PQ$. Берпум OQ ӵошантэмысь солы ӵошась OP_2 вандэтэн воштыса, тазьы потэ: $PP_1 < PO + OP_2$, яке $PP_1 < PP_2$.



169 сур.

Озьы дыр'я BD биссектриса вылын кыллись котькуд точка B сэреглэн дур'ёсысьтыз огкеме палэнтэмын, BD биссектриса вылын котькудӥз кыллисьтэм точка сыӵе аслык уг возьы.

Соин ик,

сэреглэн биссектрисаэз со сэреглэн дур'ёсызлэсь огкеме палэнтэм точкаослэн геометрио интызы луэ.

4. Сётэм котыргожлэсь огкеме палэнтэм точкаослэн геометрио интызы, сётэм шонер гожлы валлинэсь но солэн кык пал дураз ик огкемын интыаськемо кык шонергож'ёс луо.

5. Одӥг сыӵе ик дӥнь но ӵошась ӝуждала вöзысь куиньсэргоослэн йыл'ёссылэн геометрио интызы, сётэм дӥньзылы валлинэсь но солэн кык палаз ик огкеме палэнтэм куиньсэргоослэн ӝуждалаэзлы ӵошась интыам кык шонер гож'ёс луо.

Юан'ёс.

1. Кык вожвылскись шонер гож'ёслэсь огкеме палэнтэм геометрио точкаоссылэн интызы мар луэ?
2. Кык валлинэсь шонер гож'ёслэсь огкеме палэнтэм точкаослэн геометрио интызы мар луэ?

XI. КОТЫРГОЖ НО КОТРЕТ.

§ 1. Котыргож.

Котыргожлэн шорез но радиусэз сётэмын ке, со быдэсак тодмо ини: радиус котыргожлэсь бадӟымлыксэ тодытэ, шорез нош солэсь интыаськемзэ возьматэ.

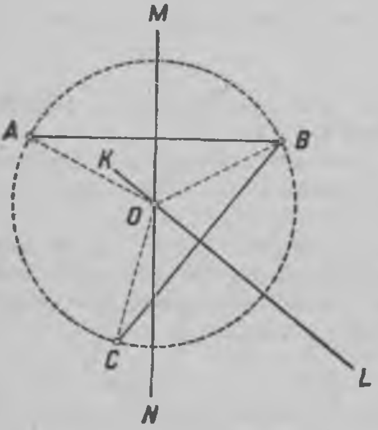
1. *Шорез луисьтэм одиг А точка пырти чошкес вылын—лыдяны луонтэм котыргож'ёс орчытыны луоз* (170 сур.); котькуд шорлэн интыэз ӵошкес вылын котькытын луоз.

2. *А но В кык точка пырти,— чошкес вылын лыд'яны луонтэм трос котыргож'ёс ортчытыны луоз* (171 сур.); сослэн шор'ёссы нырисетӥ луоно дырын сямен ӵошкес вылын котькытыназ ик интыамын уз луэ; соос *AB* вандэтлэн *O* шорвадестӥз ортчись перпендикуляр вылын кыллёзы, *AB* вандэтлэн пум'ёсыз *A* но *B* точкаос луозы.

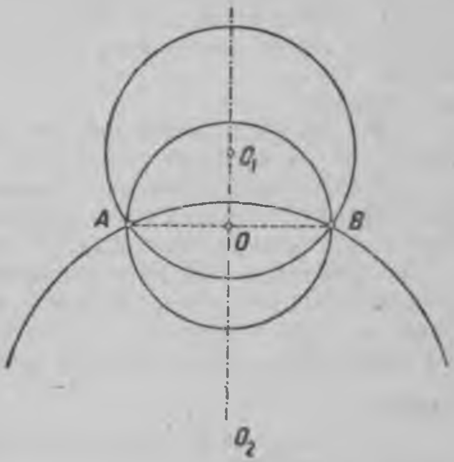

170 сур.

Зэмзэ ик, условия *AB* вандэтлэн пум'ёсыз *A* но *B* точкаос котыргож вылын кылльыны кулэ, соин ик, котыргожлэн шорез соослы ӵошась кусыпын интыаське, вандэтлэн пум'ёсызлэн огкеме палэнтэм точкаослэн геометрио интызы вандэтлэн шорвадестӥз ортчись перпендикуляр луэ.

3. *Одиг шонер гож вылын кыллисьтэм A, B но C точкаос пырти* (172 сур.) *котыргож одигзэ гинэ ортчытыны луоз.* Куинь сётэм точкаослэсь огкеме палэнтэм точка сямен талэн шорез *MN* но *KL* перпендикуляр'ёслэн вожвылскон вылазы кыллё. Перпендикуляр'ёс вандэт'ёслэн шорвадестӥзы ортчыса, кык сётэм точкаосыз котькудзэ кузэн огазеало: $MN \perp AB$ но $KL \perp BC$.



171 сур.



172 сур.

MN но *KL* перпендикуляр'ёс кык вожвылскись *AB* но *BC* шонергож'ёс бордэ перпендикуляр'ёс кадь вожвылско. *A*, *B* но *C* точкаослэсь огкемын интыаськем *O* точка со перпендикуляр'ёслэн вожвылскон точказы котыргожлэн шорез луэ. $AO = OB = OC = r$, котыргожлэн r-эз. Кык *MN* но *KL* шонер гож'ёс одӥг точкаын гинэ вожвылско. Соин ик, куинь *A*, *B* но *C* точкаос пыртӥ одӥг котыргож гинэ ортчытыны луоз.

Одиг шонер гож вылын кыллисьтэм куинь точкаос котыргожлэсь интыаськемзэ но солэсь бадзымлыксэ умой-умой тодыто.

4. Куинь A, B но C точкаос одӥг шонер гож вылын кыллё ке, соку AB но BC-лэн шорвадестӥз ортчытэм MN но KL перпендикуляр'ёс одӥг шонер гож бордэ лэзем кык перпендикуляр'ёс кадь валлинэсь, мукет сямен, соос ог'я точка уг возё. Татысь нош, одӥг шонер гож вылын кыллись куинь A, B но C точкаос пыртӥ шорзэ шедьтыны луымтээн котыргож ортчытыны уг луы. Озьы дыр'я, шонер гож котыргожен куинь ог'я точка вамен герӟаськыны уг быгаты.

Шонер гож котыргожез кык точкаости гинэ вожвылтэ.

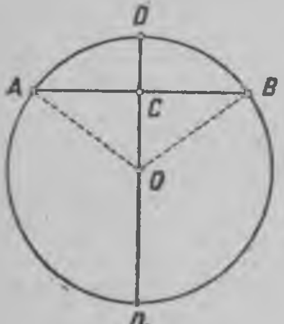
§ 2. Хорда бордэ перпендикулярной диаметрлэн аслыкез. Котретын симметри.

1. ***Теорема.*** **Хорда бордэ перпендикулярной диаметр хордаэз но соэн золскись букоэз шори люке.**

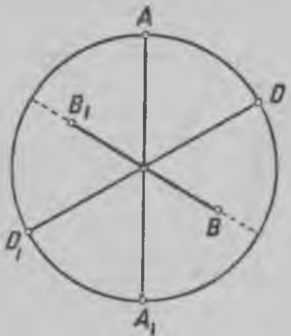
Сётэмын: DD_1 — диаметр; AB — хорда; $DD_1 \perp AB$ (173 сур.).

Зэме поттыны кулэ: 1) $AC = CB$, 2) $AD\smile = BD_1\smile$; 3) $AD\smile_1 = BD_1\smile$.

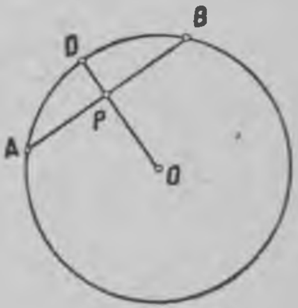
Зэме поттон. AB хордалэн пум'ёсыз A но B точкаос котыргож вылын кыллемен, AB хордалы перпендикулярной DD_1 диаметр вылын кыллись O шорлэсь огкеме палэнтэмын. AOB куиньсэрго — огкадь урдэс'ем но AB бордэ OC перпендикуляр, солэн симметриэзлэн черсэз луэ. Татысь $CA = CB$ потэ, мукет сямен, AB хорда со бордэ перпендикулярной лэзем диаметрен шортӥз люкиське. DD_1 диаметр'я котретэз куасалтом, DAD_1 буколэн точкаосыз DBD_1 буколэн точкаосыз ог интыэ усемен сэрен котыргож диаметрен шортӥз люкиськоз мукет сямен, диаметр котретлэн но котыргожлэн симметризлэн черсэз луэ. Со сяна, $AD\smile BD\smile$-эн ог интыэ усе но $AD_1\smile BD_1\smile$-эн ог интыэ усё, мукет сямен, хордаэн золскем букоос, хорда бордэ перпендикулярной диаметрен шори люкисько.



173 сур.



174 сур.



175 сур.

2. Котретын лыд'яны луонтэм трос диаметр'ёс ортчытыны луэ: соин ик, котретлэн лыд'яны луонтэм трос симметри черс'ёсыз луэ.

Симметри черс сяна, котретлэн яке котыргожлэн шорети симметриэз луэ на. Котретын но котыргож вылын шорез'я, лыд'яны луонтэм трос симметрио интыаськем кузэн-кузэн точкаос шорети симметри луэ. Сыч̆е точкаос котыр шортй ортчись шонер гож вылын но солэсь огкадь кусыпын кыллё.

Котькудйзлэн диаметрлэн пум'ёсыз A но A_1, D но D_1 точкаос (174 с.) O шор'я симметриоэсь: котыргож пушкын кыллись B но B_1 точкаос O шор'я чакласа симметрио луо; соос шорлэн пыртйз ортчись шонер гож вылын шорлэсь огкемын кыллё: $OB = OB_1$.

3. Задача. *Сётэм AB букоэз шортиз люконо* (175 сур.).

Лэсьтонзэ. Котыргожлэн шорысьтыз AB хорда бордэ перпендикуляр ортчытйськом но AB букоэн D точкаын вожвылскытозяз нуиськом. Нош шорлэсь интызэ возьматэмын ӧвӧл ке, AB хордалэн шорвадестйз OP перпендикуляр ортчытйськом: со перпендикуляр AB хордаэз D точкаэтй шортйз люкоз.

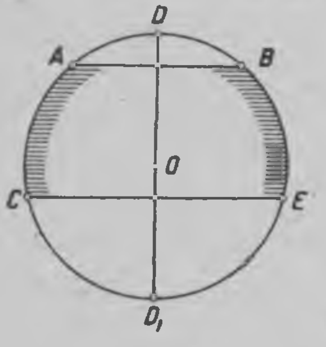
§ 3. Валлинэсь хордаос вискысь букооcлэн аслык'ёссы.

Теорема. **Валлинэсь хордаос вискысь букоос ч̆ошасесь**

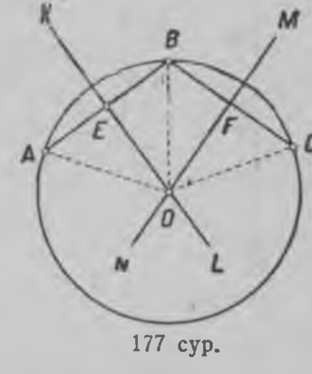
Сётэмын: AB но CE — хордаос; $AB \parallel CE$ (176 сур.).

Зэме поттыны кулэ: $AC\smile = BE\smile$.

Зэме поттон. Валлинэсь AB но CE хорда бордэ перпендикулярной D_1D диаметр ортчытом. Котретэз D_1D диаметр'я куасалтйд ке: A точка B точкаен, C точка E точкаэн но AC буко BE буко вылэ усёзы, соин ик, $AC\smile = BE\smile$.



176 сур.



177 сур.

§ 4. Котыргожлэсь но букоослэсь шорзэс шедьтон.

1 задача. *Шорез пусйымтэ котыргож сётэмын. Солэсь шорзэ шедьтоно.*

Лэсьтонэз. Сётэм котыргож вылысь куинь огшорыэсь A, B но C точкаос басьтом; AB но BC хордаос ортчытом (177 сур.) но со хордаос бордэ соослэн E но F шор вадестйз KL но MN перпендикуляр'ёс ортчытом.

Кыкез ик перпендикуляр'ёс котыргожлэн шортйз ортчозы: утчано шор MN перпендикуляр вылын но KL перпендикуляр вылын но кыллёз, иське соослэн вожвылскон O точказы луоз. O

точкаэз A, B но C точкаосын огазеаса: $AO = OB = OC$ потоз, соин ик, A, B но C точкаос O точкалэсь огкадь кусыпен интыасько, нош задачалэн условиэз'я соос котыргож вылын кыллемен, O точка котыргожлэн шорез луэ.

2 задача. *Буко сётэмын. Солэсь шорзэ шедьтоно.*

Лэсьтонэз. Котыргожлэсь шорзэ кызьы ке шедьтӥм, буколэсь шорзэ но сыӵе ик лэсьтонэн шедьто.

§ 5. Хордаослэн но букоослэн куспазы герӟаськемзы.

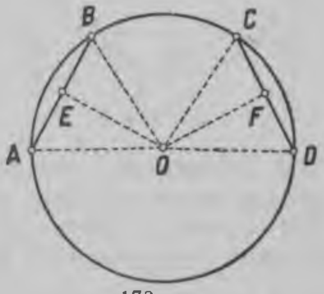
Теорема. **Одӥг котретын (яке огзылы огзы ӵошась котрет'ёсын) ӵошась хордаос ӵошась букоосыз золто но, солы пумит, ӵошась букоос ӵошась хордаосын золско.**

1) Сётэмын: AB но CD хордаос ӵошало (178 сур).
Зэме поттыны кулэ: $AB\smile = CD\smile$.
2) Сётэмын: $AB\smile = CD\smile$.
Зэме поттыны кулэ: $AB = CD$.

Зэме поттон. I. AB но CD хордалэсь пум'ёссэ O шорен огазеаса, кык огкадесь куиньсэргоос AOB но COD потозы: условизыя соослэн $AB = CD$, одӥг котыргожлэн радиус'ёсыз луэмен: $AO = OC$ но $BO = OD$.

Куиньсэргоослэн ӵошамысьтызы $AOB\angle = COD\angle$-лы ӵошамызы адске: ӵошась шор сэрегёслы ӵошась букоос ик тупало, соин ик $AB\smile = CD\smile$.

2. $AB\smile = CD\smile$, соин ик соослы тупась шор сэрег'ёс ӵошасесь луозы, мукет сямен, $AOB\angle = COD\angle$. AOB но COD куиньсэргоосын AO но OC, OB но OD дур'ёссы одӥг котыргожлэн ик радиус'ёсыз луыса ӵошало, нош соос куспысь сэрег'ёс но ӵошасесь, соин ик $AOB\triangle = COD\triangle$, татысь нош AB но CD хордаослэн ӵошасесь луэмзы потэ: $AB = CD$.



178 сур.

§ 6. Хордаос куспын но сооослэн шорысен кусыпсылэн герӟаськонзы.

1. ***Теорема.*** **Одӥг котрет яке котрет'ёсын ӵошасесь хордаос шорезлэсь огкеме палэнтэмын но, солы пумит, шорлэсь огкеме палэнтэм хордаос ӵошало.**

Сётэмын: $AB = CD$; $OE \perp AB$ но $OF \perp CD$ (178 сур.).
Зэме поттыны кулэ: $OE = OF$.

Зэме поттон. AOB но COD куиньсэргоослэн ӵошанысьтызы сооослэн жуждалаоссы ӵошасесь луо; мукет сямен $OE = OF$.

Сётэмын: $OE \perp AB$ но $OF \perp CD$; $OE = OF$.
Зэме поттыны кулэ: $AB = CD$.

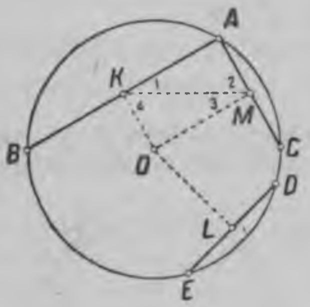
Зэме поттон. Шонерсэрег'ем AOE но COF куиньсэргоосын радиус'ёс $AO = CO$ но условия $OE = OF$-лы, соин ик $AOE\triangle = COF\triangle$; татысь нош $AE = CF$ потэ; нош $AE = CF$-лы бере, мукет сямен, AB но CD хордаослэн ӝыныосыз ҷошасесь, соин ик ас сэос но хордаос но ҷошасесь; озьы дыр'я $AB = CD$.

2. ***Теорема.*** **Котыргожлэн кык хордаосыз пӧлысь, пичи хорда шорлэсь кыдёкын интыаськемын но, солы пумит, котыргожлэн бадӟым хордаэз шорезлы матынгес.**

Сётэмын: O котыргож но хорда $AB > DE$ (179 сур.).

Зэме поттыны кулэ: $OK < OL$.

Зэме поттон. AB хордалэн A пумысьтыз DE хордалы $= AC$ ортычытӥськом, соку сооcлэн шорысен кусыпсы ҷошасесь: $OM = OL$, K но M-эз KM шонер гожен огазеалом но, KAM куиньсэргоэз эскером. Отын, AB но AC хордаослэн ӝыныоссы ҷошасьтэм гинэ луэмен $AK > AM$, соос пӧлысь $AB > AC$, соин ик $2\angle < 1\angle$ (куиньсэргоын бадӟым дурлэн пумитаз бадӟым сэрег ик кылле). KOM куиньсэргоын асьмелэн таҷе луэ: $3\angle = 90° - 2\angle$ но $4\angle = 90° - 1\angle$. Та ҷошан'ёслэсь бур пал люкетсэс ҷошатыса, мукет сямен, $90° - 2\angle$ но $90° - 1\angle$ разностьсэ ҷошатыса, тазьы потэ: кулэстӥсь $2\angle$ $1\angle$ кулэстӥсьлэсь бадӟымгес, соин ик, $90° - 2\angle < 90° - 1\angle$, соин ик $3\angle < 4\angle$ луэ; нош куиньсэргоын пичи сэргеглэн пумитаз пичи дур ик кылле, соин ик $OK < OM$. OM-эз солы ҷ шась OL вандэтэн воштыса, потэ: $OK < OL$, соэ ик зэме поттыны кулэ вал.

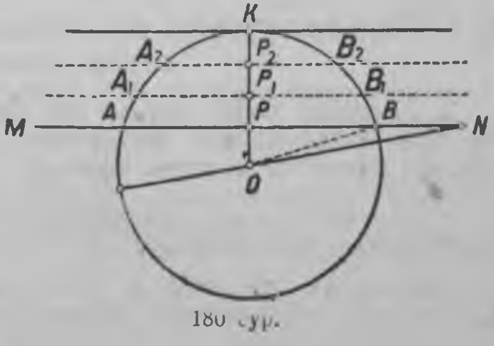


179 сур.

§ 7. Шонер гожлэн котыргож'я пӧртэм интыаськонёсыз. Вандӥсь но йӧтскись гож'ёс.

1. Шонер гож котыргож ласянь аслаз интыаськеменыз со котыргожен: 1) кык ог'я точкаос, 2) одӥг ог'я точка гинэ 3) одӥг но ог'я точкатэм луыны быгатэ.

Одӥг шонер гож вылын кыллись куинь точкаос пыртӥ котыргож ортчытыны луымтээн шонер гожен котыргожен котыргож кык точкаослэсь трос ог'я возьыны уг быгаты



180 сур.

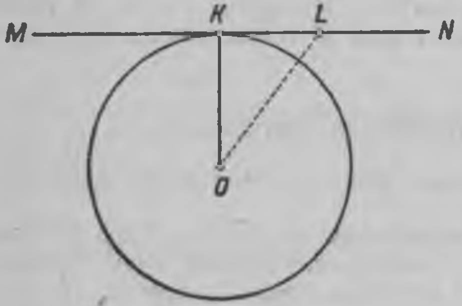
2. Котыргожез вожвылтӥсь MN шонер гож (180 сур.) соин кык ог'я A но B точкаос возё но вандӥсь шуса нимаське; MN вандӥсьлэн AB вандэтэзлэн котыргож вылын

кыллись A но B пум'ёсыз AB хорда луэ. MN вандӥсь гож котыргожлэн шор интыысьтыз OP кемын интыаське, соин ӵош $OP \perp MN$ но $OP < r$.

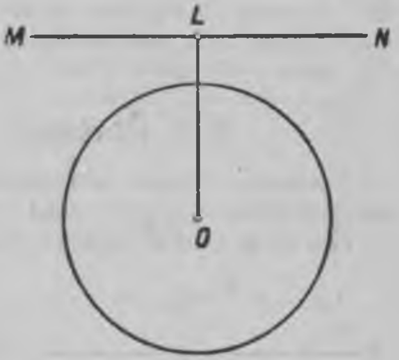
Котыргожлэн шортӥз ортчись вандӥсь гож **шор вандӥсь** гож шуса нимаське но солэн симметриэзлэн черсэз луэ.

3. MN вандӥсь гожез шорысьтыз ялан палэнтыса аслыз ик валлин карса воштӥм ке, соку: 1) солэн пушпал люкетэз AB хорда ялан кулэсме, $AB > A_1B_1 > A_2B_2$...; 2) шорысен солэн кусыпез будэ, $OP < OP_1 < OP_2$...; 3) котыргожен вожвылскон A но B точкаосыз матэало.

MN вандӥсь гож интызэ воштыса сыӵе интыаськон басьтэ, ку ке солэн кыкез ик котыр гожен вожвылскон точкаосыз A но B одӥг K точкаэ огазеаськозы, вандӥсь гожлэн пушпалыз — AB хорда точкаэ берытскоз.



181 сур.



182 сур.

MN вандӥсь гож сыӵе интыаськон возён дыр'яз (181 сур.) **йӧтскись** шуса нимаське, солэн котыргожен ог'я K точкаэз **йӧтскон точка** шуса нимаське. OK-лы ӵошам йӧтскись гожысен шорозь кусып котыргожлэн радиусэз луэ: $OK = r$. Озьы дыр'я, котыргожен одӥг гинэ ог'я точка возись шонер гож **йӧтскись** гожен нимаське; со шорысен котыргожлэн радиусэзлы ӵошась кусыпын интыаське.

4. Котыргожлэн шорысьтыз OL кусып кеме палэнтэм MN шонер гож (182 сур.), радиуслэсь бадӟым, $OL > r$ котыргожен ог'я точка уг возьы но котыргожлэн педпалаз (сьӧраз) интыаськемын.

Озьы дыр'я MN шонер гож, котыргожлэн шорез'я интыаськемез шорысен солэн d кусыпеныз тодытӥське: 1) $d < r$, MN вандӥсь гож; 2) d r, MN йӧтскись гож; 3) $d > r$, MN котыргожлэн педпалаз кылле.

5. *Теорема.* Йӧтскон точкаэ ортчытэм йӧтскись гож радиуслы перпендикулярной луэ.

Сётэмын: MN – йӧтскись гож, K — йӧтскон точка (181 сур.).

Зэме поттыны кулэ: $OK \perp MN$.

Зэме поттон. MN йӧтскись гож вылын кытыназ ке L точка котыргожлэн сьӧраз кылле, соин ик со точкаэн котыргожлэн шореныз кусыпез радиуслэсь бадӟым: $OL > OK$. Озьыэн тӥни O точкаысен йӧтскон гожозь OK кусып котькудӥзлэсь вакчи кусып луэ, точкалэн шонер гожозь котькудӥзлэсь вакчи кусыпез перпендикуляр луэ. Озьы дыр'я $OK \perp MN$.

6. ***Теорема*** (*пумит*). **Котыргож вылын кыллись радиуслэн пумаз луись котькыӵе перпендикулярной шонер гож йӧтскись гож луэ.**

Сётэмын: $MN \perp OK$ (181 сур.)

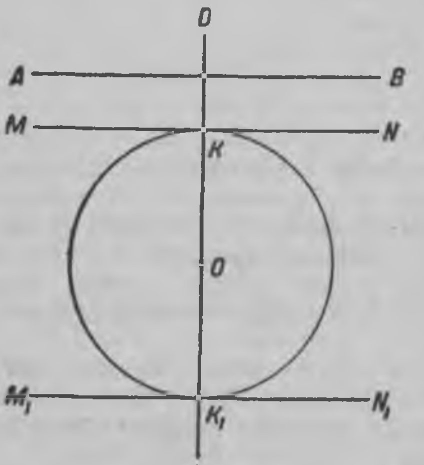
Зэме поттыны кулэ: MN-лэсь йӧтскись гож луэмзэ.

Зэме поттон. OK перпендикуляр, O точкаысь MN шонергож бордэ ортчытэм котькыӵе OL шонер гожлэсь вакчи, соин ик $OL > OK$ но L точка котыргожлэн сьӧраз кылле: K точка MN шонергож вылысь огназ гинэ со котыргож вылын но кыллись точка луэ; котыргожен, одӥг ог'я K точка возись MN шонер гож,— йӧтскись гож.

§ 8. Йӧтскись гож'ёсыз ортчытон.

1 задача. *Сётэм котыргожысь сётэм K точкаэти йӧтскись гож ортчытоно* (181 сур.).

Лыд'янэз. OK радиус ортчытӥськом но K точка пыр OK-лы перпендикулярной MN шонер гож лэзиськом. Та перпендикуляр ик утчано йӧтскись гожмы луоз.



183 сур.

2 задача. *Сётэм котыргож бордэ, сётэм AB шонер гожлы валлин йӧтскись шонер гож ортчытоно* (183 сур.).

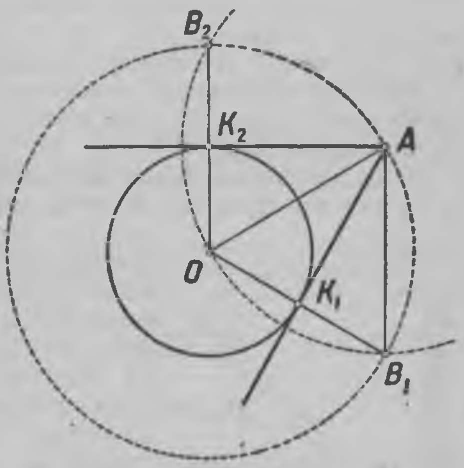
Лыд'янэз. Котыргожлэн O шор пыртӥз шонер гож $CD \perp AB$ ортчытом: та CD шонер гож, котыргожез кык — K но K_1 точкаостӥз вожвылтоз. Собере K но K_1 точкаос пыртӥ KK_1 диаметрлы перпендикулярноесь MN но M_1N_1 шонер гож'ёс ортчытом. Кыкез ик та шонергож'ёс утчано йӧтскись гож'ёс луо.

3 задача. *Педпал A точкаысь сётэм котыргож бордэ йӧтскись гож'ёс ортчытоно* (184 сур.).

Лыд'янэз. Задачамы лыд'ямын но сётэм A точкаысь шорез O точкаын луись сётэм котыргож бордэ AK_1 йӧтскись гож ортчытэмын шуса малпалом. O точкаэз K точкаэн огазеаса, шонерсэрег'ем AOK_1 куиньсэрго потоз. OK_1 радиуслэн кузёмытэмаз K_1B_1 вандэт $= OK_1 = r$ интыалом. B_1-эз A-эн огазеаса огкадь урдэс'ем AOB_1 куиньсэрго потоз, со куиньсэргоын AK_1 жуждала луэ, соин ик солэн медианаэз но луэ. Озьы дыр'я, огкадь урдэс'ем AOB_1 куиньсэрголэсь куинетӥ B_1 йылзэ шедьтонэ та задачамы кыстӥське.

Со куиньсэрголэн кык йыл'ёсыз: A — сётэм точка но O — сётэм котыргожлэн шорез сётэмын. B_1 точка кылле: 1) шорез'я A точкаын но A точкалэн O шорозь кусыпезлы ӵошась AO радиусо котыргож вылын но 2) шореныз O точкаын но сётэм котыргожлэн диаметрезлы ӵошась OB_1 радиусо котыргож вылын кылле; соин ик B_1 точка кык котыргож'ёслэн ик вожвылскон точказы луэ.

2) Лэсьтонэз. Сётэм котыргожлэн диаметрезлы ӵошась радиусо, шореныз O точкаын луись нырисетӥ юрттӥсь котыргож ортчытом. Собере шорезлы A точкаэз басьтыса A точкаысен сётэм котыргожлэн O шор дорозяз кусыплы AO-лы ӵошась радиусо кыкетӥ юрттӥсь котыргож ортчытом. Кыкетӥ юрттӥсь котыргожлэн нырисетӥ котыргожен вожвылскон B_1 но B_2 точкаосыз O шорен огазеалом; OB_1 но OB_2 шонер гож'ёс, сётэм котыргожез K_1 но K_2 точкаостӥ вожвылтом; со K_1 но K_2 точкаос, педпал A точкаысь, сётэм котыргож бордэ ортчытэм AK_1 но AK_2 йӧтскись гож'ёслэн йӧтскон точказы луэ.



184 сур.

3) Зэмепоттон. B_1 точкаэз A точкаэн огазеаса огкадь урдэс'ем AB_1O куиньсэрго поттом. Отын шорез A точкаын луись котыргожлэн радиус'ёсыз луэмен $AO = AB_1$; со сяна лэсьтэммыя $OB_1 = 2OK_1$ ӵошаменыз, K_1 точка OB_1-лэн шорвадесэз луэ, татысь нош, огкадь урдэс'ем AOB_1 куиньсэргсын медианаэз но ӝуждалаэз но AK_1 шонер гож луэ, мукет сямен, K_1 точкаын со OB_1-лы перпендикулярной луэ. Озьы дыр'я, $AK_1 \perp OK$, мукет сямен, AK_1 шонер гож OK_1 радиуслы перпендикулярной, со радиуслэн котыргож вылын кыллись K_1 пумез луэ, соин ик сётэм котыргожлы со йӧтскись гож. Педпал A точкаысь, сётэм котыргож бордэ ортчытэм AK_2 шонер гожлы кыкетӥ йӧтскись гожлы но таӵе эсэплан вуттӥське.

4) Кык котыргож'ёс кык K_1 но K_2 точкаосын вожвылско, соин ик, сётэм задача кык пӧртэм лыд'янэз кутыны лезе, мукет сямен, котыргожлэн педпалаз кыллись сётэм A точкаысь сётэм котыргож бордэ кык AK_1 но AK_2 йӧтскись гож'ёс орчтыны луоз.

Йӧтскись гожлэн кузьдаэзлы, пум'ёсыз сётэм A точка но йӧтскон K_1 яке K_2 точкаос луись вандэт басьтӥське.

§ 9. Одӥг со точкаысь ик ортчытэм йӧтскись гож'ёслэн аслыксы.

1. ***Теорема.*** Котыргожлэн педпалаз кыллись точкаысь котыргож бордэ ортчытэм йӧтскись гож'ёс ӵошасесь.

Сётэмын: AK_1 но AK_2 — йӧтскись гож'ёс, K_1 но K_2 йӧтскон точкаос (184 сур.).

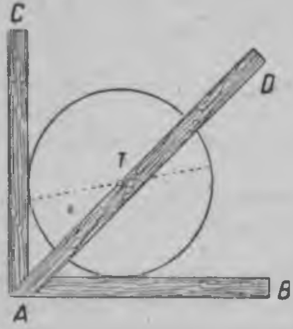
Зэме поттыны кулэ: $AK_1 = AK_2$

Зэме поттон. Шонерсэрег'ем AOK_1 но AOK_2 куиньсэргоос ӵошало; соослэн OA дурзы — ог'я гипотенуза, нош радиус'ёс луса $OK_1 = OK_2$. $AK_1 = AK_2$ ӵоша шуса куиньсэргоослэн ӵошаныськызы потэ.

2. Со куиньсэргоослэн ӵошаныськызы ик $OAK_1 \angle = OAK_2 \angle$-лы, мукет сямен, *$OA$ одӥг точкаысь потись кык йӧтскись гож'ёсын пӧрмытэм A сэреглэн биссектрисаэз луэ.*

Шортиз вандись AO педпал A точкаысь сётэм котыргож бордэ ортчытэм йӧтскись гож'ёсын пӧрмытэм A сэреглэн симметри черсэз луэ.

3. Шорутчан. Котретлэсь шорзэ шедьтон понна куд ке дыр'я шорутчан шуса нимаськись приборез уже куто. Солэн лэсьтэмез 185 суред вылын возьматэмын. Со шонерсэреген юнматэм кык AB но AC планкаослэн но куинетӥ AD планкалэсь юнматэмын. Куинетӥэзлэн планкалэн одӥг палэз шонерсэрголэн биссектрисаэныз тупа. Та приборлэн ужез, кык йӧтскись гож'ёсын пӧрмытэм сэреглэн биссектрисаэз котретлэн шортӥз потэмзэ тодыса лэсьтэмын.



185 сур.

Шорзэ шедьтоно котрет бордэ шорутчанэз кык пол бордаз кароно; AD планкалэн T урдэс кузяз бордаз каремлы быдэ шонер гож ортчытоно; котрет вылэ ортчытэм кык шонер гож'ёслэн вожвылскон точкаэз котретлэн O шорез луэ.

Шорутчанлэн йылысеныз йӧтскон точкаозь кусыпез со котретлэн радиусэзлы ӵоша, малы ке шуид, котрет шорысь со шорутчанлэн йӧтскон точкаосаз радиус'ёс ке лэзид, соос со урдэс'ёсын квадрат пӧрмытозы.

Юан'ёс но уж'ёс.

1. Котыргожлэн A точкаэзлы, кызьы солэсь шоро симетрио точказэ шедьтоно?
2. Йӧтскись гожлэн, вандӥсь гожлэн сярись кыӵе пӧртэмлыкез?
3 Кык валлинэсь йӧтскись гож'ёс вискысь кусып марлы ӵоша?
4. *Хордалы валлин йӧтскись гож йӧтскон точкаэтиз хордаэн золскон букоэз шортиз люкемзэ* зэме поттоно.
5. Сётэм A точкатӥ ортчись 3 *см*-ем радиусо котыргож'ёслэн шорзылэн геометрио интыэз мар луэ? Чертёж лэсьтоно.
6. 4 *см*-ем радиусо котыргожын котыргож вылысь сётэм A точка пыртӥ ортчись 4 *см* хорда лэсьтоно. Кӧня сыӵе хорда лэсьтыны луоз?
7. O шорен котретысь A точка пыртӥ MN хорда ортчытоно, со хорда A точкаын шортӥз люкиське.

8. Котыргожлэн A точкаысь шорезлэсь 3 *см* кемым интыаськись кык огзылы огзы ваче перпендикулярной луись но ӵошасесь хордаос ортчытоно. Сооослэсь кузьдалазэс шедьтоно.

9. Сётэм MN шонергожез солэн P точкааз йӧтскись котыргож ортчытоно. Кӧня котыргож ортчытыны луонзэ эскероно но сооослэн шор ылэсь кытын кыллемзэс возьматоно.

10. Дур’ёсыз’я $a = 5$ *см* $ABCD$ квадрат сётэмын. Соллэн дур’ёсыз ог дырын ик одӥг когыргожлы хордаос мед луозы нош мукетэзлы йӧтскись гож луись кык котыргож’ёс ортчытоно.

11. Радиус’ёсынызы 3 *см* но 5 *см* лы ӵошась кык концентро котыргож’ёс ортчытоно. Собере бадӟым котыргожын, пичи котыргожлы йӧтскись гож‘ёс луись кык валлинэсь хордаос ортчытоно но со хордаослэсь огзылэсь огзылы ӵошамзэс зэме поттоно.

12. A точка котыргожлэн сьӧраз кылле. 1) Лэсьтонэн солэсь котыргож дорысь котькудӥзлэсь вакчи но кузь кусыпсэ шедьтоно.

Валэктон. Котретысен точкаозь шортӥз вандӥсь вандэт вакчи кусыпен нимаське.

2) A точкалэн r радиусо котыргож дороз, котькудӥзлэсь бадӟым кусыпез, котькудӥзлэсь пичи кусыпезлэсь кӧнялы бадӟым?

3) Сётэм $r = 5$ *см* котыргож бордысь 2 *см*-лы ӵошась кусыпе палэнтэм точкаослэн геометрио интызэс лэсьтоно.

13. Кык сётэм AB но CD: 1) валлинэсь но 2) важвылскисесь шонер гож’ёс бордэ йӧтскисесь котыргож’ёслэн шорзылэн геометрио интызы мар луэ?

14. $r = 5$ *см* радиусо котыргоже сётэм MN шонер гожлы перпендикулярной луись йӧтскись гож ортчытоно. Кӧня котыргож ортчытыны луоз но сооослэн кусыпсылэсь бадӟымлыксэ эскероно.

15. *O котыргож бордэ MN йӧтскись гож ортчытэмын. Огшоры басьтэм AB диаметрлэн A но B пум’ёсысьтыз йӧтскись гож бо дэ перпендикуляр‘ёс $AC = a$ но $BD = b$ ортчытид ке, со перпендикуляр‘ёслэн суммазы диаметрлы ӵошамзэ, мукет сямен, $a + b = 2r$ луэмзэ зэме поттоно.*

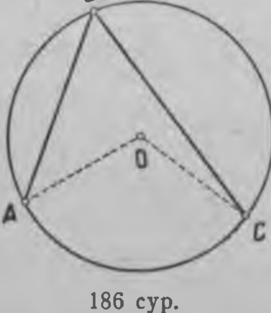
16. Сётэм котыргожлэн ӵошась хордаосызлэн шорвадес’ёсызлэн геометрио интызы мар луэ?

XII. СЭРЕГ‘ЁСЫЗ МЕРТАН.

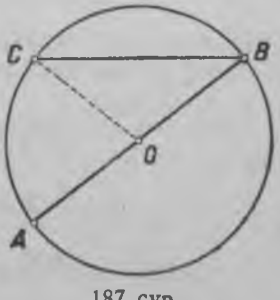
§ 1. Йылэныз котыргож вылын луись сэрег но соэ мертан.

1. Йылэныз котыргожлэн шораз луись сэрег шор сэрег луэ но солэн дур’ёсыз куспы пырем букоэн мертаське.

Йыл’ёсыз котыргожлэн шораз кыллисьтэм,— котыргож вылын, солэн сьӧраз яке пушказ кыллись сэрег’ёсыз эскером.



186 сур.



187 сур.

2. *Йылэз котыргож вылын кыллись но дур‘ёсыз хордаос луись сэрегез пушпал гожтэм сэрег шуса нимало.*

$ABC\angle$ — пушпал гожтэм сэрег (186 сур.), котыргожлэн AC буко вылаз пыкиське, AC буколы AOC шор сэреген тупа.

3. ***Теорема.*** **Пушпал гожтэм сэрег шор сэреглэн ӝыныэзлы ӵошаса, буко йылэ ик пыкиське но со буколэн ӝыныэныз мертаське.**

Сётэмын: $ABC\angle$ пушпал гожтэм сэрег, AB — хорда, BC — хорда (186 сур.).

Зэме поттыны кулэ: $ABC\angle = \frac{AOC\angle}{2}$

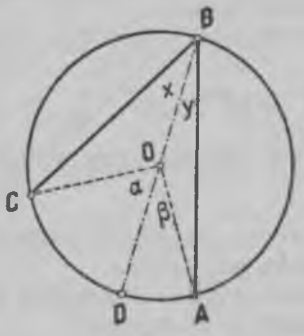
Земе поттон. Куинь пӧртэм луон'ёсыз эскером.

1) Пушпал гожтэм сэреглэн дур'ёсыз BA диаметр но BC хорда луэ (187 сур.). C точкаэз O шорен огазеаса, $OB = OC = r$ луэмен, огкадь урдэс'ем $BCO\triangle$ потоз; AOC шор сэрег BOC куиньсэрголэн педпал сэрегез луэ, соин ик $AOC\angle = B\angle + C\angle$ но $B\angle = C\angle$, соин ик $AOC\angle = 2\,B\angle$-лы озьы луэмен $B\angle$ яке $ABC\angle = \frac{AOC\angle}{2}$.

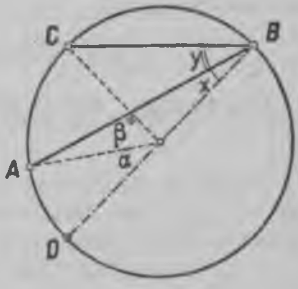
AOC шор сэрег AC букоэн мартаське, нош пушпал гожтэм сэрег шор сереглэн ӝыныэзлы ӵоша, соин ик, со пыкиськон букоэзлэн ӝыныэныз мертаське:

$$ABC\angle \text{ мертаське } \frac{AC\smile}{2}.$$

2) Пушпал гожтэм ABC сэреглэн дур'ёсыз AB но BC хордаос луо. Со хордаос вискын котыргожлэн O шорез (188 сур.).



188 сур.



189 сур.

Пушпал гожтэм сэрегез $x\angle$-лы но $y\angle$-лы но шор сэрегез $\alpha\angle$-лы но $\beta\angle$-лы люкись BD диаметр ортчытом.

$$x\angle = \frac{\alpha\angle}{2} \text{ но } y\angle = \frac{\beta\angle}{2}$$

озьы ке

$$x\angle + y\angle = \frac{\alpha\angle}{2} + \frac{\beta\angle}{2} = \frac{\alpha\angle + \beta\angle}{2}$$

Озьы,

$$ABC\angle = \frac{AOC\angle}{2};\ ABC\angle \text{ мертаське } \frac{AC\smile}{2}.$$

3) Пушпал гожтэм ABC сэреглэн дур'ёсыз BA но BC хордаос луо, соос O шорлэн огпал дураз интыамын (189 сур.).

$$ABC\angle = CBD\angle - ABD\angle \text{ но } AOC\angle = COD\angle - AOD\angle,$$

нош

$$CBD\angle = \frac{COD\angle}{2} \text{ но } ABD\angle = \frac{AOD\angle}{2},$$

соин ик,

$$CBD\angle - ABD = \frac{COD\angle}{2} - \frac{AOD\angle}{2} = \frac{COD\angle - AOD\angle}{2}$$

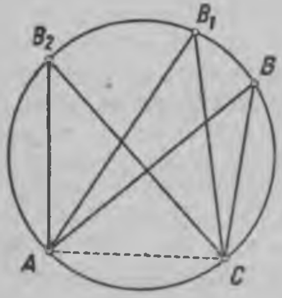
озы,

$$ABC\angle = \frac{AOC\angle}{2}; \ ABC\angle \text{ мертаське } \frac{AC\smile}{2}.$$

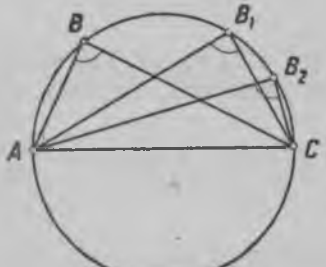
Пушпал гожтэм сэреглэн бадзымлыкез котыргожлэн шорез'я дур'ёсызлэн интыаськемез бордысь уг поты но котьку ик маке буко вылэ пушпал гожтэм сэрег пыкиське, со шор сэреглэн жыныэзлы чоша.

Следствиос. **1) Одӥг буко вылэ ик пыкиськись пушпал гожтэм сэрег'ёс ваче ӵошасесь** (190 сур.)

$B\angle, B_1\angle, B_2\angle$ но мук. одӥг со буко вылэ ик пыкисько; нимысьтыз соос сэрег пыкиськем буколэн ӝыныэныз мертаське, соин ик, соос куспазы ӵошало: $B\angle = B_1\angle = B_2\angle$ но мук.



190 сур.



191 сур.

A но C точкаосыз AC хордаэн огазеалом. Та хорда, ABC буколэн котькуд B точкаысьтыз одӥг со B сэреген ик адӟиське шуса вералo.

2) Диаметр вылэ пыкиськись пушпал гожтэм сэрег,— шонер сэрег.

$B\angle = B_1\angle = B_2\angle = d$ (191 сур.), нимысьтыз соос 180° буко вылэ пыкӥськемын, солэн ӝыныэныз мертаське но, соин ик, 90°-лы ӵоша.

4. ***Теорема.*** **Йӧтскон точкаысь ортчытыса, йӧтскись гожен но хордаэн пӧрмытэм сэрег, солэн дур'ёсыз виске пыртэм буколэн ӝыныэныз мертаське.**

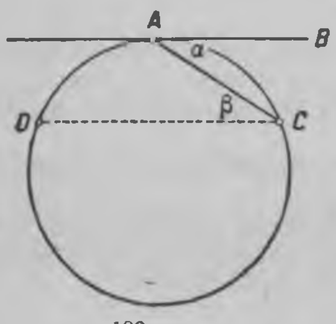
Сётэмын: $A\text{Б}$ — йӧтскись гож, AC — хорда (192 сур.).

Зэме поттыны кулэ: $BAC\angle$ - лэсь $\frac{AC\smile}{2}$ -эн мертаськемзэ.

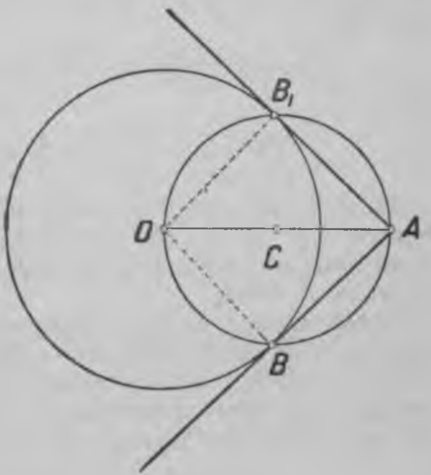
Зэме поттон. Юрттӥсь шонер гож $CD \parallel AB$ ортчытӥськом (192 сур.). Соку кечат кыллись луэмен $\alpha\angle = \beta\angle$ но кык валлинэсь шонер гож'ёс йӧтскись гож AB но CD хорда вискысь букоос луэмен $AD\smile = AC\smile$-лы.

Озьы $\beta\angle$ мертаське $\frac{AD\smile}{2}$ нош $\beta\angle = \alpha\angle$ но $AD\smile = AC\smile$ озьы дыр'я α мертаське $\frac{AC\smile}{2}$

5. Задача. *Педпал A точкаысь сётэм котыргож бордэ йӧтскись гож'ёс ортчытоно (кыкети амал)* (193 сур.).

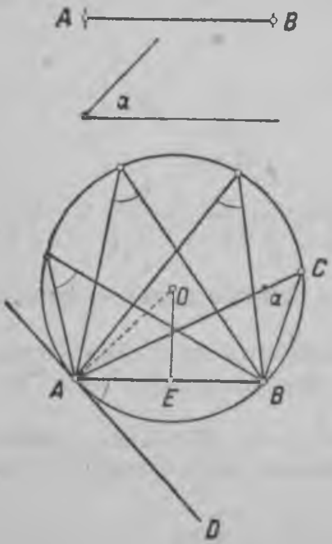


192 сур.



193 сур.

Лэсьтонэз. A точкаэз O шорен огазеалом но OA-эз диаметрлы басьтыса, юрттӥсь котргож ортчытӥськом; со котыргож сётэм котыргожез B но B_1 точкаостӥ вожвылтоз; A но B но A но B_1 точкаос пыртӥ шонер гож'ёс ортчытыса, утчано йӧтскись AB но AB_1 гож'ёс потозы. Зэмзэ ик, $AB \perp OB$ но $AB_1 \perp OB_1$, мукет сямен, сётэм котыргожлэн радиусэзлы, со $B\angle$ но $B_1\angle$ шореныз C точкаын луись котыргожлэн OA диаметрез вылэ пушпал гожтэм сэрег'ёс пыкиськемен со сэрег'ёс шонересь.



194 сур.

6. Задача. *Сётэм AB вандэт вылэ α сётэм сэрегез тэрытись сегмент лэсьтоно* (194 сур.).

1) Лыд'янэз. Задача лыд'ямын но, сётэм AB вандэтэ хорда вылэ сётэм $\alpha\angle$ тэрытсь ABC сегмент лэсьтэмын шуса, малпа лом. A точкаэтӥ йӧтскись AD гож ортчытыса $BAD\angle = ACB\angle = \alpha\angle$ потоз. Соос одӥг со ABC буколэн ик жыныэныз мертаськo. ACB сегмент интыаськемо котретлэн шорез AO но OE перпендикуляр'ёслэн вожвылсконазы луэ.

2) Лэсьтонэз. Сётэм AB вандэтлэн A пумаз (194 сур.). $DAB\angle = \alpha$ лэсьтӥськом; $AO \perp AD$ ортчытӥськом но AB вандэт-

лэн E шорвадестӥз $EO \perp AB$ ортчытӥськом. AO но EO перпендикуляр'ёслэн вожвылскон точкаэз утчано котыргожлэн шорез луэ. Собере нош OA радиусэн котыргож ортчытыса, утчано ABC сегмент поттом. ACB буколэн котькуд точкаэз сётэмлы ӵошась сэреглэн йылэз луэ.

3) Йылэныз ABC буко вылын нимысьтыз сэрег AB буколэн жыныэныз мертаське но соин ик сётэм α сэреглы ӵоша.

4) Сётэм $\alpha\angle$-эз AB вандэтлэн пумаз но солэн ик огпал дураз лэсьтӥд ке, соку со лэсьтон симметрио лэсьтэм AB вандэт'я интыаськись сегмент сётоз.

5) Та сётэм задачаэз лыд'ямен таӵе йылпум'ян лэсьтыны луоз:

Сётэм AB вандэт вылэ хорда вылын сямен лэсьтэмын но сётэм сэрег'ёсыз тэрытись кык симметрио сегмент'ёслэн букозы, сётэм AB вандэтэз отысь сэреген адзиськись точкаослэн геометрио интызы луэ.

6) Соэ люкемен утчано йылсо сэрегез интыась сегмент, AB сётэм хорда котретлэн кык сегмент'ёсыз пӧлысь бадӟымез луэ.

Сётэм β сэрег мырк ке, соку AB хордаэн котрет сегмент'ёслы люкиськемен, со сэреглэн утчано сегментэз пичиэз луоз.

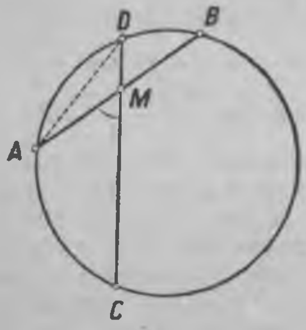
Шонер сэрег луон дыр'я сётэм AB вандэт диаметр луоз, соку кыкез ик сегмент'ёс ӵошасесь, мукет сямен, диаметрез AB луись котыргожен геометрио интызы луоз.

§ 2. Йылэныз котрет пушкын луись сэрег но соэ мертан.

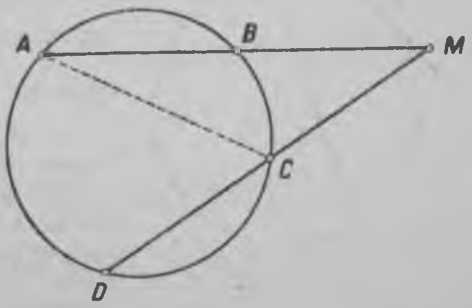
1. *Теорема.* **Йылэныз котрет пушкын луись сэрег — солэн дур'ёсызлэн кузёмытэм вискысь букоослэн суммазылэн жыныэныз мертаське.**

Сётэмын: $AMC\angle$ — йылэныз котрет пушкын луись сэрег (195 сур.).

Зэме поттыны кулэ: $AMC\angle$ мертаське $\frac{AC\smile + BD\smile}{2}$



195 сур.



196 сур.

Зэме поттон. AMC сэреглэсь дур'ёссэ котыргожен B но D точкаосаз вожвылскытозь кузёмытом но AD хорда ортчытом; ADM куиньсэрго поттом, со куиньсэрголы $AMC\angle$ — педпал сэрег.

Педпал $AMC\angle = A\angle + D\angle$ нош $A\angle$ мертаське $\frac{BD\smile}{2}$, D мертаське $\frac{AC\smile}{2}$, соин ик $AMC\angle = A\angle + D\angle$ мертаське

$$\frac{AC\smile + AD\smile}{2}$$

2. Йылэныз котыргож пушкын луись котькыӵе сэрегез, кык хордаос вожвылскон дыр’я пӧрмем сэрег’ёслэн одӥгез шуса эскерыны луэ.

Ку ке хордаослэн вожвылскон точказы котыргожлэн шореныз тупа ке, соку сэрег ог дырын ик шор сэрег но луэ, соин ик, шор сэрег но солэн дур’ёсызлэн кузёмытэм вискысь буколэн суммаэзлэн ӝыныэныз мертаське шуса вераны луэ.

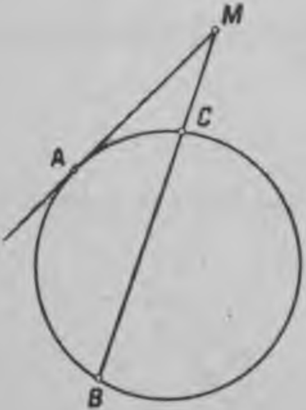
Нош хордаослэн вожвылскон точказы вошттӥськыса, котыргож бордэ матэгес вуэ ке, одӥгез хордаос вискысь сэрег кулэсме; ку ке хордаослэн вожвылскон точказы котыргож вылын луэ, соку ик нуль но луэ; соин ик, хордаосын пӧрмытэм сэрег сярись теорема та сётэм дыр’я луонлы но зэм кыле.

§ 3. Йылэз котретлэн педпалаз луись сэрег но соэ мертан.

1. ***Теорема.*** **Йылэз котретлэн педпалаз луись сэрег, солэн дур’ёсызлэн вискысьтыз букоослэн ӝыны разностеныз мертаське.**

Сётэмын: $M\angle$ йылэз котретлэн педпалаз:
MA но MD — ван йсь гож‘ёс (196 сур.)

Зэме прттыны кулэ: $M\angle$ мертаське $\frac{AD\smile - BC\smile}{2}$



197 сур.

Зэме поттон. Куинь учыр’ёсыз эскером: 1) $M\angle$ кык вандӥсь гож’ёсын MA но MD пӧрмытэмын. Юрттӥсь AC хорда ортчытыса, AMC куиньсэрго потоз, солы $ACD\angle$ педпал луэ. Татысь, $M\angle = ACD\angle - A\angle$ потэ; нош $ACD\angle$ мертаське $\frac{AD\smile}{2}$ но $A\angle$ мертаське $\frac{BC\smile}{2}$, соин ик $M\angle$ мертаське $\frac{AD\smile - BC\smile}{2}$

2) $M\angle$ пӧрмытэмын MA йӧтскись гожен но MB вандӥсь гожен (197 сур.)

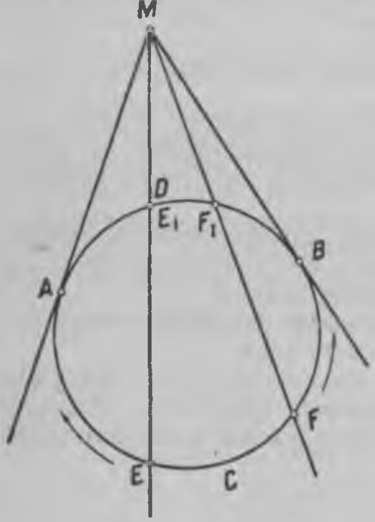
MA йӧтскись гожез, вандӥсь гожез сямен эскерыса, солэн кык ог’я точкаосыз котыргожен одӥг A точкаэ усемын, озьы дыр’я, кык вандӥсь пӧрмытэм сэрегез мертан сярись талэсь азьвыл лэсьтон йылпум’ян али но зэм кыле но $M\angle$мертаське $\frac{AB\smile - AC\smile}{2}$.

Та учырез ас понназ но AC хорда ортчытыса зэме поттыны луэ (197 сур.) но ACM куиньсэргоэз эскероно: $M\angle = ACB\angle - CAM\angle$.

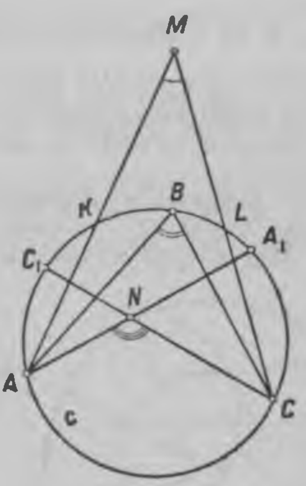
3) $M\angle$ кык йöтскись гож’ёсын MA-эн но MB-эн пöрмытэмын (198 сур.).

ME но MF вандӥсь гож’ёс M точка вöзтӥ бергаса MA но MB йöтскись гож’ёслэсь интызэс мед басьтозы; озьы дыр’я EF буко ABC буко дорозь будоз, нош E_1F_1 буко ADB буко дорозь, соку ни, йöтскись гож’ёсын пöрмытэм $M\angle$ мертаськоз $\frac{ACB\smile - ADB\smile}{2}$

Кык йöтскись гож’ёсын пöрмытэм сэрег котыртиз гожтэм сэрег шуса нимаське.



198 сур.



199 сур.

2. Котретлэн педпалаз M йыло $AMC\angle$, нош котретлэн пушпалаз N йыло $ANC\angle$ AC буко вылэ пыкиськись, пушказ гожтэм $ABC\angle$-лэсь бадӟым (199 сур.).

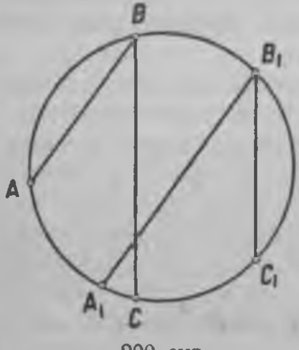
1) $M\angle$ мертаське $\frac{AC\smile - KL\smile}{2}$ 2) $B\angle$ мертаське $\frac{AC\smile}{2}$

3) $N\angle$ мертаське $\frac{AC\smile + A_1C_1\smile}{2}$

4) $\frac{AC\smile - KL\smile}{2} < \frac{AC\smile}{2}$

$\frac{AC\smile}{2} < \frac{AC\smile + A_1C_1\smile}{2}$

Соин ик $M\angle < B\angle < N\angle$



200 сур.

Юан‘ёс но уж‘ёс.

1. ABC куиньсэрголэн йыл‘ёсыз котыргож вылын кыллё $AB\smile = 70°$ но $BC\smile = 60°$ шуса тодмо бере, солэсь сэрег‘ёссэ шедьтоно.

2. Котыргож 5:8:11 отношениэн люкылэмын. Йыл‘ёсыз люкон точкаос луись куиньсэрголэсь сэрег‘ёссэ шедьтоно.

3. $ABC \angle = \alpha$ сётемын. Котыргож вамен: 1) сётэм сэреглэн ӝыныззлы но 2) кык пол уноамо сётэм сэреглы Чошась сэрег лэсьтоно.

4. Кык пушпал гожтэм B но B_1 сэрег'ёслэн дур'ёссы валлинэсь (200 сур.). $AC \smile = A_1C_1 \smile$ шуса зэме поттоно.

5. A, B, C, но D точкаос котыргожез 2.3:6:7 отношениэн люко бере, котретын AB но CD хордаослэсь кыЧе йылсо сэрег улсын вожвылскемзэс лыд'яно.

6. Кык радиус'ёс вискысь сэрег 110°-лы Чоша. Со радиус'ёслэн пум'ёстӥзы ортчытэм гож'ёсын пöрмытэм сэрегез шедьтоно.

XIII. КЫК КОТЫРГОЖ'ЁСЛЭН ВАЧЕ КУСЫП'ЯСЬКЕМЗЫ.

§ 1. Концентро но эксцентро котыргож'ёс.

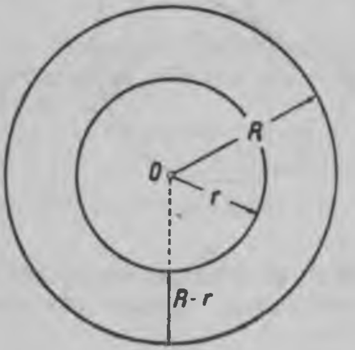
1. Кык котыргож'ёс ог шорен яке пöртэм шорен луыло.

Одиг шоро котыргож'ёс концентро шуса нимасько но огзылэсь огзы радиус'ёссылэн кузьдалаосынызы R но r гинэ пöртэм'ясько (201 сур.).

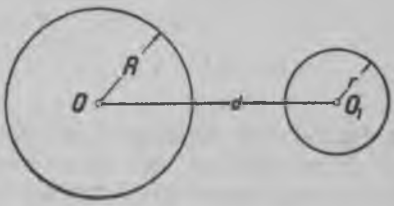
Кык концентро котыргож'ёс виске шедем чошкес, котрес кульчоэн нимаське. Соослэсь радиусысь $R - r$ радиусэз куштыса потэм лыд котрес кульчолэсь пасьталазэ тодытэ.

Пöртэм шорко тыргож'ёс эксцентроэннимасько.

2. Кык котыргож'ёслэн шортӥзы ортчись шонер гож OO_1 (202 сур) шор'ёслэн гожзы шуса нимаське.



201 сур.



202 сур.

Кык котыргож'ёслэн шор'ёссылэн гожзы сооcлы черс симметри луэ.

$OO_1 = d$ вандэт O но O_1 шор'ёс вискысь кусып луэ, вакчиак веран понна озьы ик соэ но шор'ёслэн гожзы шуса нимало.

Концентро котыргож'ёсын шор'ёссылэн гожзы нульлы Чоша

3. Одиг ог'я точкао луись котыргож'ёсыз йöтскись шуо, соослэн ог'я точказы йöтскись точкаэн нимаське. Кык котыргож'ёсваче йöтско ке но одӥг котыргож мукетэз бордэ педласянь ке йöтске, соку педласянь йотскем луэ; нош одӥгез-огезлы пушказ луыса йöтске ке, пушласянь йöтскем луэ.

Котыргож'ёслэн кык ог'я точказы ке луэ, соку соос вожвылско; нош вожвылскись точкаосыз огазеась шонергож соослэн ог'я хордазы луэ.

Куинь ог'я точка возись котыр ож'ёс огвылэ усё.

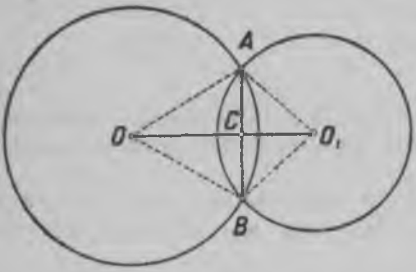
Техникаын йӧтскись котырет’ёс фрикционной но пинё питран’ёсын движениэз сётыны понна уже кутйсько. Педласянь йӧтскись фрикционной но пинё питран’ёс мыд-мыдлань бергало, пушласянь йӧтскыкузы оглань берытско.

§ 2. Артэ сылйсь кык котыргож‘ёслэн кусыпсы.

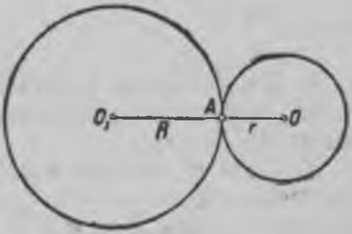
1. *Теорема.* **Кык пӧртэм котыргож’ёслэн шор гожзылэн огпал дураз кыллись ог’я точказы луэ ке, соку котыргож’ёслэн шор гожзылэн мызон пал дураз кыллись мукет точказы но луэ, мукет сямен, со котыргож‘ёс вожвылско** (203 сур.).

Зэмен но, шорзылэн гожзы — кыкезлэн ик котыргож’ёслэн симметри черссы. A точкалы симметрио B точка лэсьтом но, котыргож’ёслэн O но O_1 шӧренызы огазеалом; соку симметри вылэ пыкиськы а $OA = OB$ но $O_1A = O_1B$, нош озьыэн B кыкезлэн ик котыргож’ёслэн точказы луэ, котыргож’ёс вожвылско но, AB — соослэн ог’я хордазы.

Следстви. **Кык пӧртэм котыргож’ёслэн ог’я A точказы шор гож вылазы кылле ке, соку котыргож’ёс йӧтско, мукет сямен, шор гож вылазы кыллись одйг ог‘я A точказы гинэ луэ.**



203 сур.



204 сур.

Зэмен но, со кык котыргож’ёслэн шор гож вылазы кыллисьтэм нош ик мызон ог’я точказы луэ шуса талэсь азьвыл вераммылы пумит малпам ке, соку — зэме поттэм теоремая — шор гожзы ласянь кыкетй котыргожлы симметрио луись соолэн куинетй ог’я точказы но луыны кулэ на; сычё дыр’я со котыргож’ёслы куинь ог’я точкаоссы но луоз, озьы нош луыны уг быгаты малы ке шуоно, котыргож’ёслэн 3 ог’я точкаоссы луэ ке, соос огзы вылэ огзы усё, со нош условилы пумитаське. Озьыэн:

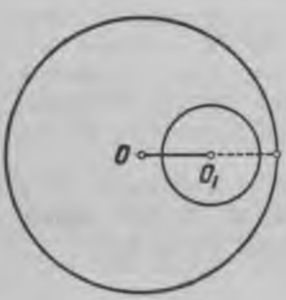
Кык котыргож‘ёслэн шор гож вылазы кыллись кык ог‘я точказы луэ ке, соос йӧтско (204 но 205 сур.).

2. Кык пӧртэм R но r радиусо котыргож’ёс сётэмын, соос ваче уг но йӧтско, огез мызонэзлэн педпалаз но уг кыллььы. R радиусо котыргожез вырзылытэк кельтйд ке но r радиусо котыргожез шор‘ёслэн гожзыя воштылйд ке, соку котыргож’ёс огзы ласянь огзы пӧртэм интыаськон’ёс басьтыны быгатозы.

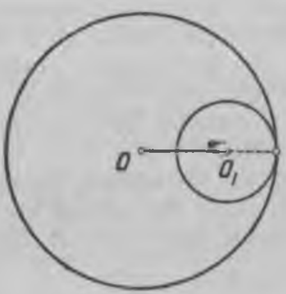
1) Котыргож’ёс уг но вожвылско уг но йӧтско но огез мукетэз пушкын уг сылы (202 сур.). $OO_1 = d$ — шор’ёслэн виссы кык радиус’ёсыз огазеаськемзылэсь но трос: $d > R + r$.

2) Котыргож’ёс педласянь A точкаэ йӧтско (204 сур.). $OO_1=d$ кусып радиус’ёслэн огазеамзылы ӵоша: $d=R+r$

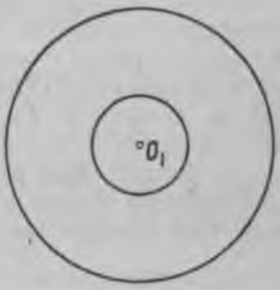
3) Котыргож’ёс вожвылско но кык ог’я A но B точкаос возё (203 сур.). $OO_1=d$-лэсь но R но r радиус’ёслэсь герӟаськемэс шедьтон понна, AOO_1 куиньсэргоэз учком, отын $OO_1=d$, $AO=R$ но $AO_1=r$. Куиньсэргоын котькуд палдурез: 1) кык мукет дур’ёсызлэн суммазылэсь ичи но 2) кык мукет дур’ёслэн разностезлэсь бадӟым, соин ик котыргож’ёслэн шор’ёссылэн кусыпсы кык радиус’ёслэн огазеамзылэсь ичи но разностьсылэсь бадӟым: $d<R+r$ но $d>R-r$



205 сур.



206 сур.



207 сур.

4) Котыргож’ёс пушласянь йӧтско (205 сур.). Соку сооослэн шор’ёссылэн кусыпсы $OO_1=d$ радиус’ёслэн разностьсылы ӵоша: $d=R-r$

5) Одӥг котыргож мукет котыргож пушкын кылле но, сооослэн шор’ёссы одӥге уг усё (206 сур.). $OO_1=d$ кусып радиус’ёслэн разностьсылэсь ичи: $d<R-r$

6) Одӥг котыргож, мукет котыргож пушкын кылле но, сооослэн шорзы одӥге усе (207 сур.). Соку шор’ёссылэн кусыпсы нульлы ӵоша: $d=O$.

§ 3. Кык вожвылскись котыргож‘ёслэн ог‘я хордазылэн аслыкез.

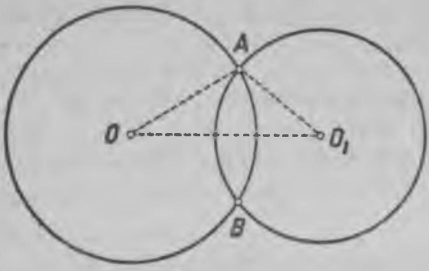
Теорема. **Кык вожвылскись котыргож’ёслэн ог’я хордазы со шор’ёслэн гожзылы перпендикулярной луэ но со хордаэн шори люкиське.**

Сётэмын: O котыртож но O_1 котыргож (203 яке 208 сур.).
AB — ог‘я хорда; OO_1 — шор‘ёслэн гожзы.

Зэмэ поттыны кулэ: 1) $AB\perp OO_1$ но 2) $AC=CB$.

Зэме поттон. Котыргож’ёслэсь A но B вожвылскон точказэс O но O_1 шор’ёсын огазеалом, соку кык огкадь урдэсо AOB но AO_1B куиньсэрго потоз, со сяна кык одӥг кадесь AOO_1 но BOO_1 куиньсэрго луоз. Сооослэн OO_1 — ог’я дур, $AO=OB=R$ но $O_1A=O_1B=r$.

Куиньсэргооослэн ӵошамысьтызы сэрег'ёссылэн но ӵошамзы потэ: 1) $AOO_1\angle = BOO_1\angle$ но 2) $AO_1O\angle = BO_1O\angle$; озьы берэ $OO_1O\angle$-лэн но $O_1\angle$-лэн биссектрисаэз луэ.



208 сур.

Огкадь урдэс'ем AOB но AO_1B куиньсэргоосын шор'ёслэн OO_1 гожез, сооcлэн биссектрисазы луэ, соин ик:

1) $AB \perp OO_1$ но

2) $AC = CB$.

§ 4. Кык котыргож'ёс бордэ ог'я йӧтскисьсы но соосыз лэсьтон.

1. Кык котыргож'ёс бордытй ортчытыны луоно йӧтскисьёслэн лыдзы со котыргож'ёслэн ваче луменызы герӟаськемын. I—IV суред вылын (209), кык котыргож'ёсын йӧтскись гож'ёслэн котькыӵе учыр'ёс басьтыса возьматэмын.

209 сур.

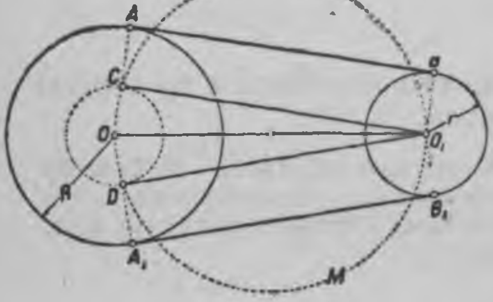
Улй возьматэм таблицаын кык котыргож'ёслэн шорзылэн вискысьтыз кусыпезлэн но йӧтскись гожлэн лыдзылэн со котыргож'ёслэн ваче пукйськеменызы герӟаськемез возьматэмын.

Бӧрсьысь №'ёс	d — кык котыргож'ёслэн шор'ёссылэн кусыпсы	Кык котыргож'ёслэн артэ сылэмзылэн кусыпсы	Йӧтскись гож'ёслэн лыд'ёсыз.
1.	$d > R + r$	Котыргож'ёс уг вожвылско, уг йӧтско но одйгез мукетэзлы педпалаз кылле . .	4
2.	$d = R + r$	Котыргож'ёс педпал ласянь йӧтско . . .	3
3.	$\begin{cases} d < R + r \\ d > R - r \end{cases}$	Котыргож'ёс вожвылско	2
4.	$d = R - r$	Котыргож'ёс пушласянь йӧтско	1
5.	$d < R - r$	Одйг котыргож мукет котыргож пушкын кылле, сооcлэн шор'ёссы одйге уг вуо .	0
6.	$d = O$	Одйг котыргож мукетэз пушкын кылле, сооcлэн шорзы тупа	0

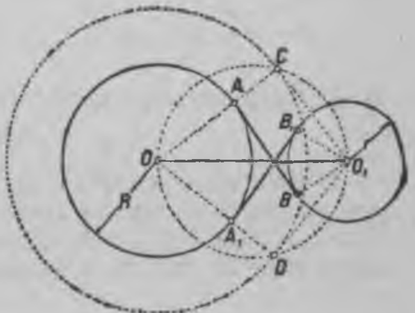
2. Задача. *Пӧртэм R но r радиусо кык котыргож'ёслы ог'я йӧтскись гож лэсьтоно,* $d > R + r$ *дыр'я.*

Сётэм котыргож’ёс куспысь йӧтскись гож’ёслэсь кык учыр дыр’я возиськемзэс учком.

1) *Лэсьтон.* Сётэм котыргож’ёс сярись $R-r$ бадӟым радиусо концентро котыргож нуом (210 сур.) но солы O_1 шорысь O_1C гож нуом. Йӧтскон C точка пыртӥ OC радиус нуом. Соэ, сётэм котыргож A точкаэныз вожвылскытозяз нуйтом; O_1 шорысь $O_1B \parallel OA$ ортчытом; A но B точкаосыз шонер гожен огазеаса, утчано йӧтскись AB гожез шедьтом, сыӵе лэсьтэмен A_1B_1 йӧтскись гож потэ.

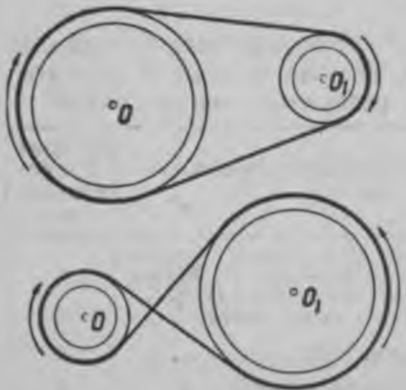


210 сур.



211 сур.

Зэме поттон Лэсьтэм вылысь, $CA = O_1B$; но $CA \parallel O_1B$; со сяна $C\angle = d$; озьы бере, ньыльсэрго ABO_1C — шонерсэрго, соин ик $A\angle$ но $B\angle$ шонересь сэрег‘ёс; озьы дыр‘я йӧтскон точкаэтӥ ортчытэм OA но O_1B радиус’ёс, AB шонер гожен шонер сэрег‘ёс пӧрмыто; соин ик — AB кыкезлы котыргож‘ёслы йӧтскись луэ.



212 сур.

2) *Лэсьтон.* Сётэм котыргож‘ёс сярись бадӟым $R+r$ радиусэн концентро котыргож ортчытом (211 сур.); со котыргож бордэ O_1C йӧтскись гож ортчытӥськом; C йӧтскон точка пыртӥ OC радиус ортчытӥськом со ик сётэм котыргожез A точкаэтӥ вожвылтоз; собере O_1 шорысь OC радиуслы валлин O_1B радиус ортчытӥськом; A но B точкаосыз огазеаса, утчано AB йӧтскисез шедьтӥськом.

Сыӵе лэсьтэмен ик кыкетӥ ог’я A_1B_1 йӧтскись гожез шедьтӥськом.

Зэме поттон. Лэсьтэм’я $CA = O_1B$, но $CA \parallel O_1B$, со сяна, $C\angle = d$; озьы бере $CABO_1$ ньыльсэрго шонерсэрег’ем: $A\angle$ но $B\angle$ шонересь сэрег’ёс, со нош, A но B точкаэ ортчытэм O_1B

но AO радиус’ёс A_1B шонер гожлы перпендикулярной луэ, соин ик AB шонер гож кыкезлы ик котыргож’ёслы ог’я йӧтскись луэ.

Нырись дыр’я педпал ласянь йӧтскись гож шуиське, нош кыкетӥаз — пушласянь йӧтскись шуиське.

3. Педпал ласянь но пуш ласянь йӧтскисьёс бергась шкив’ёсын пумиськыло (212 сур.). Ку ке пумтэм е котретлэн педпал йӧтсконтӥзы мынэ ке соку шкив’ёс огпалэ бергало; нош пушпал йӧтсконтӥз ке мынэ, соку шкив’ёс мыд-мыдлань бергало.

Юан‘ёс но уж‘ёс.

1. Одӥг кадь радиусо кык котыргож‘ёслы ог‘я йӧтскись кызьы ортчытоно?

2. $R=6$ *см* радиус‘ем котыргож сётэмын. Та сётэм котыргож бордэ йӧтӥсь $r=2$ *см* радиус‘ёслэн котыргожзылэн геометрио ивтыэз мар луэ?
Кыӵе учыр‘ёс луозы?

3. 8 *см* но 5 *см* радиусо кык концентро котыргож‘ёс суредалом, собере нош кыкез ик сётэм котыргож‘ёс бордэ йӧт кись трос котыргож‘ёс лэсьтоно. Вились лэсьтэм котыргож‘ёсэн радиус‘ёссы бадӟымесь-а луозы, котрес кульчолэн пасьталаэз малы ӵошатоз?

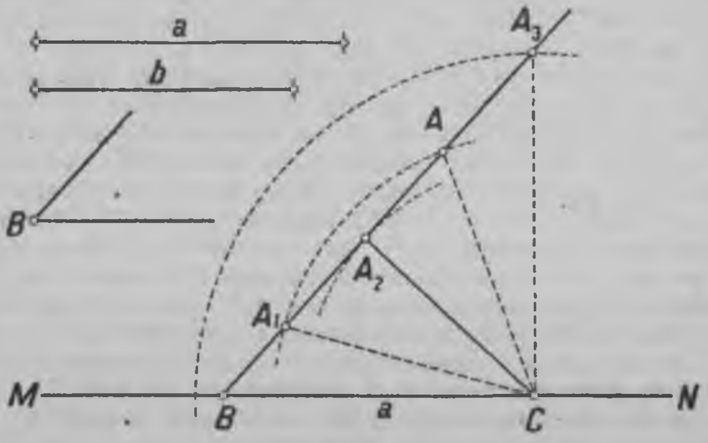
4. *Кык пӧртэм котыргож‘ёслэсь ог‘я педпал ласянь яке (пуш ласянь) йӧтскемзы чоша но шор‘ёслэн гож вылтизы вожвылкемзэс зэме поттоно:*

5. *Кык котыргож‘ёслэн педпал ласян йӧтскыкузы, ог‘я пед ласянь йӧтскись гожзы но педласянь йӧт кисьёс вискы пыртэм ог‘я пушласянь йӧтскемлэн ванд этлэсь чошамзэс* зэме поттоно.

XIV. ГЕОМЕТРИО ИНТЫОСЛЭН АМАЛЭНЫЗЫ ЛЭСЬТОНЛЫ ЗАДАЧАОС.

§ 1. Лэсьтэм‘я задачаэз эскерон.

1. Лэсьтон задача, задачалэн условиаз возьматэм аслыз тупась аслыксо геометрио фигура циркулен но линейкаэн лэсьтонлы курон луэ.



213 сур.

Лэсьтонлы сётэм задачаэз лыд’ян ньыль люкетлэсь луэ:

1) анализлэсь задачалэсь пушсэ эскерон, но задачаэз лэсьтон понна план пуктон луэ;

2) лэсьтонэз ассэ быдэстон;

3) лэсьтэм фигура задачалэн вань условиеэзлы ярамзэ зэме поттон'ёс.

3) зэме поттон лэсьтыны луоно амал'ёсыз эскерон но кӧня пӧртэм лэсьтыны луэмзэ шедьтон.

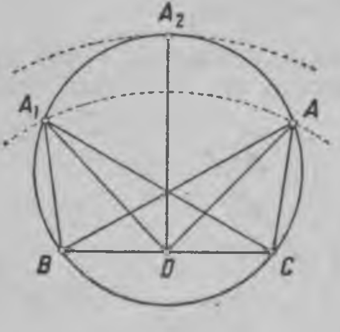
2. 1 задача. *Сётэм a дурез'я но со вӧзысь B сэрег'я но со сэреглы пумит сылись b дурез'я куиньсэрго лэсьтоно.* (213 сур.).

Лыд'ян. 1) Задачалэн анализэз. BC вандэлэн пумаз, куиньсэрголэн дурезлы ӵошась B сэрег кызьы лэсьтыны луонэзэ асьмеос тодӥськом ини, со нош, мукет сямен, куиньсэрголэн кык йыл'ёсыз B но C но $B\angle$ тодмоэсь. Куинетӥ A йылэз B сэреглэн BA дур палаз но C шоро но $AC = b$ радиусо котыргож вылын кылльыны кулэ.

2) Лэсьтон Огшоры басьтэм щонер MN вылэ a-лы ӵошась BC вандэт вис'яськом но солэн B пал пумаз B сэрег лэсьтӥськом. Собере b-лы ӵошась радиусэн, шорез C точкаын котыргож ортчытӥськом. Соку со котыргож B сэреглэсь A но A_1 точкаостӥз BA дурез вожвылтӥз. Озьы бере асьмелэн A йыллэн кык возиськонэз вань, со нош A но A_1 собере кык куиньсэрго: ABC но A_1BC.

3) зэме поттон. Кыкез но куиньсэрго пуктэм задачалэн условиезлы яра.

4) Эскерон. C точкаысь B сэреглэн BA палаз CA_2 перпендикуляр лэзём. Шорез C точкаын котыргож, солэн радиусэз CA_2-лы ӵоша ке, BA дур бордэ йӧтскоз, соку задачалэн одӥг амалэн лыд'янэз гинэ луэ, соку дыр'я $b < a$. Котыргож BA дурез A но A_1 точкаэтӥ (ку ке $b < a$), вожвылтыны быгатоз, соку асьмелэн лыд'янэз кык луэ:



214 сур.

1) $ABC \triangle a$, b но $AB = c$ дурен но B, BAC но ACB сэрег'ёсын;

2) $A_1BC \triangle a$, b но $A_1B = c_1$ дурен но B, $BA_1C = 180^\circ - A$ сэрег'ёсын, малы ке шуоно, $A\angle = AA_1C\angle$ (огкадь урдэс'ем A_1CA куиньсэрголэн дӥняэ сэрег'ёсыз); со куиньсэрголэн A_1CB сэрегез $A\angle - B\angle$ ӵоша ($b = a$ ке соку одӥг гинэ лыд'яэнз, но утчано куиньсэргомы огкадь урдэс'ем луэ; нош $b > a$ ке соку котыргож BA дурез одӥг A_3 точкаэтӥ вожвылтоз, соку куиньсэргомы A_3BC утчано куиньсэрго луэ.

Берлоаз, $b < CA_2$ ке мукет сямен, B сэреглэн BA дуреныз но C точкаэн кусыплэсь пичи ке котыргож BA дуре уз йӧтскы, уз но вожвылты, соин ик татын одӥг лыд'янэз но уз луы.

2 задача. *Сётэм a дӥнья но солы ваче сылись $A\angle = d$ но m_a медианая куиньсэрго лэсьтоно* (214 сур.).

Лыд'янэз. Задачалэн анализэз. Кылсярись, задача лыд'ямын но утчано $ABC\triangle$ лэсьтэмын шуом AD — солэн, медианаэз, BC — солэн дӥнэз. Сётэм $BC = a$ дӥнь ABC куиньсэрголэсь B но C сэрег'ёссэ тодытэ. Куинетӥ A йылысь сётэм $BC = a$ дӥнь сётэм d сэрег улсын адске. Точкаослэн геометрио интызы,—(со точкаосысен та сётэм BC вандэт a сётэм сэрег’я адӟиське) со сётэм $BC=a$ вандэт’я лэсьтэм сегментлэн BAC букоэз луэ. Со сегментын ик d сётэм сэрег но луэ. Озьы дыр’я, A точка сегментлэн BAC букоэз вылын кылльыны кулэ. A йыл BC дӥньлэн D шорезлэсь $AD=m_a$ кем кусыпын сылэ; D точкалэсь одӥг кеме палэнтэмо точкаослэн геометрио интызы $AD=m_a$ радиусэн но шорез D точкаэн ортчытэм котыргож луэ. Соку, A точка со котыргож вылын кылльыны кулэ. Озьыэн; A точка ABC △-лэн куинетӥ йылэз кыкезлы ик геометрио интыэзлы пырыны кулэ: ACB сегментлэн букоэзлы но шорез D точкао котыргожлы но; A йыл со геометрио интыослэн вожвылскись точказы луэ.

Лэсьтон. Хорда вылын сямен ик сётэм вандэтын $BC=a$, пушказ тэрытӥсь сётэм $A\angle=d$ BCA сегмент лэсьтӥськом. Собере сётэм m_a медианалы ӵошась BC радиус’я, BC вандэтлэн шорвадесэз D точкао шорен котыргож ортчытом. BAC сегментлэн букоэзлэн вожвылскон точкаэз но та котыргожлэн радиусэз, куиньсэрголэн куинетӥ A йылэз луэ. A, B но C точкаосыз огазеаса, утчано ABC △ потоз.

Зэме поттон. Лэсьтэм ABC куиньсэрго, задачалэн условиезлы яра: $BC=a$ солэн дӥнез, $BAC\angle=d$ но $AD=m_a$.

Эскерон. A точка котыргожлэн но сегментлэн букоэзлэн вожвылскемзы луэ, соин ик, эскероно: сётэм условиос дыр’я котьку ик-а та гож’ёс вожвылско шуса.

BAC сегментлэн букоэз лэсьтэм бере, шорез D точкаын, $DA=m_a$ радиусо котыргож ортчытӥськом (214 сур.); татын таӵеэсь куинь пӧртэм учыр’ёс луыны быгатозы: 1) котыргож но сегментлэн букоэз A_2 точкаэ йӧтско, соослэн одӥг ог’я точказы гинэ луэ; озьы дыр’я, одӥг A_2BC △ гинэ лэсьтыны луоз; та куиньсэрго огкадь урдэс’ем но A_2D медиана солэн ӝуждалаэз луоз; 2) m_a медиана, A_2D-лэсь пичи нош BD лэсь бадӟым ке, соку котыргож но сегментэн букоэз A но A_1 точкаэтӥ вожвылскозы, но асьмеос кык огкадесь ABC но A_1BC куиньсэрго поттом; 3) нош сётэм m_a медиана, A_2D-лэсь бадӟым, яке пичи яке BD-лы ӵоша но сегментлэн букоэз уз вожвылске, соку куиньсэрго но лэсьтыны уз луы, соин ик задачаэз лыд’янэз но уг луы.

BC-лэн мызон палдураз но $d\angle$ тэрытӥсь сегмент но сётэмлы симметрио луись куиньсэрго лэсьтыны луэмез синйылтоно луэ.

3 задача. *ABC куиньсэрголэн AB, AC но CB дур‘ёсызлэсь огкеме палэнтэм точкаэз шедьтоно* (215 сур).

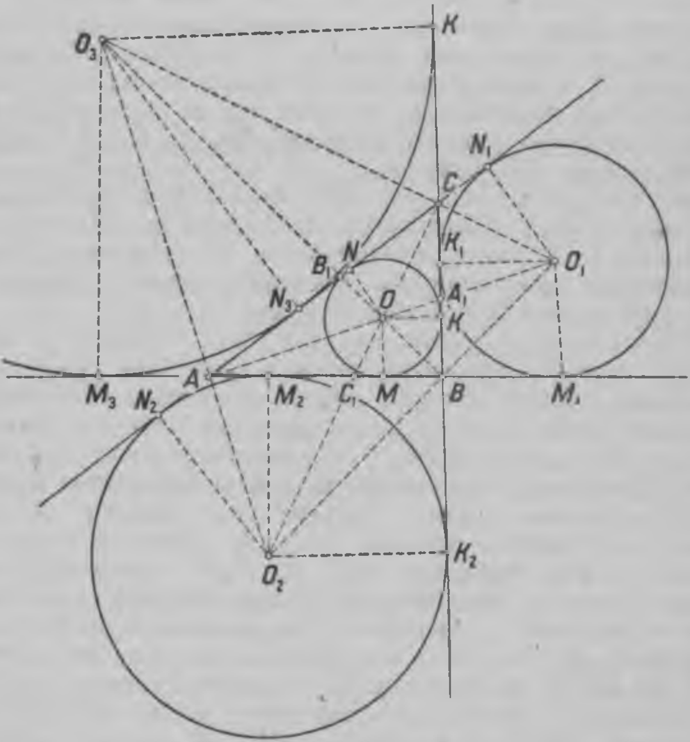
AB, AC шонер гож’ёс A точкаын кык куз ваче пумит сэрег’ёс пӧрмыто. Куиньсэрголэн дур’ёсызлэсь огкеме палэнтэм точка яке одӥг куз сэрег’ёслэн ог’я биссектриса вылаз кылле, яке мызон куз сэрег’ёслэн биссектриса вылазы кылле. Сётэм куиньсэрголэн пушпал A сэрегезлэн биссектрисааз нырись дугдом.

AA_1 биссектрисаэз ортчытӥськом, со вылын утчано точка луыны кулэ. Собере B сэрeглы BB_1 биссектрисаэз ортчытӥськом, со вылын BA но BC дур’ёсысь огкеме палэнтэм утчано точка луыны кулэ. Утчано точка огпырен кыкез ик биссектриса вылын кылле, мукет сямен, со соосыз вожвылтӥсь O точка луэ.

Биссектрисалэн аслыкез'я $OM = ON$ но $OM = OK$: та пуктэм ӵошанысь — $ON = OK$ шуыны луэ.

Куиньсэрголэн дур'ёсызлэсь одӥг кеме палэнтэм точка солэн пушказ кылле но котькудӥзлэн кык биссектрисаослэн вожвылскон. шоразы тупа.

C точкаэз O точкаэн огазеад ке, соку шоненсэрег'ем CON но COK куиньсэргоос ӵошало, сослэн ог'я OC гипотенузазы, нош зэме поттэм'я $ON = OK$; куиньсэргоослэн ӵошамысьтызы $OCN\angle = OCK\angle$ потэ, со нош CO шонер гож $C\angle$-эз шортӥз люке, мукет сямен, CO — биссектриса. Озьы бере куинетӥ CO биссектриса но O точктэтӥ ортче.



215 сур.

Куиньсэрголэн биссектрисаосыз одӥг точкаын вожвылско.

ABC куиньсэрголэн дур'ёсызлэсь огкеме палэнтэм O точка сяна, сыӵе ик аслыко куинь точкаос луо на.

Зэмен но, кылсярись B но C сэрег'ёслэсь дур'ёссэс кузёмытӥд ке но куиньсэрголэн кык куз потэм сэрег'ёслэсь биссектрисаоссэ ортчытӥд ке, соку сооcлэн вожвылскон O_1 точказы BC дурлэсь но AB но AC дур`ёслэн кузёмытэмыстызы огкеме палэнтэмын. 215 суредын возьматэм'я сыӵе ик лэсьтӥськонэн O_2 но O_3 кык точкаос шедьтӥсько.

§ 2. Задачаос

1. Кык A но B точкаос сётэмын. A точкалэсь a кемын луись нош B точкаысен b кемын луись куинетй C точкаэз шедьтоно.

2. Сётэм A точка пыртй ортчись но сётэм B точкаэтй сётэм MN шонер гож бордэ йотйсь котыргож ортчытоно.

3. a дур'я но h_b но h_c йуждалая куиньсэрго лэсьтоно.

4. d дйнья, h_a йуждалая но A $\angle$-эн куиньсэрго лэсьтоно.

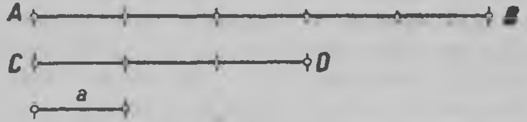
5. 1) Сётэм котыргожлэн одйг со точкаысьтыз ик потйсь вань хордаослэсь шорвадессылэсь; 2) котыргожлэн одйг со точка пыртйз ик ортчись вань хордаослэсь шорвадессылэсь геометрио интызэс шедьтоно.

XV. ПРОПОРЦИО ВАНДЭТ'ЁС.

§ 1. Кык вандэт'ёслы ог'я мертэт.

Котькудаз ик кык сётэм вандэт'ёсын быдэс лыдэн интыаськись вандэтэз кык сётэм вандэт'ёслэн ог'я мертэтсы шуса нимало.

AB но CD вандэт'ёс сётэмын (216 сур.); a вандэт 5 пол AB вандэтэ интыаське, CD вандэтэ 3 пол. $AB=5a$-лы нош $CD=3a$; a — со AB но CD сётэм вандэт'ёслэн ог'я мертэтсы луэ, кык вандэт'ёслэн ог'я мертэтсылэн котькыӵе люкетэз, кылсярись $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \ldots$ озьы ик сооспэн ог'я мертэтсы луэ, малы ке шуоно, со котькуд вандэт'ёсы мыльытэк интыаське; татысен нош кык ванэт'ёслэн трос ог'я мертэт'ёссы луэ, соос пӧлысь одйгез котькудйзлэсь бадӟымез луэ.



216 сур.

Оглом мертэтсы луыса, со мертэт нош нимысьтыз вандэтэ быдэс лыдэн интыаське ке, сыче кык вандэт'ёс мертаны луоно вандэт'ёс шуса нимаськo.

Задача. *Кык мертаны луоно вандэт'ёслэсь оглом мертэтсэс шедьтоно.* Кык AB но CD вандэт'ёс сётэмын, соэн артэ $AB>CD$ (217 сур.).

217 сур.

Лыд'ян. Бадӟым AB вандэт вылэ кӧня ке пол пичи CD вандэтэз интыалом. Кылсярись со бадӟым вандэтэ куинь пол мед интыаськоз но мылем вандэтэз $KB<CD$. Озьы дыр'я:

$$AB=3CD+KB. \qquad (1)$$

CD вандэт AB вандэтэ ӵапак куинь пол интыаськысал ке соку CD вандэт кыкезлэн вандэт'ёслэн оглом мертэтэз луысал но AB-ын куинь пол интыаськемын луысал, нош CD — одӥг пол.

Собере KB вандэт, нырись мылемез, CD вандэтэ 4 пол мед интыаськоз но, со сяна потэ на мылемез $LD < KB$, соку

$$CD = 4KB + LD. \tag{2}$$

Собере LD вандэтэз, кыкетӥ мылемез, KB вандэт вылэ интыаськом; LD вандэт KB вандэтэ ӵапак куинь пол мед интыаськоз, соку

$$KB = 3LD \tag{3}$$

но LD кыкезлэн ик вандэт'ёслэн оглом мертэтэз.

(3) ӵошанысь KB-лэсь значенизэ (2) ӵошанэ пуктыса, нош собере CD-лэсь значенизэ (1) ӵошанэ пуктыса, поттом:

$$CD = 4 \cdot 3LD + LD = 13LD;$$
$$AB = 3 \cdot 13LD + 3LD = 42LD.$$

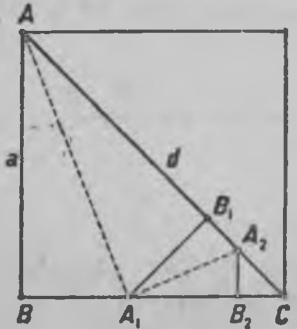
Озьыэн, $AB = 42LD$ но $CD = 13LD$; озьы бере, LD вандэт AB но CD вандэт'ёслэн оглом мертэтэз.

LD вандэт KB вандэтэ быдэс лыдэн ӧй интыаськысал ке, оглом мертэт шедьтон уж-югдурез потӥсь мылем'ёс пӧлысь берпумез — берпумезлэсь азьланяз мынӥсь кылем вандэтэ быдэс лыдэн интыаськытозяз ортчытоно луысал; AB но CD вандэт'ёс мертаны луоноэсь, соин ик та югдурез пумаз вуттыны луэ.

Кык вандэт'ёслэсь оглом мертэтсэс шедьтон дыр'я, соослэн оглом мертэтсы вандэтазы но, озьы ик, оглом мертэт шедьтон дыр'я потэм вандэт'ёс пӧлысь нимаз быдэс лыдэн интыаське шуса оскиськом, озьы бере, оглом мертэт нимысьтыз мылемлэсь бадӟым луыны уг быгаты.

Оглом мертэтсы луисьтэм кык сыӵе вандэт'ёс но шедьыны быгатозы; *оглом мертэтсы луисьтэм вандэт'ёс, мертаськисьтэм шуса нимасько.*

Малпаськытэк басьтэм кык вандэт'ёс мертаськисьтэм луо шуса, синйылтоно луэ. Куд ке дыр'я гинэ соос мертаны луисесь.



218 сур.

Оглом мертэт шедьтон дыр'я асьсэ быдӟалазыя пичиэсь мылем'ёссэ (мертаськон прибор'ёс туж шонер луымтээн но асьме синмылэн пӧяськеменыз) шедьтыны уг луы; озьы дыр'я практикаын кык вандэт'ёслэсь оглом мертэтсэс асьмелы кулэ луись шаркакен шедьтыны котьку ик лэсьтымон; нош озьы ке но, мертаськисьтэм вандэт'ёслэсь луэмзэс зэме поттыны луэ рассуждениос вамен.

Пример. *Квадратлэн дурез но диагоналез мертас кисьтэм.*

a дурен но d диагонален $ABCD$ квадрат сётэмын (218 сур.)

Огкадь урдэс'ем ABC куиньсэргоысь потэ:

$$a < d < 2a.$$

a-лы ӵошась AB интыаське $AC = d$-ын огпол но мылемаз сётэ $B_1C = a_1$, озьы бере тӥни,

$$d = a + a_1$$

$B_1A_1 \perp AC$ ортчытыса но A но A_1 точкаосыз огазеаса, $A_1B_1 = A_1B$ шуса поттом; $C \angle = 45°$ луэмен A_1B_1C куиньсэрго — шонерсэрг'ем но огкадь урдэс'ем. A_1B_1C куиньсэргоысь потэ:

$$B_1C = a_1 = B_1A_1 = BA_1$$

Мылем $B_1C = a_1$ $BC = a$ интыаське кык пол, малы ке шуоно, $BA_1 = a_1$ но $a_1 < A_1C < 2a_1$ но, со сяна, потэ на мылемез $B_2C = a_2$. Озьыэн, $a = 2a_1 + a_2$.

A_2B_2C куиньсэрго озьы ик шонерсэрег'ем но огкадь урдэс'ем, нош озьы бере, сыӵе кылпум нуон'ёсыз ик солы но кутыса поттом:

$$a_1 = 2a_2 + a_3 \text{ азьланьын озьы ик.}$$

Озьы бере, одӥгез но бератэз мылем азьвылэз мылеме быдэс лыдэн уг интыаськы, нош озьыэн a но d вандэт'ёс мертаськисьтэм.

§ 2. Вандэт'ёслэн отношенизы.

1. *Мертан единицаен басьтыса мукет вандэтэн ӵошатон — вандэтэз мертан луэ;* вандэтлэн мертамезлэн бӧрпум лыдэз, со мертаськон единицалы басьтэм лыд, мертано вандэтын кӧня пол тупамзэ возьматэм луэ. Озьы a лыдэз мертэт единица карыса, AB вандэтэз мертась лыд 5-лы ӵоша; BC вандэтэз мертась лыд, 3-лы ӵоша; a вандэтэз мертась лыд 1-лы ӵошамзэ валамон.

2. Кык вандэтэз, кык лыдэз сямен ик, кык пӧртэм амал'ёсын ӵошатыны луэ. Кӧнялы одӥг вандэт бадӟым, яке ичи мукетэзлэсь, яке кӧня пол одӥг вандэт мукетэзлэсь бадӟым яке пичи луэмзэ тодыны луоз. Соин ӵош нош кӧня пол одӥг вандэт мукетаз пыремзэ тодыны луоз.

Та бӧрысь амалэн вандэт'ёсыз ӵошатыку люкемо отношенизэс яке огшоры вераса кык вандэт'ёслэсь отношенизэс шедьтӥськом.

Кыче ке мертэт единицаэн одиг вандэтэз мертась лыдлэн, мукет вандэтэз сыче ик мертан единицаосын мертась лыдлы отношениез одиг вандэтлэн мукет вандэтлы отношениез шуиське.

3. Кык вандэт'ёслэсь отношенизэс шедьтыку кык пӧртэм луон вань.

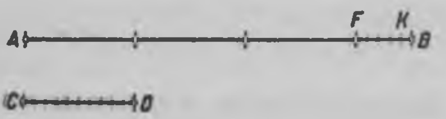
I. Мертаны луоно вандэт'ёслэн отношенизы быдэс лыд яке дробо лыд.

Озьы:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{5}{3}, \text{ яке } AB:CD = 5:3$$

Та кык вандэт'ёслэн отношенизы тазьы лыдӟиське: AB вандэт CD вандэтлы озьы кусыпаське, кызьы ке 5 кусыпаське куинен. яке: AB вандэт'ёслэн CD вандэтлы кусыпаськемез $\frac{5}{3}$-лы ӵоша.

II. Мертаськисьтэм вандэт'ёслэн отношенизы — матэатэм лыд. AC но CD вандэт'ёс сётэмын (217 сур.). Пичи CD вандэтэз мертэт единица лыдлы басьтом, CD вандэтэз AB вылэ тыром; со AB вандэт вылэ 3 пол мед тупалоз, соку дыр'я CD-лэсь ичигес FB мылем вандэт потоз на. Нош $\frac{AB}{CD} \approx 3$ шуса гожтӥм ке, соку AB но CD вандэт'ёслэн отношенизылэн шаркак лыд уз луы, матэаськись лыдзы гинэ луоз, сум'яса веран понна FB вандэтсэ куштӥськом но соин тырмымтээн потэ.



219 сур.

AB но CD вандэт'ёслэсь шаркакгес отношенизэс поттон понна, CD-эз 10 огкадь люкетлы люком но CD-лэсь 0,1 люкетсэ, вандэт'ёсыз мертаны виль единицалы басьтом. Со виль единица AB-э 34 пол мед пыроз, со сяна 0,1 CD-лэсь ичи но KB мылемез мед луоз на.

Гожтӥськом: $3,4\ CD < AB < 3,5\ CD$, яке $\frac{AB}{CD} \approx 3,4$ тырмымтээныз но $\frac{AB}{CD} = 3,5$ мултэсэн. 3,4 но 3,5 отношениос басьтэм мертэтлэн 0,1 единицаозь шонер лыд'ямын. Лыд'ёсыз люкон дыр'я но озьы ик вандэт'ёслэсь отношенизэс лыд'яку но мылемез басьтэм единицалэн ӝыныэзлэсь ичи ке, со отношени тырмымтээн басьтӥське, мылемез басьтэм мертэт единицалэн ӝыныэзлэсь тросгес ке, мултэсэн басьтӥське.

AB но CD вандэт'ёслэсь отношенизэс уката но шаркакгес поттон понна CD-эз 100 огкадь люкет'ёслы люком. CD-лэн 0,01 люкетэз KB мылем вылэ CD-лэн 0,01 люкетэзлэсь пичи мылемен 3 пол мед пыроз.

Гожтӥськом: $3,43\ CD < AB < 3,44\ CD$, яке $\frac{AB}{CD} \approx 3,43$ тырмымтээныз яке мултэсэныз $\frac{AB}{CD} \approx 3,44$.

3,43 но 3,44 лыд'ёс 0,01 шонер лыд'ям AB но CD вандэт'ёслэн отношенизы луэ, огез тырмымтээн, мукетэз мултэсэн.

Нош быр'ем мертэт единицаэз уката но векчиэсь дасмос люкет'ёслы люким на ке, кылсярись 1000 яке 10000 люкетлы, соку вандэт'ёслэн отношенизы пумтэм, периодтэм дасмосо дробен возьматэмын луоз.

Тӥни озьы, мертаськисьтэм кык вандэт'ёслэн отношенизы иррациональной лыд луэ.

Котькуд одӥг кадь степенё шаркакен лыд'ян но кыкез ик тырмымтээн яке мултэсэн басьтэм матэатэм-лыд'ёссы ӵоша ке, соку мертан луонтэм вандэт'ёслэсь кык отношенизы ӵошамен лыд'яське. Кылсярись, озьы

$$\frac{a}{b} \approx 7,5 \text{ но } \frac{c}{d} \approx 7,5$$

$$\frac{a}{b} \approx 7{,}52 \text{ но } \frac{c}{d} \approx 7{,}52$$

$$\frac{a}{b} \approx 7{,}524 \text{ но } \frac{c}{d} \approx 7{,}524 \text{ озьы азьлань, соку}$$

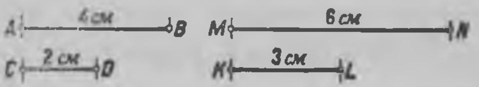
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Озьыэн тӥни, *кык вандэт‘ёслэн отношенизы рациональной яке иррциональной лыд луэ, та лыдлы кыкети вандэтэз уноаса нырисети вандэтэз шедьтыны луэ.*

§ 3. Пропорцио вандэт‘ёс. Геометрио пропорци.

Ньыль вандэт $AB=a=4$ *см*, $CD=b=2$ *см*, $MN=c=6$ *см* $KL=d=3$*см* сётэмын (219а сур.). Соос пӧлысь кыкезлэсь AB но CD-лэсь отношенизэс басьтӥм ке, но мукет’ёсызлэсь кыкезлэсь отношенизэс MN но KL басьтӥм ке, соку $\frac{AB}{CD}=\frac{4}{2}=2$ но $\frac{MN}{KL}=\frac{6}{3}=2$

Отношениос нимысьтыз 2-лы ӵошало бере, кык отношениос ог-огзылы ӵошало, нош соин ик $\frac{AB}{CD}=\frac{MN}{KL}$.



219а сур.

Отношениос ӵошан пусэн огазеамын ке, соос геометрио (кратной) пропорциэн нимасько.

$$\frac{AB}{CD}=\frac{MN}{KL}$$ ӵошан — геометрио пропорци.

Бӧрысез гожтэм тазьы лыдӟиське: AB вандэт, яке AB гинэ, CD-лы озьы кусыпаське, кызьы ке MN кусыпаське KL-эн.

Геометрио пропорци ньыль член’ёслэсь луэ. Котькыӵеез ик ньыль лыд’ёс геометрио процорци уг пӧрмыто: кылсярись, 4 *см*, 5 *см*, 8 *см* но 10 *см*, вандэт’ёс $\frac{8}{4}=\frac{10}{5}$-эн геометрио пропорци пӧрмыто; нош 4 *см*, 5 *см*, 6 *см* но 7 *см* вандэт’ёс, соос пӧлысь кык ӵошась отношениос лэсьтыны луымтээн, геометрио пропорци уг пӧрмыто.

Вандэтэз мертась лыд’ёс, геометрио пропорци пӧрмыто ке, соку сыӵе ньыль вандэт’ёс сярись соос пропорцио шуса верало.

Вандэт'ёсыз мертась лыд’ёс геометрио пропорци пӧрмыто ке, соку со ньыль вандэт’ёс пропорциэсь лыд’ясько.

Озьы дыр’я, a, b, c но d вандэт’ёс пропорцио ке, соку,

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \text{ яке } a:b=c:d \text{ но шонер.}$$

§ 4. Геометрио пропорцилэн аслык‘ёсыз. Пропорцилэн тус‘ёсыз.

1. Геометрио пропорцилэн основной аслыкез таӵе луэ: *солэн дурысьтыз член’ёсызлэн произведенизы шор член’ёслэн произведениэзлы ӵоша.*

2. *Геометрио пропорциын 1) дур член’ёсызлэсь 2) шор член’ёсызлэсь 3) чош ик дур но шор член’ёсызлэсь интызэс воштыны луэ:*

3. *Геометрио пропорциын шор член’ёссэ дур член’ёсыз интыэ пуктыны луэ, нош дур член’ёссэ шор член’ёс интыэ пуктыны луэ.*

4. **Вистэм-вожтэм пропорци.** Геометрио пропорцилэн дур член’ёсыз яке шор член’ёсыз ӵошало ке, сыӵе пропорциез вистэм-вожтэм пропорци шуо. Вистэм-вожтэм геометрио пропорцилэн одӥг кадь членэз *геометрио шоролыкен, яке кык мукет член’ёслэн шоролыко пропорциоэн шуса нимаське.*

$a:b=b:c$, яке $b:a=c:b$ — вистэм-вожтэм пропорциос.

Пропорцилэн основной аслыкез’я асьмелэн таӵе луэ: $b^2=ac$, татысен $b=\sqrt{ac}$

Кык лыд’ёслэн шор геометрио лыдзы соослэн произведениысьтызы квадрато выжылы ӵоша.

5. **Производной пропорциос.** $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ пропорцилэн кык пал люкетаз ик йылтӥд яке пропорцилэн кык пал люкет’ёсысьтыз быдэн единица куштӥд ке, со бордысен ӵошан уз сӧриськы:

$$\frac{a}{b}\pm 1=\frac{c}{d}\pm 1 \text{ яке } \frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm b}{a}, \text{ мукет сямен,}$$

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d} \quad \text{(I)} \qquad \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d} \quad \text{(II)}$$

(I) производной пропорциэз быдэн-быдэн член’я (II)-лы люкид ке, соку нош ик одӥг производной пропорци потоз:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$$

Кызьы ке кыкетӥ отношенилэн член‘ёсызлэн суммаэз соослэн разностеныз кусыпаське, озьы ик нырисетӥ отношенилэн член‘ёсызлэн суммаэз кусыпаське.

6. **Радысьтыз ӵошась отношенនослэн аслыксы.**

Теорема. **Радысь ӵошась отношениос сётэмын ке, кызьы ке отношенилэн азьвыл членэз аслаз берат членэзлы кусыпаське, озьы ик отношенилэн азьвыл член‘ёсыз берат член‘ёслэн суммазылы кусыпаське.**

Сётэмын: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{m}{n}=\frac{p}{q}$

Зэме поттыны кулэ: $\frac{a+c+m+p}{b+d+n+q}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ но азьланьын но озьы ик.

Зэме поттон. $\frac{a}{b}=k$ мед ӵошалоз, соку $\frac{c}{d}=k$ но $\frac{m}{n}=k$ но $\frac{p}{q}=k$ но $a=bk$, $c=dk$, $m=nk$, $p=qk$. Берпум ӵошанысь паллян но бур люкет’ёссэ быдэн-быдэн член’ёсын огазеаса, бур палысьтыз ог’я уноасьсэ скобка сьӧре поттыса, луоз:

$$a+c+m+p=k\ (b+d+n+q),$$ отысь

$$k=\frac{a+c+m+p}{b+d+n+q};\ \text{нош}\ k=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{m}{n}=\frac{p}{q}$$

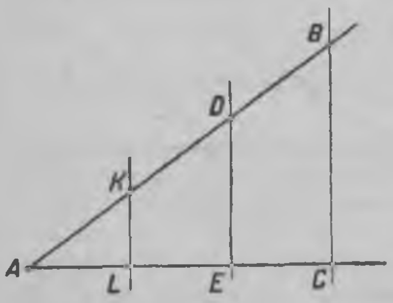
соин ик,

$$\frac{a+c+m+p}{b+d+n+q}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\ldots$$

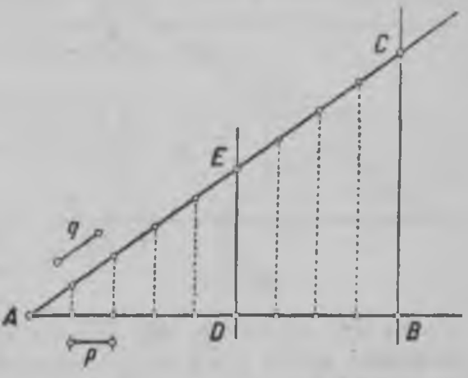
§ 5. Сэреглэсь дур’ёссэ вожвылтӥсь шонер валлин гож’ёслэн аслыксы.

BAC сэреглэсь дур’ёссэ валлин шонер гож’ёсын вожвылтом: *BC*, *DE*, *KL* но мукет’ёсын но озьы ик (220 сур); одӥг со валлин гож’ёся ик сэреглэн дур’ёсаз одӥг кадь интыам вандэт’ёс тупаса интыаськем шуисько.

AK но *AL*, *KD* но *LE*, *AB* но *AC*, *KB* но *LC* вандэт‘ёс тупаса интыаськем вандэт’ёс луо: *AK* но *EC* вандэт’ёс, яке *BK* но *DB* яке *KL* но *AL* вандэт’ёс тупаса интыаськем вандэт’ёс уг луо.



220 сур.



221 сур.

Теорема. **Сэреглэсь дур‘ёссэ кык валлин шонер гожен вожвылтӥд ке, соку солэн одӥг дураз котькуд кык вандэт‘ёсыз солэн мызон дурысьтыз тупасесь вандэт‘ёс кадь кусыпасько.**

Сётэмын: $BAC\angle$-ын $BC \parallel ED$ (221 сур.).

Зэме поттыны кулэ: 1) $\frac{AE}{EC}=\frac{AD}{DB}$; 2) $\frac{AC}{EC}=\frac{AB}{DB}$; 3) $\frac{AC}{AE}=\frac{AB}{AD}$

Зэме поттонэз. Кыӵе ке q вандэт *AC* дурлэн *AE* но *EC* вандэт’ёсызлэн ог’я мертэтэз мед луоз, соку $AE=mq$, $EC=nq$, но $AC=(m+n)p$. *BC*-лы валлинэсь *AC* дурез люкись точкаостӥ шонер гож’ёс ортчытом, озьы бере DE-лы но валлинэсь луись; AB дурлэн AD но DB вандэт’ёсыз озьы ик тупаса куспазы огзылы огзы ӵошась m но n вандэт’ёслы люкиськозы; со вандэт’ёслэсь нимысьтыз кузьдалазэс p букваэн пус’ём; соку $AD = mp$, $DB = np$ но $AB = (m+n)p$. Озьы бере:

$$\text{I.}\quad \frac{AE}{EC} = \frac{mq}{nq} = \frac{m}{n};\quad \frac{AD}{DB} = \frac{mp}{np} = \frac{m}{n}\quad \text{но}\quad \frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DB}$$

$$\text{II.}\quad \frac{AC}{EC} = \frac{(m+p)\ q}{nq} = \frac{m+n}{n};\quad \frac{AB}{DB} = \frac{(m+n)\ p}{np} = \frac{m+n}{n}\quad \text{но}\quad \frac{AC}{EC} = \frac{AB}{DB}$$

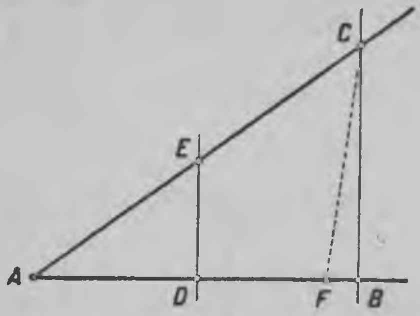
$$\text{III.}\quad \frac{AC}{AE} = \frac{(m+n)\ q}{mq} = \frac{m+n}{m};\quad \frac{AB}{AD} = \frac{(m+n)\ p}{mp} = \frac{m+n}{m}\quad \text{но}\quad \frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD}$$

Мертаськисьтэм вандэт’ёслы но та теорема шонер пуксе.

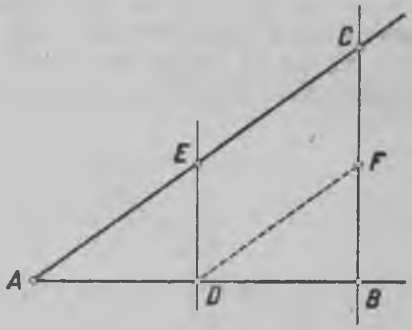
Теорема (берлань). **Сэреглэсь дур‘ёссэ кык шонер гожен вожвылтон дыр’я огпал дурысьтыз котькуд кык вандэтэз мызон пал дурысьтыз кык тупасесь вандэт’ёс кадь кусыпасько ке, соку сыӵе шонер гож’ёс валлинэсь.**

Сётэмын: BC но DE $BAC\ \angle$ -лэсь дур‘ёссэ вожвылто; $\dfrac{AE}{EC} = \dfrac{AD}{DB}$ (222 сур.).

Зэме поттыны кулэ: $BC \parallel DE$.



222 сур.



223 сур.

Зэме поттон. BC DE-лы валлин ӧвӧл шуом, C точкаэтӥ ортчись, мукет кыӵе ке CF шонер гож, DE-лы валлин но F точкаэтӥ AB дурез вожвылтэ. Соку шонеро теоремая BAC сэреглэн дур’ёсыз вылын пропорцио вандэт’ёс пото соку $\dfrac{AE}{EC} = \dfrac{AD}{DF}$. Та шедьтэм пропорциэз сётэм $\dfrac{AE}{EC} = \dfrac{AD}{DB}$ пропорциэн ӵошатыса, куинь член’ёсыз ог- огзылы ӵошасесь кык пропорциосын ньылетӥ член’ёсыз но ӵошаны кулэ шуса йылпум’яськом, мукет сямен $DF = DB$, со нош ку ке F точка B точкаэн тупалоз, соку гинэ луыны быгатоз; нош та возьматэ:

BC DE-лы валлин ӧвӧл шуэммы шонер ӧвӧл, соку $BC \parallel DE$

***Теорема.* Валлинэсь шонер гож’ёс сэреглэсь дур’ёссэ вожвылто ке, соку валлинэсьёслэн вандэт’ёссы сэреглэн йылысе-**

ныз сэрег дур'ёслэн тупасесь пум'ёсызлэн кусып'ёссы кадь отношениын луо.

Сётэмын: $\underline{BAC \angle; BC \parallel DE}$ (223 сур.).

Зэме поттыны кулэ: $\frac{BC}{DE} = \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.

Зэме поттон. Юрттйсь шонер гож $DF \parallel AC$ ортчытом, соку $DE = FC$ (223 с.). $ABC \angle$ эскером; со AC но DF валлин шонер гож'ёсын вожвылтэмын, иське $\frac{BC}{FC} = \frac{BA}{DA}$; FC-эз солы чошась DE вандэтэн воштыса, $\frac{BC}{DE} = \frac{BA}{DA}$ потоз, нош $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$; соин ик $\frac{BC}{DE} = \frac{AC}{AE} =$. Озьы бере,

$$\frac{BC}{DE} = \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

Вандэт'ёс мергаськисьтэм луон учыре но теорема зэм.

§ 6. Люкрак сиосыз вожвылтйсь валлинэсь шонергож'ёслэн аслык'ёсыз

Теорема. **Люкрак сиосыз валлинэсь шонер гож'ёсын вожвылтйд ке, соку сиос вылын тупасесь вандэт'ёс но валинэсьёслэн тупасесь вандэт'ёссы пропорцио луозы.**

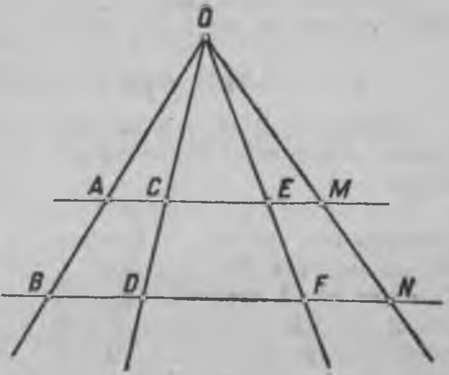
Сётэмын: $\underline{O}$ шорен люкрак сиос; $AM \parallel BN$ (224 сур.).

Зэме поттыны кулэ: 1) $\frac{OA}{AB} = \frac{OC}{CD} = \frac{OE}{EF} = \frac{OM}{MN}$; 2) $\frac{BD}{AC} = \frac{DF}{CE} = \frac{FN}{EM} = \frac{ON}{OM}$

Зэме поттон. Люклэн нимысьтыз кык сиосыз BOD, DOF но FON сэрег'ёс пörмыто: со сэрег'ёс кык валлинэсь BN но AM шонер гож'ёсын вожвылтэмын, соос нош сэрег'ёслэн дур'ёсаз про орцио вандэт'ёс вожвылто, соин ик:

$$\frac{OA}{AB} = \frac{OC}{CD}; \quad \frac{OC}{CD} = \frac{OE}{EF}; \quad \frac{OE}{EF} = \frac{OM}{MN}$$

Та пропорциосыз кусыпазы чошатыса $\frac{OA}{AB} = \frac{OC}{CD} = \frac{OE}{EF} = \frac{OM}{MN}$ шуса поттйськом.



224 сур.

Теоремалэн нырисетй люкетэз зэме поттэмын: теоремалэсь кыкетй люкетсэ зэме поттон понна пропорци лэсьтом. Со пропорциэ BOD, DOF но FON сэрег'ёслэсь дур'ёссэс вамен вандйсь валлинэсь шонергож'ёслэн вандэт'ёссы пырозы; соку потоз:

$$\frac{BD}{AC}=\frac{OB}{OA}=\frac{OD}{OC};\ \frac{DF}{CE}=\frac{OD}{OC}=\frac{OF}{OE};\ \frac{FN}{EM}=\frac{OF}{OE}=\frac{ON}{OM}.$$

Та пропорциосыз ваче ӵошатыса: $\frac{BD}{AC}=\frac{DF}{CE}=\frac{FN}{EM}=\frac{ON}{OM}$ шедьтӥськом.

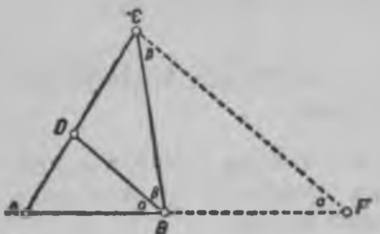
Теоремалэн кыкетӥ люкетэз зэме поттэмын.

§ 7. Куиньсэрголэн пушпал сэрегезлэн биссектрисаэзлэн аслыкез.

Теорема. **Куиньсэрголэн пушпал сэрегезлэн биссектрисаэз, со сэреглы пумит кыллись дурзэ, кык мызон дур'ёсызлы пропорцио люкет'ёслы люке.**

Сётэмын: $ABC\triangle$ BD — биссектриса; $\alpha\angle=\beta\angle$ (225 сур).
Зэме поттыны кулэ: $AD:DC=AB:BC$

Зэме поттон. C йыл пыртӥ, AB дурлэн кузёмытэмезлэн F точкааз вожвылскытозяз $CF \parallel BD$ шонергож ортчытом.



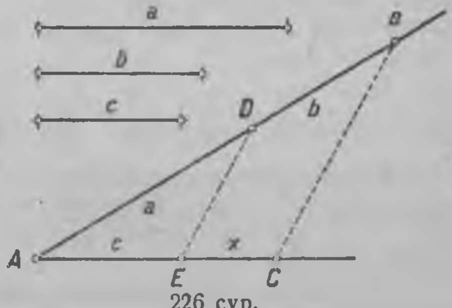
225 сур.

BD но CF ваалинэсь шонер гож'ёс A сэреглэсь дур'ёссэ вожвылто но соосыз пропорцио вандэт'ёслы вандо, соин ик $AD:DC=AB:BF$. $BCF\triangle$-ын луэ: $F\angle=\alpha\angle$, BD но FC валлинэсь но AF вамен вандӥсь луон дыр'я тупасесь сэрег'ёс луэмен но $\beta\angle=BCF\angle$, со валлин'ёс ик но BC вамен вандӥсь луыса пушпал кечат кыллись сэрег'ёс луыса. Озьы ке $\alpha\angle=\beta\angle$, озьы ке, $F\angle=C\angle$; $BCF\triangle$-лэн дӥняз луись сэрег'ёс луэмен соос ӵошало, соин ик $BCF\triangle$ огкадь урдэс'ем но $BF=BC$.

Потэм пропорциысь BF вандэтсэ солы ӵошась BC вандэтэн, $ABC\triangle$ дуреныз воштыса $AD:DC=AB:BC$ потоз.

§ 8. Ньылетӥзэ пропорцио вандэт лэсьтон.

Задача. *a, b но c вандэт'ёс сётэмын* (226 сур). *Соослы пропорцио ньылети вандэт лэсьтоно.*



226 сур.

Лэсьтонэз: $a:b=c:x$ пропорцилы тупась x вандэт лэсьтыны кулэ. Огшоры $BAC\angle$ басьтом но A сэреглэн йылысеныз кутскыса солэн одӥг дур вылаз радысьтыз $AD=a$ $DB=b$ вандэт'ёс интыалом, нош мукет дураз — $AE=c$ вандэт, D но E точкаосыз DE шонер гожен огазеаса, $BC \parallel DE$ ортчытом, соку $EC=x$ утчано ньылетӥ пропорцио вандэт луоз.

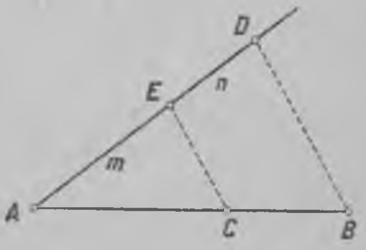
Зэмзэ ик: $BC \parallel ED$, соин ик $a:b=c:x$.

§ 9. Сётэм отношения вандэтэз люкон.

Задача. *$AB = a$ вандэтэз* (227 сур.). *кык AC но BC вандэт‘ёслы люконо, соослэн отношенизы — m но n сётэм лыд‘ёслэн отношенизылы мед ӵошалоз.*

Лэсьтонэз. Задачалэн условиез’я $AC:CB = m:n$.

$m = 4$ но $n = 3$ кузьдала единицалы мед ӵошалоз. Огшоры бадӟымлык’ем $BAD \angle$ лэсьтӥськом: со сэреглэн огпал дураз, A йылысеныз кутскыса $AB = a$ вандэт интыаськом, нош мукет дураз — радысьтыз $AE = m$ но $ED = n$ вандэт’ёс. B но D точкаосыз шонер гожен огазеаса, люкон E точка пыртӥ $EC \parallel BD$ шонер гож ортчытом, со C точкаетӥ AB-эз вожвылтоз. Та C точка AB-эз $m:n$ отношения люкоз.



227 сур.

Зэмзэ ик: $EC \parallel BD$, соин ик.

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AE}{ED} = \frac{m}{n}$$

Юан‘ёс но уж‘ёс.

1. Ку ке кык вандэт’ёсызлэн отношенизы 62,1:18 ӵошалоз но, мукет кык вандэт’ёсызлэн отношенизы 41,4:12 ӵошаса, вандэт’ёс пропорцио луозы-а?

2. $ABC \triangle$-лэн огпал дурысьтыз M точкаэз шедьтоно, со точкаын одӥг дурез кык мукет дур’ёсызлы пропорцио люкет’ёслы мед люкиськозы.

3. ACB огкадь урдэс’ем куиньсэрголэн дур’ёсыз 1:4 кадь кусыпасько. Солэн периметрез $P = 4{,}5$ *см*. Дур’ёссэ шедьтоно.

4. Произведениослэн ӵошамысьтызы котькыӵе пӧртэм луоно пропорциос лэсьтоно.

1) $x \cdot y = m \cdot n$, 2) $12 \cdot 8 = 16 \cdot 6$.

5. $a = 5$ *см* но $b = 8$ *см* дур’ёсын шонерсэрго сётэмын. Солы бадӟымен огкадь $c = 6$ *см* урдэсэн шонерсэрго лэсьтоно. Солэсь кыкетӥ дурезлэсь кузьдалазэ лэсьтонэн шедьтоно.

6. $a = 16$ *см* дӥнен куиньсэрго сётэмын. Дӥньысеныз лыд’яса, солэн урдэс дурез 2:3:5 отношениэн куинь люкетлы люкемын но люкон точкаос пыртӥ дӥнезлы валлинэсь шонергож’ёс ортчытэмын. Урдэс дур’ёсыз вискы пыртэм со шонер гож’ёслэн вандэт’ёсызлэсь кузьдалазэс лыд’яно.

XVI. ФИГУРАОСЛЭН КЕЛЬШЕМЗЫ.

§ 1. Кельшись уносэргоос.

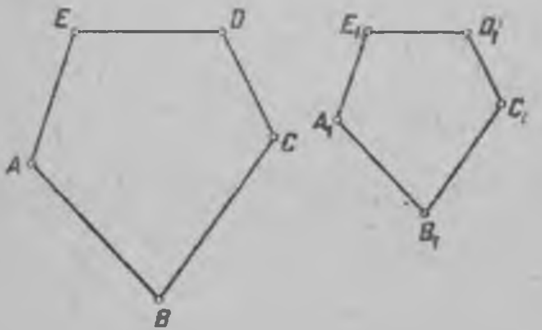
1. Участоклэсь планзэ суредан дыр’я яке машинаослэсь детальзылэсь технической чертёжзэ быдэстыку, участоклэсь контурзэ пукто, яке машинаослэсь детальзэ пичиомытэм тусэн пукто. Соку дыр’я суредано фигуралэсь туссэ чик воштытэк озьы ик кельтыса пукто.

Фигуралэсь гожо бадӟымлыксэ огмында лыд пол кулэстыса, соку вань сэрег’ёслэсь бадӟымлыксэс воштытэк кельтыса, асьмеос фигуралэсь туссэ возиськом но фигуралэсь суредзэ пичиомытэм туссэ басьтӥськом. Со нош ас фигураэзлэсь ас бадӟымлыкеныз гинэ пӧртэмске.

2. 228 суред вылын $ABCDE$ но $A_1B_1C_1D_1E_1$ огмында лыдо дур'ёсын кык уносэргоос сётэмын; сооcлэн сэрег'ёссы радысьтыз ӵошало: $A\angle = A_1\angle$; $B\angle = B_1\angle$; $C\angle = C_1\angle$; $D\angle = D_1\angle$; $E\angle = E_1\angle$; со сяна тупаса интыам дур'ёслэн отношениоссы ӵошало:

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1D_1}{CD} = \frac{D_1E_1}{DE} = \frac{E_1A_1}{EA} = k.$$

Сыӵе кык уносэргоос кельшисесь шуса нимасько.



228 сур.

Уносэрегооослэн дур'ёссы огмында ке, сэрег'ёссы тупаса ӵошало но, сооcлэн огвыллемесь дур'ёссы пропорциоэсь ке, кык уносэрегоос кельшисесь шуса нимасько.

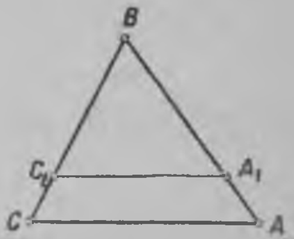
Уносэрголэн дур'ёсаз тупаса ӵошась сэрег'ёс вöзазы интыасько ке, уносэрголэн сыӵе дур'ёсыз огвыллемесь дур'ёс шуса нимасько. Кельшем $\backsim$ пусэн пусйиське.

$A_1B_1C_1D_1E_1 \backsim ABCDE$ гожтэм тазьы лыдӟиське: $A_1B_1C_1D_1E_1$ уносэрго кельше $ABCDE$ уносэреголы.

Кык кельшись уносэрегооослэн огвыллемесь дур'ёсызлэн отношенизы кельшемезлэн коэфициэнтэз шуса нимаське.

Уносэрегооослэн кельшемзылэн коэфицинтэз $\frac{A_1B_1}{AB} = k = 1$ ке, соку уносэргоос ӵошало. Татысен, ӵошан — кельшонлэн частной учырез гинэ шуса йылпум'яськом.

§ 2. Куиньсэргослэн кельшонзы.



229 сур.

Куиньсэргооослэн тупаса ӵошась сэрег'ёссы но огвылелмесь дур'ёссы пропорциоэсь ке, сыӵе куиньсэргоос кельшисесь шуса нимасько.

Куиньсэргооослэн огвыллемесь дур'ёссы ӵошась сэрег'ёслы пумит кыллё.

Теорема. Куиньсэрголэн одйг дурезлы валлин шонер гож, со бордысь сётэмлы кельшись куиньсэргоэз вандэ.

Сётэмын: $ABC\triangle$-ын $C_1A_1 \parallel CA$ вандэт (229 сур.)

Зэмэ поттыны кулэ: $A_1B_1C_1\triangle \backsim ABC\triangle$ мукет сямен 1) $A\angle = A_1\angle$, $C\angle = C_1\angle$

2) $\frac{BA_1}{BA} = \frac{BC_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA}$.

Зэме поттон. $C_1A_1 \parallel CA$ ортчытіськом, $A_1B_1C_1 \triangle$ поттіськом, солэн серег'ёсыз $ABC \triangle$ сэрег'ёсызлы ӵошало; озьы $B \angle$ — ог'я сэрег; $A_1 \angle = A \angle$ тупась сэрег'ёс луыса, $C_1 \angle = C \angle$. Сиослэн люксы сярись теорема вылэ пыкиськыса, асьмелэн:

$$\frac{BA_1}{BA} = \frac{BC_1}{BC} = \frac{C_1B_1}{CA};$$

озьы бере куиньсэргоос кельшисесь: $A_1BC_1 \triangle \sim ABC \triangle$

§ 3. Куиньсэргооcлэн кельшонзылэн куинь тодметсы.

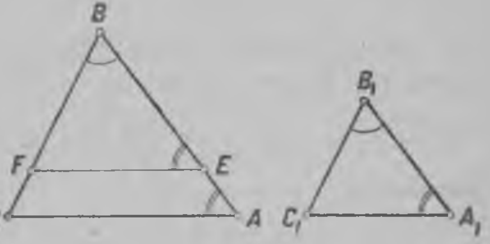
Куиньсэргооcлэн кельшемзылэн нырись тодметэз.

Теорема. **Одйг куиньсэрголэн кык сэрег'ёсыз мукетэзлэн кык ысэрег'ёсызлы тупаса ӵошало ке, сыӵе куиньсэргоос кельшисесь.**

Сётэмын: $ABC \triangle$ но $A_1B_1C_1 \triangle$. $A \angle = A_1 \angle$ но $B_1 \angle = B \angle$ (230 сур.).

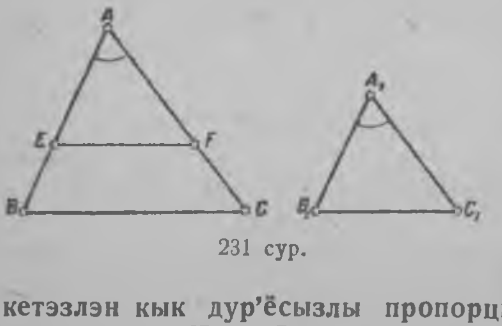
Зэме поттыны кулэ: $A_1B_1C_1 \triangle \backsim ABC \triangle$ луэмзэ.

Зэме поттон. Условия $A \angle = A_1 \angle$ но $B \angle = B_1 \angle$, соин ик, сётэм сэрег'ёслэн суммазылэн $2\,d$-озь тырмытон ватсэт луыса $C \angle = C_1 \angle$. AB дур вылэ B йылысен $BE = B_1A_1$ вандэт интыалом но $FE \parallel CA$ ортчытом, $EBF \triangle \backsim ABC \triangle$ поттом; $EBF \triangle = A_1B_1C_1 \triangle$ сооcлэн $BE = B_1A_1$ луэмен $B \angle = B_1 \angle$ условиэз'я но $E \angle = A \angle = A_1 \angle$ озьы ке, $EBF \triangle \backsim ABC \triangle$, соин ик, солы ӵошась $A_1B_1C_1 \triangle \backsim ABC \triangle$.



230 сур.

Следствиос **1) Шонерсэрег'ем куиньсэргоос быдэн ог мында йылсо сэрег возё ке, соос кельшисесь.**



231 сур.

2) Огкадь урдэсо куиньсэргоос йылаз яке дйняз быдэн огкадь сэрег возё ке, соос кельшисесь.

3) Огкадь дуро куиньсергоос кельшисесь.

2. Куиньсэргооcлэн кельшемзылэн кыкетй тодметэз.

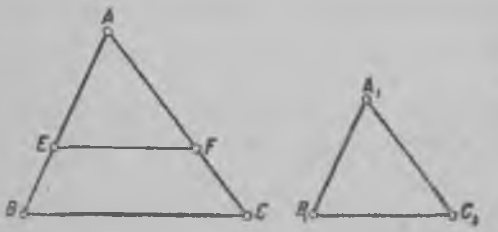
Теорема. **Одйг куиньсэрголэн кык дур'ёсыз мукетэзлэн кык дур'ёсызлы пропорцио ке, но со дур'ёс вискы пыртэм сэрег'ёсыз ӵошало ке, соку куиньсэргоос кельшисесь.**

Сётэмын: $ABC \triangle$ но $A_1B_1C_1 \triangle \frac{A_1B^1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC}$ но $A_1 \angle = A \angle$ (231 сур.)

Зэме потыны кулэ: $A_1B_1C_1 \triangle \backsim ABC \triangle$-лы.

Зэме поттон. AB дуре A йылысен $AE = A_1B_1$ вандэт интыалом но $EF \parallel BC$ ортчытом, $AEF \triangle \backsim ABC \triangle$ потоз. Куиньсэргоослэн кельшемысьтызы: $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$ потэ (1); пропорциысь (1) AE-эз A_1B_1 пыртӥ воштыса, $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{AF}{AC}$ (2) луоз.

(2) ӵошанэз условиаз сётэм пропорциэн ӵошатыса, соослэн куинь члензы огкадесь шуса пусйиськом, озьы бере ньылетӥ член'ёсыз но ӵошаны кулэ, мукет сямен, $AF = A_1C_1$; $A_1B_1C_1 \triangle = AEF \triangle$ соослэн $A_1 \angle = A \angle$ условиез'я, $AE = A_1B_1$ лэсьтэмез'я но $AF = A_1C_1$ зэме поттэм'я, $AEF \triangle \backsim ABC \triangle$, соин ик, солы ӵошась $A_1B_1C_1 \triangle \backsim ABC \triangle$.



232 сур.

Следстви. **Катет'ёслэн отношениоссы ӵошало ке, шэнерсэрег'ем куиньсэргоос кельшисесь.**

3. Куиньсэргоослэн кельшемзылэн куинетӥ тодметэз,

Теорема. **Одӥг куиньсэрголэн куинь дур'ёсыз мызонэзлэн куинь дур'ёсызлы пропорцио ке, сыӵе куиньсэргоос кельшисесь**

Сётэмын: $ABC \triangle$ но $A_1B_1C_1 \triangle$; $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA}$ (232 сур.).

Зэме поттыны кулэ: $A_1B_1C_1 \triangle \backsim ABC \triangle$.

Зэме поттон: AB дур вылэ A йылысен $AE = A_1B_1$ вандэт интыалом но $EF \parallel BC$ ортчытом, соку $AEF \triangle \backsim ABC \triangle$. Куиньсэргоослэн кельшемысьтызы $\frac{AE}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{EF}{BC}$ (1) луыса потэ. Нырисетӥ отношениысь AE-эз A_1B_1 пыртӥ воштыса $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$ (2) поттом.

(2) пропорциэз, условиын сётэм пропорциэн ӵошатыса, $\frac{AF}{AC} = \frac{A_1C_1}{AC}$ шуса йылпум'яськом, татысь $AF = A_1C_1$ но $\frac{EF}{BC} = \frac{B_1C_1}{BC}$ озьы ке, $EF = B_1C_1$.

Озьы дыр'я, AEF куиньсэрголэн куинь дур'ёсыз $A_1B_1C_1$ куиньсэрголэн куинь дур'ёсызлы ӵошало, иське $AEF \triangle = A_1B_1C_1 \triangle$, нош $AEF \triangle \backsim ABC \triangle$, соин ик, солы ӵошась $A_1B_1C_1 \triangle \backsim ABC \triangle$.

Следстви. **Одӥг куиньсэрголэн дӥнез но урдэс дурез, мукетэзлэн дӥнезлы но урдэс дурезлы пропоцио ке, соку огкадь урдэс'ем куиньсэргоос кельшисесь.**

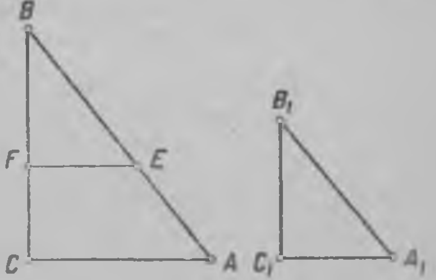
4. ***Теорема.*** **Одӥг куиньсэрголэн гипотенузаэз но катетэз**

мукетэзлэн гипотенузаэзлы но катетэзлы пропорцио ке, соку шонерсэрег'ем куиньсэргоос кельшисесь.

Сётэмын: $ABC \triangle$ но $A_1B_1C_1 \triangle$ $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC}$ (233 сур.).

Зэмэ поттыны кулэ: $A_1B_1C_1 \triangle \backsim ABC \triangle$ - лы.

Зэме поттон. BA гипотенуза вылэ B йылсен $BE = B_1A_1$ вандэт интыалом но но $EF \parallel AC$ ортчытом. $BEF \triangle \backsim ABC \triangle$, соин ик $\frac{BE}{AB} = \frac{BF}{BC}$; потэм пропорциэз сётэм пропорциэн чошатэмысь $BF = B_1C_1$ шуса йылпум'яськом; озьы бере, гипотенузаэз'я но катетэз'я $EBF \triangle = A_1B_1C_1 \triangle$. Нош $EBF \triangle \backsim ABC \triangle$, соин ик, солы чошась $A_1B_1C_1 \triangle \backsim ABC \triangle$.



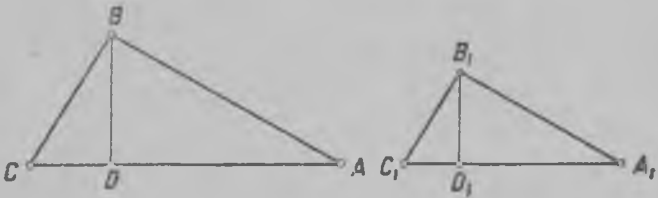
233 сур.

§ 4. Кельшись куиньсэргоослэн йуждалазылэн но дур'ёсызлэн пропорциональносьтсы.

1. *Теорема.* **Кельшись куиньсэргооcлэн йуждалазы огвыллемесь дур'ёссылы пропорциоэсь.**

Сётэмын: $ABC \triangle \backsim A_1B_1C_1 \triangle$; BDно B_1D_1 — йуждалаосыз (234 сур.)

Зэме поттыны кулэ: $\frac{B_1D_1}{BD} = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA}$



234 сур.

Зэме поттон. ABD но $A_1B_1D_1$ шонерсэрег'ем куиньсэргоос огкадесь, $A\angle = A_1\angle$ йылсо сэрег'ёссы луэмен, кальшисесь. Сооcлэн кальшемысьтызы $\frac{B_1D_1}{BD} = \frac{A_1B_1}{AB}$ луса потэ, озьыэн нош,

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA},$$

нош соин ик но $\frac{B_1D_1}{BD} = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA}$,

мукет сямен, кельшись куиньсэргооcлэн йуждалаоссы, огвыллемесь дур'ёссылэн котькуд кузэзлы пропорциоэсь.

2. *Кельшись куиньсэргоосын огвыллемесь биссектрисаос он медианаос огвыллемесь дур‘ёсызлы пропорциоэсь.*

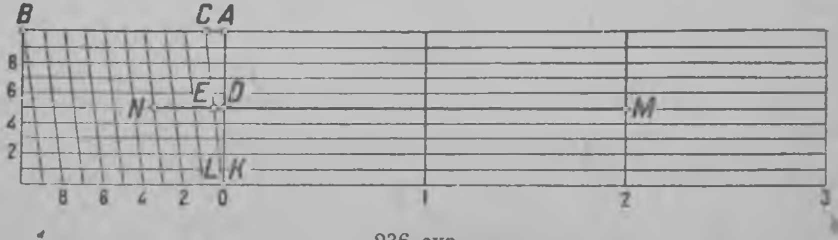
3. Геометрио задачаосыз лыд’ян дыр’я асьмеос куиньсэргоослэн кельшемзы бордэ кутскыкумы, одйг отношенилэн член’ёсыз одйг куиньсэрголэн гожо элемент’ёсыз мед луозы, мукет отношенилэн член’ёсыз нош мукет куиньсэрголэн огвыллемесь элемент’ёсыз луыса пропорциэз лэсьтыны умой луэ.

§ 5. Кельшись куиньсэргоослэн аслык‘ёссы вылэ пыкиськыса лэсьтэм прибор‘ёс.

1. Люкись циркуль. Чертежной уж’ёсыз быдэс’ян дыр’я **люкись циркулез** уже куто (235 сур.). Со, вандэт’ёсыз ог быдза люкет’ёслы люкыны кутйське; солэн лэсьтэмез куиньсэргоослэн кельшемзы вылэ пыкиськемын. Люкись циркульлэн кык пал пум йыл’ёсыз ик йылсам AD но CB кык кук’ёсыз луо; пыд’ёсыз кузя кырет‘ёсыз вань но пыд’ёсыз O шарнирен огазеамын. Люкись циркулен, кылсярись PQ вандэтлэсь куинети люкетсэ шедьтон понна, OC сярись BO куинь пол бадзымгес мед луоз шуса O шарнирез юнмато; лыдзыны каньыл мед луза шуса AD но CB пыд’ёсыз вылэ люкет’ёс пусйылэмын. O шарнирез юнматыса, B но D пыд‘ёслэсь пум’ёссэ вандэтлэн P но Q точкаосаз пукто. Соку нош C но A пум’ёсысь висызлэн кусыпез MN-лэн $^1/_3$ люкетэзлы чоша.

235 сур.

Зэмен ик, $COA\triangle \backsim BOD\triangle$, отысь $\frac{CA}{BD}=\frac{OC}{OB}$ нош озьыэн $CO=\frac{1}{3}OB$, соин ик $\frac{CA}{BD}=\frac{1}{3}$ озьы дыр’я $CA=\frac{1}{3}BD$, яке $CA=\frac{1}{3}PQ$, $BD=PQ$.



236 сур.

2. Вамен масштаб. Гожо масштабен, масштаб единицалэсь векчи люкет’ёссэ мертаны уг улы; со луымтээз вамен масштабен быдто. Со масштабен единицалэсь дасэтй но сюэтй люкет‘ёссэ ытыалляны луэ. Вамен масштаблэн лэсьтэмез 236 суред вылын возьматэмын.

Отын мертэтлэн единицаэз BA луэ; $CA=0{,}1\ BA$. Шонер AC-лы валлин гож ортчытэм AOC куиньсэргоысь асьмелэн: $KL=0{,}1CA$, яке BA-лэн 0,01 люкетэзлы; $AOC\triangle$-ысь мукет'ёсыз валлинэсь вандэт'ёс тупаса BA мертэт единицалэн 0,02-лы, 0,03. 0,10 ӵошало.

Вамен масштабез уже кутон. Кылсярись, $x=2{,}35$. AB вандэтэз интыаны кулэ. Циркульлэсь одӥг пал пум йылсозэ M точкаэ пуктӥськом, мукетсэ N точкаэ, соку $NM=x=2{,}35$. Зэмзэ ик, $MN=DM=ED+NE$, отын нош $DM=2BA$, $NE=0{,}3BA$, $ED=0{,}05BA$, $OAC\triangle\backsim ODE\triangle$ дыр'я, отысь $\frac{OD}{OA}=\frac{ED}{CA}=\frac{5}{10}$;

соин ик, $ED=\frac{5}{10}CA$, нош озьыэн $CA=0{,}1AB$ озьы дыр'я $ED=0{,}5BA$.

Озьыэн, $NM=2+0{,}3+0{,}05=2{,}35$.

§ 6. Кельшись шонер гожо фигураос лэсьтон.

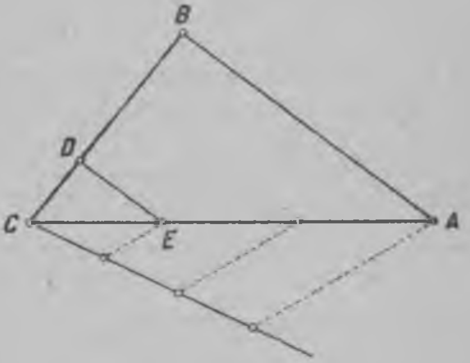
1 задача. *ABC куиньсэрголы кельшись* (237 сур.) *куиньсэргоос лэсьтоно. Сётэм ABC куиньсэрголэн сярись дур'ёсыз куинь пол пичиэсь лушь куиньсэрго лэсьтоно.*

Лэсьтонэз. ABC куиньсэрголэсь одӥг дурзэ, кылсярись AC дурез 3 огкадесь люкетлы люкиськом но люкон E точкаэтӥ ABC куиньсэрголэн AB дурезлы валлинэсь ED шонер гож ортчытӥськом; сётэмлы кельшись $EDC\triangle$ поттӥськом.

$EDC\triangle\backsim ABC\triangle$ огкадь сэрег'ем куиньсэргоос луыса,

2 задача. *Сётэм a вандэт вылын ABC куиньсэрголы кельшись* (238 сур.) *куиньсэрго лэсьтоно.*

Лэсьтонэз. a вандэт ABC куиньсэрголэн CA дуреныз огвыллем.



237 сур.

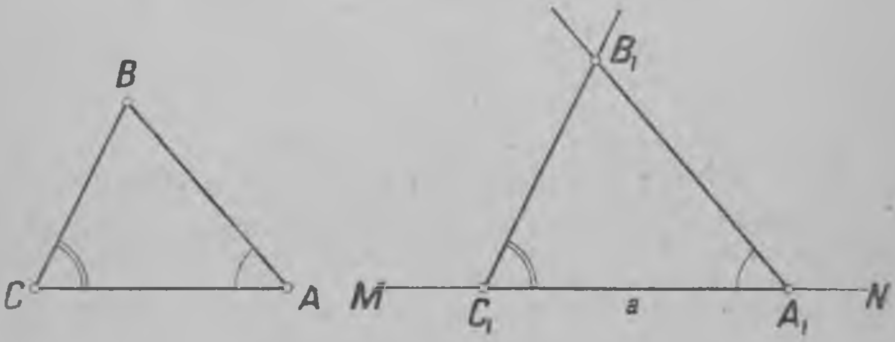
MN шонер гож вылэ $C_1A_1=a$ вандэт интыалом, A_1 точкааз $A_1\angle=A\angle$ лэсьтӥськом но C_1 точкааз $C_1\angle=C\angle$; $A_1B_1C_1\triangle\backsim ABC\triangle$ поттӥськом.

Зэмзэ ик, быдэн кык тупаса ӵошась сэрег'ёс воземен та куиньсэргоос кельшисесь.

3 задача. *Сётэм $ABC\triangle$-э* (239 сур.), *квадратэз пушпал гожтом. Со квадратлэн кык йыл'ёсыз куиньсэрголэн динь вылаз мед кыллёзы, нош мукет кык йыл'ёсыз — куиньсэрголэн урдэс дур'ёс вылаз.*

Лыд'янэз. Куиньсэрголэн AB дурезлэн огшоры басьтэм N точкаысьтыз AC вылэ NK перпендикуляр лэсьтӥськом но дур'ёсыз'я NK-лы $KLMN$ квадрат лэсьтӥськом. Куиньсэрголэн A йылысьтыз квадратлэн M йыл пыртӥз BC дурен M_1 точкааз вожвылскытозяз AM_1 шонер гож ортчытом; собере $M_1L_1 \perp AC$, $M_1N_1 \parallel AC$ но $N_1K_1 \perp AC$ ортчытыса, утчано квадрат поттӥськом.

Зэме поттон. Зэмзэ ик $K_1L_1M_1N_1$ шонерсэрго. AL_1M_1 но ALM куиньсэргоослэн кельшемысьтызы $\frac{M_1L_1}{ML} = \frac{M_1A}{MA}$ луэ, AM_1N_1 но ANM куиньсэргооcлэн кельшемысьтызы $\frac{M_1N_1}{MN} = \frac{M_1A}{MA}$ луэ; озьы бере, $\frac{M_1L_1}{ML} = \frac{M_1N_1}{MN}$; лэсьтэммыя $ML = MN$ — квадратлэн дур'ёсыз луэмен, соин ик $M_1L_1 = M_1N_1$, $K_1L_1M_1N_1$ шонерсэрго — квадрат.

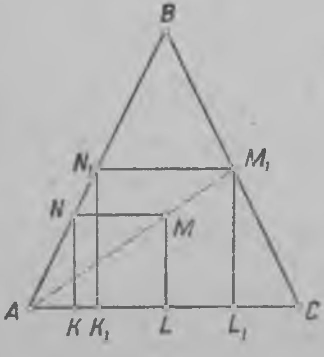


238 сур.

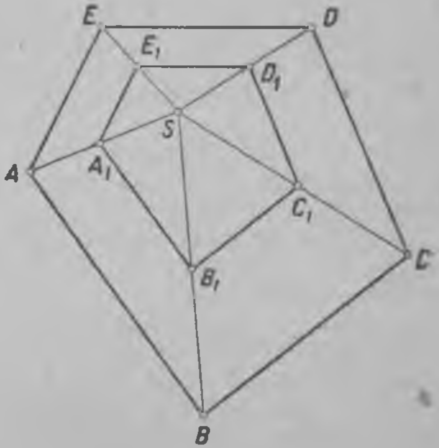
§ 7. Кельшыса интыям уносэргоос. Кельшонлэн шорез.

Задача. *Сётэмезлы кельшись уносэрго лэсьтоно*

Лэсьтонэз. Сётэм $ABCDE$ уносэрголэн кытчыаз ке пушказ S точка басьтом но солэн йыл'ёстӥз сиос ортчытом (240 сур.)



239 сур.



240 сур.

Одӥг си вылысь, кылсярись SA-ысь A_1 точка басьтом (та точкаэз сётэм уносэрголэн пушказ яке педпалаз бырйыны луоз) но, B_1 точкаын SB сиэн пумиськытозь, шонер гож $A_1B_1 \parallel AB$

ортчытом; B_1 точка пыртӥ C_1 точкаын SC сиэн пумиськытозь $B_1C_1 \parallel BC$ ортчытом; собере $C_1D_1 \parallel CD$, $Д_1E_1 \parallel DE$ но E_1-эз A_1-эн огазеалом; сётэм $ABCDE$ уносэрголы кельшись $A_1B_1C_1D_1E_1$ уносэрго потоз.

Зэмзэ ик люкрак сиос сярись теоремая луэ;

$$\frac{SA_1}{SA}=\frac{SB_1}{SB}=\frac{SC_1}{SC}=\frac{SD_1}{SD}=\frac{SE_1}{SE}$$

Озьы дыр'я $\frac{SA_1}{SA}=\frac{SE_1}{SE}$ луэмен $E_1A_1 \parallel EA$.

$A_1B_1 \parallel AB$, $B_1C_1 \parallel BC$ но азьланьын но озьы ик, соин ик, валлинэсь дуро луэмен $A_1\angle = A\angle$, $B_1\angle = B\angle$, $C_1\angle = C\angle$ но азьманэсь но озьы ик, но:

$$\frac{SA_1}{SA}=\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{SB_1}{SB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{SC_1}{SC}=\frac{C_1D_1}{CD}=\frac{SD_1}{SD}=\frac{D_1E_1}{DE}=\frac{SE_1}{SE}=\frac{E_1A_1}{EA}$$

Та отношениослэн ӵошанысьтызы:

$$\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{C_1D_1}{CD}=\frac{D_1E_1}{DE}=\frac{A_1E_1}{AE} \text{ луыса потэ.}$$

$A_1B_1C_1D_1E_1$ но $ABCDE$ уносэргоос тупаса ӵошась сэрег'ёс возё но, соослэн огвыллемесь дур'ёссы пропорцио; соин ик $A_1B_1C_1D_1E_1 \backsim ABCDE$. S точка кельшонлэн шорез шуиське, нош асьсэос уносэргоос кельшыса интыам шуисько

Одӥгзэ уносэргоэз мукетэз уносэрго ласянь интызэ воштӥд ке, кылсярись соэ берыктӥд ке, озьы уносэргоослэн кельшемзы уз сӧриськы; соослэн кельшыса интыаськемзы гинэ сӧриськоз, озьы луыса, соослэн огвыллемесь дур'ёссы валлинэсь уз луэ, но тупаса ӵошась сэрег'ёслэсь йыл'ёссэс огазеась сиос, одӥг со точка пыртӥ ик уз ортче; уносэргоос кельшон шорзэс ышто.

Уносэргоослэн кельшонзы понна таӵе одно кулэ услови луэ: 1) соослэн тупан сэрег'ёссылэн ӵошамзы, 2) соослэн огвыллемесь дур'ёссы пропорцио луон. Со сяна кельшыса интыам уносэргоос кельшон шор возьыны кулэ на.

§ 8. Кельшись уносэргоослэн диагональзылэн аслыкез.

План'ёсыз пӧртэм масштабен суреданы понна, сётэм планэз нимаз участок'ёслы люкыса, собере соосыз огзы сьӧре огзы суреданы умой луэ. Планэз куиньсэргоосын люкыло. Сыӵе гож'ёсын ортчыт'янлэн основааз таӵеэсь кык теоремаос кыллё.

1. ***Теорема.*** **Кык кельшись но кельшыса интыам уносэргоослэн тупаса ӵошась сэрег'ёслэн йылысенызы ортчытэм диагональёс соосыз огмында лыдо кельшись но кельшыса интыам куиньсэргоослы люкыло.**

Сётэмын: $A_1B_1C_1D_1E_1 \backsim ABCDE$ (241 сур.), мукет сямен,

1) $A_1\angle = A\angle$, $B_1\angle = B\angle$ но азьланьын но озьы ик;

2) $\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{C_1D_1}{CD}$ азьланьын но озьы ик;

3) A_1D_1 но AD, A_1C_1 но AC — огвыллемесь диагональёс.

Зэме поттыны кулэ:

1) $A_1B_1C_1 \triangle \backsim ABC \triangle$;

2) $A_1C_1D_1 \triangle \backsim ACD \triangle$;

3) $A_1D_1E_1 \triangle \backsim ADE \triangle$;

Зэме поттон. Условия $B_1\angle = B\angle$ но $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC}$ соин ик $A_1B_1C_1\triangle \backsim ABC\triangle$; сооспэн кельшемысьтызы тазьы потэ: $A_1C_1B_1\angle = ACB\angle$, но $C_1\angle = C\angle$, соин ик $A_1C_1D_1\angle = ACD\angle$, со сяна, $\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC}$, нош $\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1D_1}{CD}$ луэмен, $\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{C_1D_1}{CD}$ луэ. Нош $A_1C_1D_1\angle = ACD\angle$ но $\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{C_1D_1}{CD}$ луиз ке, соку $A_1C_1D_1\triangle \backsim ACD\triangle$. $A_1D_1E_1\triangle \backsim ADE\triangle$ озьы ик эзме поттӥське.

Следстви. **Кельшись уносэргооспэн огвыллемесь диагональзы огвыллемесь дур'ёсызлы пропорцио.**

$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{C_1D_1}{CD} = \frac{A_1D_1}{AD}$ азьланьын но озьы ик.

2. *Теорема (пумит).* **Кык уносэргоос огвыллемесь диагональёсын огмында лыдо кельшись но кельшыса интыам куиньсэргоослы люкисько ке, сыӵе уносэргоос келшисесь.**

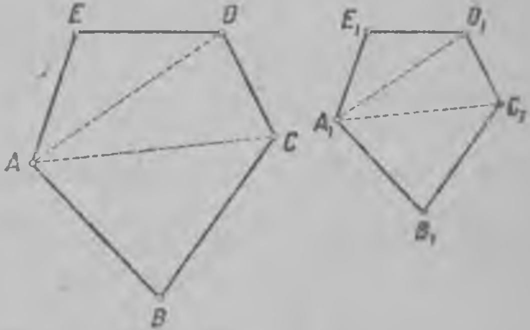
Сётэмын: $\left.\begin{array}{l} A_1B_1C_1\triangle \backsim ABC\triangle \\ A_1C_1D_1\triangle \backsim ACD\triangle \\ A_1D_1E_1\triangle \backsim ADE\triangle \end{array}\right\}$ но кельшыса интыамын (241 с.).

Эзме поттыны кулэ: $A_1B_1C_1D_1E_1 \backsim ABCDE$, мукет сямен,

1) $A\angle = A_1\angle$; $B\angle = B_1\angle$ азьланьын но озьы ик,

2) $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1D_1}{CD}$ азьланьын но озьы ик.

Зэме поттон. (1) $B_1\angle = B\angle$ но $A_1C_1B_1\angle = ACB\angle$, со $A_1B_1C_1$ но ABC куиньсэргооспэн кельшемысьтызы потэ. (2) $A_1C_1D_1\angle = ACD\angle$ со $A_1C_1D_1$ но ACD куиньсэргооспэн кельшемыстызы потэ. (1) но (2) ӵошан'ёсыз членэн-членэн огазе тырыса, $C_1\angle = C\angle$ луэ; озьы ик, уносэрголэн мукет сэрег'ёсызлэн ӵошамзы зэме поттӥське.



241 сур.

$A_1B_1C_1$ но ABC куиньсэргооспэн кельшемысьтызы, сооспэн дур'ёссылэн пропорцио вылэмзы потэ. Со таӵе $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC}$; $A_1C_1D_1$ но ACD куиньсэргооспэн кельшемыстызы $\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{C_1D_1}{CD}$ луэ; та берпум кык ӵошан'ёсыз ваче пуктыса, $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1D_1}{CD}$ потэ. Кыкезлэн ик та уносэргооспэн мызон дур'ёссылэн пропорцио вылэмзы тазьы ик зэме поттӥське.

Озьы дыр'я, $A_1B_1C_1D_1E_1 \backsim ABCDE$.

§ 9. Кельшись фигураослэн периметр'ёссылэн отношенизы.

Теорема. **Кельшись уносэргоослэн периметр'ёссы уносэргоослэн огвыллемесь дур'ёссы кадь кусыпасько.**

Сётэмын: $\underline{A_1B_1C_1D_1E_1 \backsim ABCDE}$ (241 сур.).

Зэме поттоно: $\dfrac{A_1B_1+B_1C_1+C_1D_1+D_1E_1+E_1A_1}{AB+BC+CD+DE+EA}=\dfrac{A_1B_1}{AB}=\dfrac{B_1C_1}{BC}=\ldots$

Зэме поттон: $ABCDE$ но $A_1B_1C_1D_1E_1$ уносэргоослэн кельшемыстызы таӵе потэ: $\dfrac{A_1B_1}{AB}=\dfrac{B_1C_1}{BC}=\dfrac{C_1D_1}{CD}=\dfrac{D_1E_1}{DE}=\dfrac{E_1A_1}{EA}=k.$

Радысьтыз ӵошась отношениослэн аслык'ёссы вылэ пыкиськыса тазьы луэ:

$$\frac{A_1B_1+B_1C_1+C_1D_1+D_1E_1+E_1A_1}{AB+BC+CD+DE+EA}=k=\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\ldots$$

яке $\dfrac{P_1}{P}=\dfrac{A_1B_1}{AB}$, отын P_1 но P — сётэм уносэргоослэн приметр'ёссы.

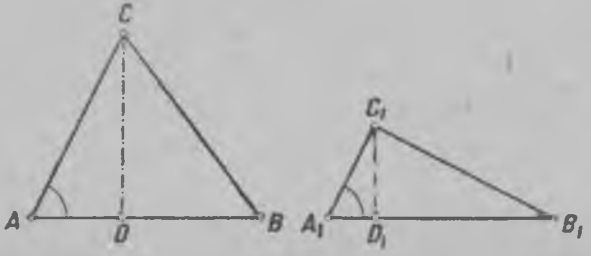
Та вылӥ теорема котькуд мында n лыдо дуро кельшись уносэргоослы зэм луэ; со $n=3$ учыр дыр'я но зэм луэ, мукет сямен, кельшись куиньсэргоослы.

§ 10. Кельшись куиньсэргоослэн но уносэргоослэн площадьзылэн отношенизы.

1. ***Теорема.*** Быдэн огкадесь сэрег возись кык куиньсэргоослэн площадьзы со сэрег'ёсыз висказы пыртӥсь дур'ёслэн произведениоссы кадь огенызы огзы кусыпасько.

Сётэмын: $\underline{ABC \triangle \text{ но } A_1B_1C_1 \triangle\text{-ын } A\angle = A_1\angle}$ (242 сур.).

Зэме поттыны кулэ: $\dfrac{S}{S_1}=\dfrac{AB\cdot AC}{A_1B_1\cdot A_1C_1}.$



242 сур.

Зэме потттон. $\dfrac{ABC\text{ пл.}}{A_1B_1C_1\text{ пл.}}=\dfrac{S}{S_1}=\dfrac{AB\cdot CD}{A_1B_1\cdot C_1D_1}=\dfrac{AB\cdot CD}{A_1B_1\cdot C_1D_1}$ (1)

та сётэм куиньсэргоосын CD но C_1D_1, ӝуждалаос ортӵытыса луэ.

$ACD\triangle \backsim A_1C_1D_1\triangle$, соос шонерсэрг'ем но быдэн тупаса ӵошась йылсо сэрег $A\angle = A_1\angle$ воземынызы; соослэн кельшемысьтызь потэ:

$$\frac{CD}{C_1D_1}=\frac{AC}{A_1C_1} \quad (2)$$

(1) чошанысь $\frac{CD}{C_1D_1}$ отношениез солы чошась $\frac{AC}{A_1C_1}$ отношениэн воштыса.

$$\frac{S}{S_1}=\frac{AB}{A_1B_1}\cdot\frac{AC}{A_1C_1},$$

яке

$$\frac{S}{S_1}=\frac{AB\cdot AC}{A_1B_1\cdot A_1C_1}$$

поттом.

Дур'ёсыз лыдэн возьматэмын дыр'я берпум гожтэмез куто. Теорема $A\angle+A_1\angle=2d$ луон дыр'ялы но зэмен кыле.

2. *Теорема.* Кельшись куинсэргооослэн площадьёссы огвыллемесь дур'ёслэн квадратсы сямен кусыпасько.

Сётэмын: $ABC\triangle\backsim A_1B_1C_1\triangle$ (243 сур.).

Зэме поттыны кулэ: $\frac{S}{S_1}=\frac{AB^2}{A_1B_1{}^2}=\frac{AC^2}{A_1C_1{}^2}=\frac{BC^2}{B_1C_1{}^2}$.

Зэме поттон: $ABC\triangle\backsim A_1B_1C_1\triangle$, озьы бере,

$$A\angle=A_1\angle,\ B\angle=B_1\angle.$$

соин ик,

$$\frac{S}{S_1}=\frac{AB\cdot AC}{A_1B_1\cdot A_1C_1}=\frac{AB}{A_1B_1}\cdot\frac{AC}{A_1C_1}. \qquad (1)$$

Куиньсэргооослэн кельшемыстызы,

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1}=\frac{BC}{B_1C_1} \text{ потэ.} \qquad (2)$$

(1) чошанысь кудзэ ке отношениез (2) чошанысь кудӥз ке отношениэн воштыса, потоз:

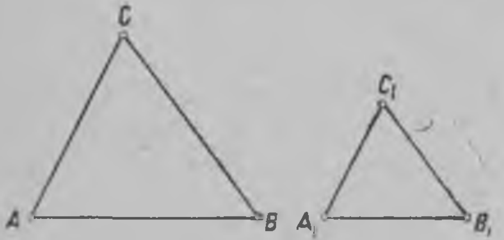
$$\frac{S}{S_1}=\frac{AB}{A_1B_1}\cdot\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AB^2}{A_1B_1{}^2}$$

нош озьы ке

$$\left(\frac{AB}{A_1B_1}\right)^2=\left(\frac{AC}{A_1C_1}\right)^2=\left(\frac{BC}{B_1C_1}\right)^2.$$

Соин ик

$$\frac{S}{S_1}=\frac{AB^2}{A_1B_1{}^2}=\frac{AC^2}{A_1C_1{}^2}=\frac{BC^2}{B_1C_1{}^2}.$$



243 сур.

3. *Теорема.* Кельшись уносэргооослэн площадьёссы огвыллемесь дур'ёссылэн квадратсы сямен кусыпасько.

Сётэмын: $ABCDE\backsim A_1B_1C_1D_1E_1$ (243 сур.).

Зэме поттыны кулэ: $\frac{S}{S_1}=\frac{AB^2}{A_1B_1{}^2}=\frac{BC^2}{B_1C_1{}^2}=\ldots$

Зэме поттон. Тупась A но A_1 йыл'ёсысь ортчытэм диагональёсын сётэм уносэргоос огмында лыдо тупаса кельшись куиньсэргоослы люкисько. Соос ABC но $A_1B_1C_1$, ACD но $A_1C_1D_1$, ADE но $A_1D_1E_1$ луо. Куиньсэргоослэн кельшемысьтызы потэ:

$$\frac{ABC \text{ пл.}}{A_1B_1C_1 \text{ пл.}} = \frac{AB^2}{A_1B_1^2} = \frac{BC^2}{B_1C_1^2}; \quad \frac{ACD \text{ пл.}}{A_1C_1D_1 \text{ пл.}} = \frac{CD^2}{C_1D_1^2};$$

$$\left.\frac{AED \text{ пл.}}{A_1E_1D_1 \text{ пл.}} = \frac{ED^2}{E_1D_1^2} = \frac{AE^2}{A_1E_1^2}\right\} \quad (1)$$

Уносэргоослэн келышемысьтызы луэ:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{DE}{D_1E_1} = \frac{EA}{E_1A_1}, \text{ яке}$$

$$\frac{AB^2}{A_1B_1^2} = \frac{BC^2}{B_1C_1^2} = \frac{CD^2}{C_1D_1^2} = \frac{DE^2}{D_1E_1^2} = \frac{EA^2}{E_1A_1^2}. \quad (2)$$

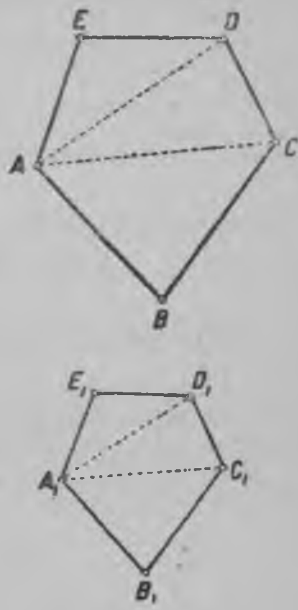
(1) но (2) рад'ёсысь отношениосыз ӵошатыса, луэ:

$$\frac{ABC \text{ пл.}}{A_1B_1C_1 \text{ пл.}} = \frac{ACD \text{ пл.}}{A_1C_1D_1 \text{ пл.}} = \frac{AED \text{ пл.}}{A_1E_1D_1 \text{ пл.}} = \frac{AB^2}{A_1B_1^2} = \dots$$

Ӵошась отношени рад'ёслэн аслык'ёссы вылэ пыкиськысэ, потэ:

$$\frac{ABC \text{ пл.} + ACD \text{ пл.} + AED \text{ пл.}}{A_1B_1C_1 \text{ пл.} + A_1C_1D_1 \text{ пл.} + A_1E_1D_1 \text{ пл.}} =$$

$$= \frac{ABCDE \text{ пл.}}{A_1B_1C_1D_1E_1 \text{ пл.}} = \frac{AB^2}{A_1B_1^2} = \frac{BC^2}{B_1C_1^2} \dots$$



243а сур.

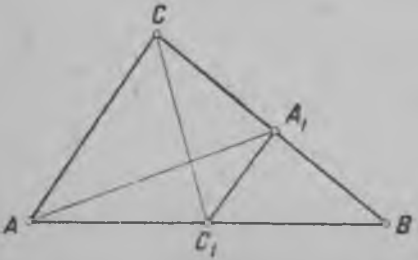
Юан'ёс но уж'ёс.

1. Перпендикуляр'ёсын тупась яке валлинэсь дур'ёсын куиньсэргоос малы кельшисесь луо?

2. Малы квадрат но шонерсэрго соослэн сэрег'ёссы шонересь луыса ӵошало ке но кельшись фигуралэн лыд'яськыны уг быгато?

3. Малы a дуро квадрат но $2\ a$ дуро ромб, соослэн дур'ёссы пропорцио ке но, кельшись фигураос уг луо?

4. Кык куиньсэргоос кельшонзы понна соослэн сэрег'ёссылэн ӵошамзы яке соослэн дур'ёсылэн пропорцио луэмзы тырме. Одйг кадь лыдо дур'ёсын кык уносэрголэн кельшонзы понна огез гинэ со условиос тырмоно луо-а?



244 сур.

5. Огшоры басьтэмо тус'ем ABC куиньсэрго лэсьтоно но люкрак си амалэн солы ӵошась лэсьтоно: кельшонэзлэн коэфициэнтэз $k = 1{,}5$.

6. ABC куиньсэргоын дур'ёсыз $AB = 6$ *см*, $BC = 8$ *см* но $AC = 9$ *см*. Солы кельшись куиньсэрголэсь дур'ёссэ лыд'яно $k = 2{,}5$ луон дыр'я.

7. Трапецилэн диагональёсыз йнезлы пропорцио быдэн люкетлы люкисько. Соэ эзме поттоно.

8. *ABC куиньсэргоын A но C сэрег'ёслэн йыл'ёсысьтызы AA_1 но CC_1 медианаос ортчытэмын (244 сур.). C_1A_1 шонер гожлэн сётэм куиньсэрго бордысь солы кельшись куиньсэрго вандэмзэ но AA_1 но CC_1 медианаос 2:1 отношения люкиськемзэ эзме поттоно.*

9. Куинь куиньсэргоос сётэмын, соослэн дур'ёссы: 1) 10; 8 но 12; 2) 7,5; 6 но 7,2; 3) 25; 20 но 24 ӵошало.

Кудйз таос пушкысь куиньсэргоос кельшисесь?

10. $a = 10$ *см* дйнё, ӝуждалазэ $h = 15$ *см* луись куиньсэргоэ пушпалаз квадрат гожтэмын. Со квадратлэн кык йыл'ёсыз куиньсэрголэн дйнь вылаз кыллё, нош мызон'ёсыз кыкез йыл'ёсыз — куиньсэрголэн дур'ёсаз. Квадратлэн дурезлэсь кузьдалазэ шедьтоно.

11. Сэреге, педпал ласянь йӧтыса, кык котыргож'ёс гожтэмын. Сооослэн шорзы сэреглэн йылысэныз 9 *см* но 3 *см* кусыпын интыаськo. Та котыргож'ёслэсь радиуссэс шедьтоно.

12. $ABCD$ уносэрголэн пушказ мызон $A_1B_1C_1D_1$ шонерсэрго интыамын. Солэн дур'ёсыз нырисетй уносэрголэн дур'ёсызлы валлинэсь но соослэсь огкемын интыаськo. Та шонерсэргоос кельшисесь-а?

XVII. КУИНЬСЭРГООСЛЭН ЭЛЕМЕНТ'ЁССЫЛЭН МЕТРИЧЕСКОЙ СООТНОШЕНИЗЫ.

§ 1. Куиньсэрголэн элемент'ёсызлэн герӟаськонлыкез.

1. Котькыӵе куиньсэрголэн сэрег'ёсыз куспын герӟаськонлыкез таӵе ӵошанэн тодйське: $A\angle+B\angle+C\angle=2d$.

2. Куиньсэрголэн дур'ёсыз но сэрег'ёсыз куспын таӵе герӟаськон возиське: куиньсэрголэн котькуд дурез солэн кык дур'ёсызлэн суммаэзлэсь ӧжыт но разностезлэсь трос.

$$a < b + c \text{ но } a > b - c.$$

3. Куиньсэрголэн дур'ёсыз но сэрег'ёсыз куспын таӵе герӟаськон аслыз инты шедьтэ:

а) куиньсэрголэн бадӟым дурезлэн пумитаз бадӟым сэрег кылле но, солы берлане, куиньсэрголэн бадӟым сэрегезлы пумит бадӟым дур ик кылле: $AC > BC$ ке, озьыэн $B\angle > A\angle$; $B\angle > A\angle$ ке, озьыэн, $AC > BC$:

Вылй верам теоремас куиньсэрголэн дур'ёсыз куспын но соосын герӟаськем элемент'ёсыз — ӝуждалаэныз, дур'ёслэн проекциэнызы но медианаэн — определенной *лыдэн герзаськонлык* уг тупато но озьы ик куиньсэрголэн дур'ёсыз но сэрег'ёсыз куспын но со выллем ик луэ.

Улй возьматэм теоремаос сыӵе умойтэмлыкез тупато но куиньсэрголэн гожо элемент'ёсыз куспын лыдо герӟаськонлыксэ пукто; куиньсэрголэн дур'ёсыз но сэрег'ёсыз куспын лыд'я герӟаськон,— математика курслэн ас понназ люкетаз — тригонометриын чаклаське.

§ 2. Шонерсэрег'ем куиньсэрголэн элемент'ёсыз вискын метрической соотношениос.

1. ***Теорема.*** **Куиньсэрголэн шонер сэрегезлэн йылыстыз гипотенуза бордэ ортчытэм ӝуждала соэ сётэм куиньсэрголы кельшись кык кельшисесь куиньсэрголы люке.**

Сётэмын: $\underline{ABC\triangle\text{-ын } ABC\angle = d;\ CD \perp AB}$ (245 сур.).

Зэме поттыны кулэ: $ADC\triangle \backsim BDC\triangle \backsim ABC\triangle$

Зэме поттон. Шонерсэрег'ем куиньсэргоосыз али учком:

1) $ACD \triangle$ но $ABC \triangle$. Соослэн $1 \angle$ — ог'я сэрегзы, озьы бере соос сэреген, огкадь, соин ик соос кельшисесь: $ACD \triangle \backsim ABC \triangle$.

2) $BCD \triangle$ но $ABC \triangle$. Соослэн $4 \angle$ — ог'я сэрегзы, озьы бере соос сэреген огкадь, соин ик соос кельшисесь. $BCD \triangle \backsim ABC \triangle$.

3) $ACD \triangle$ но $CBD \triangle$. Нимыстыз та куиньсэргоос сётэм ABC куиньсэрголы кельшисесь, соин ик соос но огзылы огзы кельшо.

$$ACD \triangle \backsim ABC \triangle \text{ но } CBD \triangle \backsim ABC \triangle.$$

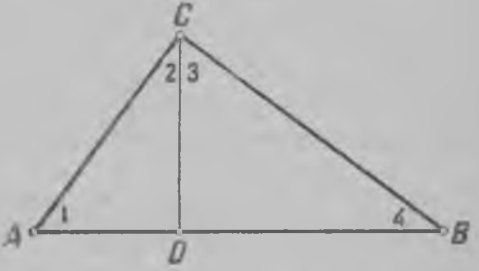
Соин ик, $ACD \triangle \backsim CBD \triangle$.

2. *Теорема.* **Шонер сэреглэн йылысьтыз гипотенуза бордэ ортчытэм ӝуждала, гипотенуза вылэ катет'ёслэн проекцизы куспын шоролык пропорцио луэ.**

Сётэмын: $ABC \triangle$-ын $ABC \angle = d$; $CD \perp AB$ (245 сур.).

Зэме поттыны кулэ: $AD : CD = CD : DB$.

Зэме поттон: $ACD \triangle$ но $CBD \triangle$ кельшемысьтызы соослэн огвыллемесь дур'ёсызлэн пропорциональностьсы потэ, мукет сямен, $\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DB}$, яке $CD^2 = AD \cdot DB$ отысь $CD = \sqrt{AD \cdot CD}$, кудланез басьтӥськытэк, вандэтлэн куздалаэз гинэ басьтӥськемен, таин ӵош выжылэн арифметической значениез гинэ басьтӥське.



245 сур.

3. *Теорема.* **Нимысьтыз катет гипотенузалэн но солэн гипотенуза вылэ проекциэз куспын шорлык пропорцио луэ.**

Зэме поттон. ACD но ABC куиньсэргоослэн кельшемысьтызы (245 сур.) $AB : AC = AC : AD$ потэ, яке $AC^2 = AB \cdot AD$, отысь $AC = \sqrt{AB \cdot AD}$.

2) CBD но ABC куиньсэргоослэн кельшемыстызы $AB : CB = CB : DB$, яке $CB^2 = AB \cdot DB$, отысь $CB = \sqrt{AB \cdot DB}$.

Следстви. **Катет'ёслэн квадрат'ёссы соослэн гипотенуза вылэ проекцизы кадь кусып'ясько.**

Зэмен ик: $AC^2 = AB \cdot AD$ но $CB^2 = AB \cdot DB$.

Одӥг ӵошанэз мукетэзлы, быдэн-быдэн членэз люкыса, таӵе луэ:

$$\frac{AC^2}{CB^2} = \frac{AB \cdot AD}{AB \cdot DB} = \frac{AD}{DB}.$$

4. *Теорема.* (*Пифагорлэн*). **Гипотенузалэн квадратэз катет'ёслэн квадратсылэн суммазылы ӵоша.**

Сётэмын: $ABC \triangle$-ын $C \angle = d$

Зэме поттыны кулэ: $AC^2 + CB^2 = AB^2$.

Зэме поттон (куинетӥэз). 1) $AC^2 = AB \cdot AD$ но
2) $CB^2 = AB \cdot DB$.

Та ӵошан’ёсыз оген-оген член’ёс’я огазеаса, таӵе луэ:
$AC^2 + CB^2 = AB \cdot AD + AB \cdot DB = AB\ (AD + DB)$, нош $AD + DB = AB$, соин ик нош $AC^2 + CB^2 = AB \cdot AB = AB^2$.

Шонерсэрег’ем куиньсэрголэсь дур’ёсызлэсь кузьдалазэс тупаса a, b но c пыртӥ пусйид ке, соку дыр’я ӝиктыса та теоремаэз тазьы гожто: $a^2 + b^2 = c^2$ но быдэсак тазьы лыдӟо:

Катет‘ёслэсь кузьдалазэс возьматӥсь лыд’ёслэн квадратсылэн суммазы, гипотенузалэсь кузьдалазэ возьматӥсь лыдлэн квадратэзлы ӵоша.

Следстви. **Катетлэн квадратэз гипотенузалэн квадратысьтыз мукет катетлэн квадратэзлэн разностезлы ӵоша.**
$a^2 + b^2 = c^2$, отысь $a^2 = c^2 - b^2$, яке $a = \sqrt{c^2 - b^2}$ но $b^2 = c^2 - a^2$ яке $b^2 = \sqrt{c^2 - a^2}$.

5 ***Теорема (пумит).*** **Куиньсэрголэн a, b но c дур‘ёсыз куспын $a^2 + b^2 = c^2$ герӟаськон луэ ке, соку дыр’я куиньсэрго шонерсэрег’ем.**

Сётэмын: a, b но c куиньсэрголэн дур‘ёсыз но $a^2 + b^2 = c^2$.
Куиньсэрголэсь шонерсэрег‘ем луэмзэ зэме поттыны кулэ.

Зэме поттон. Шонерсэрег’ем куиньсэрго лэсьтом, солэн катет’ёсыз a но b но, солэсь гипотенузазэ m пыртӥ пус’ём. Соку Пифагорлэн теоремаэз’я $a^2 + b^2 = m^2$, ӵошанэз сётэм $a^2 + b^2 = c^2$ ӵошанэн ӵошатыса, $c^2 = m^2$ яке $c = m$ шуса йылпум’яськом. Озьыэн сётэм куиньсэрго но шонерсэрег’ем куиньсэрго куинь дур’ёсынызы ӵошало, соин ик сётэм куиньсэрго но шонерсэрег’ем.

6. Эскерем теорема (но солы пумит) геометрилэн одӥг туж кулэаськись теоремаэз луэ; со грек философ Пифагорен зэме поттэмын муса гожтӥське, соин сэрен ик „Пифагорлэн теоремаэз“ шуса нимаське. Сётэм теоремаэн тодытӥськись шонерсэрег‘ем куиньсэрголэн дур’ёсыз куспын лыдо герӟаськонлыкез Пифагорлэн дышетӥсьёсызлы — египтян’ёслы—тодмо вылэм шуса, асьмелы тодмо. 3, 4 но 5 дуро шонерсэрег’ем куиньсэрго египетской куиньсэрго шуса нимаське. Вашкала муз‘ем мертасьёс шонер сэрег лэсьтылон понна таӵе амал кутозы вылэм: соос кыӵес’ёс пыр гозыэз 12 огкадь люкетлы люкыса, со гозылэсь пум’ёссэ думем беразы, соэ муз’ем вылэ жугем чог’ёс вылэ куиньсэрго тус’ем 3, 4 но 5 люкет’ёсын золтозы вылэм. Соку нош собере 3 но 4 люкет возись дур’ёсыз куспын шонер сэрег потылӥз.

Шонерсэрег’ем куиньсэргоос, сооослэн дур’ёссы быдэс лыд’ёсын мертаськe ке, Пифагорлэн куиньсэргоосыз шуиськo, нош со лыд’ёсыз — Пифагорлэн лыд’ёсыныз. Озьы тӥни, 3, 4 но 5, 5, 12 но 13; 6, 8 но 10; 7, 24 но 25; 8, 15 но 17; 9, 12 но 15; 10, 24 но 26 азьланьын но озьы ик,— пифагор лыд’ёс.

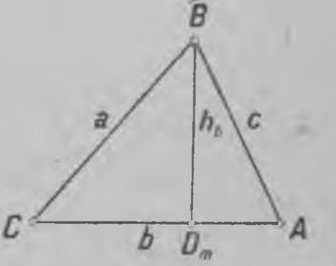
§ 3. Кырыжсэрег‘ем куиньсэрголэн элемент‘ёсыз куспын метрической герӟаськонэз.

1. *Теорема.* **Йылсо сэреглы пумит кыллись дурлэн квадратэз, кык мукет дур‘ёсызлэи суммазылэн квадратэзлэсь но соос пõлысь одӥг дурезлэн но мукет дурзылэн со вылэ проекциэзлэн кыкполэстэм произведенизылэсь ичн.**

Сётэмын: $ABC \triangle$-ын $A \angle$ — йылсо; m — c-лэн b вылэ проекциэз (246 сур.).

Зэме поттыны кулэ: $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bm$.

Зэме поттон. B йылысь $BD = h$ жуждала ортчытом; кык ABD но BDC шонерсэрег’ем куиньсэрго поттӥськом: отын $AD = m$, но соин AB дурлэн AC дур вылэ проекциэз луэ.



246 сур.

$ADB \triangle$-ысь:

$$a^2 = h^2 + (b - m)^2 \text{ луэ.} \qquad (1)$$

$ABD \triangle$-ысь

$$h^2 = c^2 - m^2 \text{ луэ} \qquad (2).$$

Нырисетӥэз (1) но кыкетӥэз (2) чошан’ёсыз огазеаса, кулэ воштон’ёс лэсьтыса, радысьтыз тазьы потэ:

$$a^2 + h^2 = h^2 + (b - m)^2 + c^2 - m^2;\ a^2 = (b - m)^2 + c^2 - m^2;$$
$$a^2 = b^2 - 2\,bm + m^2 + c^2 - m^2 \text{ яке } a^2 = b^2 + c^3 - 2\ bm.$$

2. *Теорема.* **Куиньсэрголэн мырк сэрегезлэн пумнтаз кыллись дурлэн квадратэз, кык мукет дур‘ёслэсь квадрат‘ёссэс огазеамлэсь но соос пõлысь одӥг дурезлэн мукет дурезлэн со вылэ кузёмытэм проекциэзлэн кыкполэстэм произведениэзлэсь бадӟым.**

Сётэмын: $ABC \triangle$-ын $A \angle$ — мырк (247 сур.).

Зэме поттыны кулэ: $a^2 = b^2 + c^2 + 2bm$.

Зэме поттон. B йылысен AC дӥньлэн кузёмытэм вылаз $BD = h$ жуждала ортчытом. Соку кык шонерсэрег’ем BCD но ADB куиньсэргоос поттӥськом: $AD = m$ AC дурлэн кузёмытэм вылаз AB дурлэн проекциэз луэ; $CD = b + m$.

$$BDC \triangle\text{-ысь: } a^2 = h^2 + (b + m)^2 \text{ луэ} \qquad (1)$$
$$ADB \triangle\text{-ысь: } h^2 = c^2 - m^2 \text{ луэ} \qquad (2)$$

Нырисетӥэз (1) но кыкетӥэз (2) чошан’ёсыз огазеаса кулэ воштон’ёс лэсьтом: соку радысьтыз тазьы потоз.

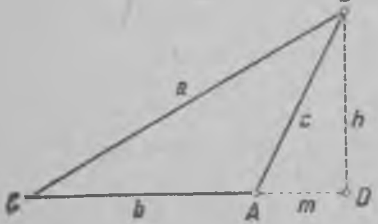
$$a^2 + h^2 = h^2 + (b + m)^2 + c^2 - m^2;$$
$$a^2 = (b + m)^2 + c^2 - m^2;$$
$$a^2 = b^2 + 2bm + m^2 + c^2 - m^2$$

яке

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2\,bm.$$

3. Йылсо сэреглы пумит кыллись дурлэн квадратэзлэсь формулаэ мырк сэреглы пумит кыллись дурлэн квадратэзлэн формулаэныз артэ пуктыса, соос огзылэсь огзы бӧрысь членэнызы гинэ пӧртэм’ясько. Кыксэ ик формулаосыз одӥге огазеаны луоз.
$a^2 = b^2 + c^2 + 2bm$

Татын mc дурлэн b дур вылэ проекциэз луэ, яке солэн кузёмытэмез; ку ке шедьтоно дурмы йылсо сэреглы пумит кылле, соку минус пус басьтӥське, нош ку ке мырк сэрег шорын со кылле, соку плюс пус басьтоно луэ.



247 сур.

4. ABC йылсосэрег’ем куиньсэргоын (246 сур.) B точка котыртӥ BA дурез час стрелка ветлэмез’я берыктӥське, соку $A\angle$ будоз, $AB = c$ дурлэн $AC = b$ дур вылэ m проекциэз кулэсмоз; ку ке $A\angle$ шонер сэрег луиз ке, соку проекци берыктӥськоз. Та дыр’я Пифагорлэн теоремаэз потоз.

Зэмзэ ик, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bm$; $m = 0$ луон дыр’я $a^2 = b^2 + c^2$.

ABC мырксэрег’ем куиньсэргоын (247 сур.) A точка котыртӥ BA дурез час стрелкалэн ветлэмезлы пумит берыктӥм ке, соку $A\angle$ но $AB = c$ дурлэн m проекциэз но синоз; бератаз ку ке $A\angle$ шонер сэреге берытскиз ке, m проекци 0-лы ӵошалоз, соку асьмеос $a^2 = b^2 + c^2$ Пифагорлэсь теоремаэз поттом, озьы дыр’я Пифагорлэн теоремаэз кык бӧрысь теоремаослэн ас понназ луись маке учырзы луэ.

5. Пифагорлэн теоремаэз но кык бӧрысь теоремаос, куиньсэрголэн сётэм дур’ёсыз’я солэн сэрег’ёсыз’я солэсь туссэ шедьтыны амал сётэ. ABC куиньсэргоын:

1) $a^2 < b^2 + c^2$ ке, соку куиньсэрго йылсосэрег’ем:
2) $a^2 = b^2 + c^2$ ке, соку куиньсэрго шонерсэрег’ем:
3) $a^2 > b^2 + c^2$ ке соку куиньсэрго мырксэрег’ем.

Котькуд ас понназы учыре бадӟым дурлэн квадратэзлэн но кык мукет дур’ёсызлэн квадратэныз артэ гинэ пуктоно луэ.

6. Задача. *Дур’ёсыз 13 см, 9 см но 4 см-лы ӵошась куиньсэрголэсь туссэ тодоно.*

Лыд’янэз. $13^2 > 9^2 + 4^2$, озьы бере куиньсэрго мырк шуса эсэплан лыктэ.

Куиньсэрго лэсьтыны кулэ нош задача условия куиньсэрго лэсьтыны уг луы. Задача услови, бадӟым дурез, кык мукет дур’ёслэн огазеамзылэсь ичи луэмез кулэ каре: сётэм задачаын $13 = 9 + 4$, мукет сямен, бадӟым дурез кык мукет дур’ёсыз огазеамезлы ӵоша, со нош уг луы.

Сёгэм задачаэз эскерем — азьвыл куиньсэрголэн дур’ёсыз’я туссэ эскеремлэсь азьло ик куиньсэргоэз сётэм задачая лэсьтыны луонэзлы солы оскиськыны кулэз возьматэ.

Озьыэн, $13^2 > 9^2 + 4^2$ услови — мырксэрег’ем куиньсэрго луон понна услови луэ, нош со гинэ тырмыт уг улы: кыкез ик сётэмез огазьын басьтыса, куиньсэрго мырксэрег’ем шуэммы тырме.

§ 4. Параллелограмлэн дур'ёсыныз диагональёсын герӟаськон.

1\. ***Теорема.*** **Параллелограмлэн диагональёсызлэн квадрат'ёсызлэн суммаэз солэн дур'ёсызлэн квадратэзлэн суммаэзлы ӵоша.**

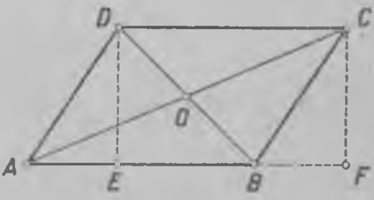
Сётэмын: $ABCD$ — параллелограм: $AB \| CD$ но $AD \| BC$ (248 сур.).

Зэме поттыны кулэ: $AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2$.

Зэме поттон. $ABCD$ параллелограмлэн B но C йыл'ёсысьтыз DE но CF жуждала ортчытом: соку DAE но CBF кык шонерсэрег'ем куиньсэргоос поттӥськом: та куиньсэргоослэн

$DA = CB$ но $A\angle = CBF\angle$

ӵошаменызы, $AE = BF$.



248 сур.

$ABC\,\triangle$-ысь шедьтӥськом:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2AB \cdot BF. \quad (1)$$

$ABD\,\triangle$-ысь шедьтӥськом:

$$BD^2 = DA^2 + AB^2 - 2AB \cdot AE. \quad (2)$$

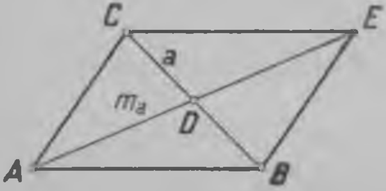
Бӧрысь ӵошанысь DA^2-эз BC^2-эн воштыса но AE-эз BF-эн воштыса, собере соосыз нимаз-нимаз карыса, кыксэ ик ӵошан'ёсыз огазе карыса поттом:

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2.$$

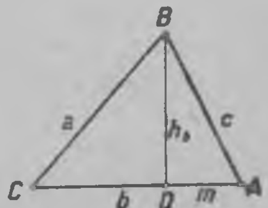
§ 5. Куиньсэрголэсь жуждалазэ но медианазэ лыд'ян.

1\. **Задача.** *Куиньсэрголэн куинь a, b но c дур'ёсыз'я m_a медианаэз лыд'яч* (249 сур.).

Лыд'янэз. ABC куиньсэргоысь $AD = m_a$ медиана ортчытӥськом; со медианалэн нуйтэм вылаз $DE = AD$-лы гож нуиськом но, E точкаэз B но C точкаэн огазеаса, $ABEC$ параллелограм поттӥськом. Талэн b но c дур'ёсыз, диагональ $BC = a$ но $AE = 2m_a$ луэ.



249 сур.



250 сур.

Параллелограмлэн диагональёсыз но дур'ёсыз куспын герӟаськон пыр таӵе поттӥськом:

$$(2m_a)^2 + a^2 = b^2 + b^2 + c^2 + c^2,$$

яке $4m_a^2 + a^2 + 2b^2 + 2c^2$, яке $4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$, татысь

$$m_a{}^2 = \frac{2^2b + 2c^2 - a^2}{4}, \text{ яке } m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

Огтус’ем’ёсысь:

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2c^2 + 2a^2 - b^2} \text{ но } m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}.$$

Задача. *Куиньсэрголэн a, b но c дур’ёсызя h_b жуждалазэ шедьтоно* (250 сур.).

Лыд’янэз. Куиньсэрголэн B йылысьтыз $BD = h_b$ ӝуждала ортӵытом но AD кусыпез m букваэн пус’ём.

ABD △-ысь шедьтом:

$$h_b{}^2 = c^2 - m^2 \tag{1}$$

m-эз, a, b но c возьматӥсь дуро возись куиньсэрголэн дур’ёсыныз воштоно. Соку ABC △-ысь поттӥськом:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bm,$$

отысь шедьтӥськом:

$$m = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b} \tag{2}$$

m-лы шедьтэм кулээз (2), нырись (1) ӵошанэ пыртыса, шедьтом:

$$h_b{}^2 = c^2 - \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{(2b)^2}, \text{ яке } h_b{}^2 = \frac{(2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{(2b^2)^2} \tag{3}$$

Дробьлэсь числительзэ уноасьёслы жильдыса, поттӥськом:

$$h_b{}^2 = \frac{(2bc^2 + b^2 + c^2 - a^2) \cdot (2bc - (b^2 - c^2 + a^2)}{(2b)^2},$$

яке

$$h_b{}^2 = \frac{[(b + c)^2 - a^2] \cdot [a^2 - b - c)^2]}{(2b)^2}$$

Собере, нимысьтыз квадратной скобкаысь возьматӥсьёсыз уноасьёслы жильдыса шедьтом:

$$h_b{}^2 = \frac{(b + c + a) \cdot (b + c - a) \cdot (a + b - c) \cdot (a + c - b)}{(2b)^2}. \tag{4}$$

Куиньсэрголэсь периметрсэ $2p$ пус’ём, мукет сямен $a + b + c = 2p$ соку луэ:

$$\left.\begin{aligned} b + c = 2p - a, \quad b + c - a = 2p - a - a = 2(p - a); \\ a + b = 2p - c, \quad a + b - c = 2p - c - c = 2(p - c); \\ a + c = 2p - b, \quad a + c - b = 2p - b - b = 2(p - b). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Ньылетӥ ӵошанысь уноасьёсыз витетӥ ‘(5) ӵошанын потэм возьматӥсьёсын воштыса поттӥськом:

$$h_b{}^2 = \frac{2p \cdot 2(p - a) \cdot 2(a - b) \cdot 2(p - c)}{4b^2},$$

отысь:

$$h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}. \tag{6}$$

Огтус'емзы луэмен h_c но h_a понна поттиськом:

$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}; \quad h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Уноасьёс пӧлысь огез $p - a$, $p - b$, $p - c$ азинэстэм ӧвӧл шуса зэме поттон кыле на, яке пумит ке учконо h зэмостэм лыд луысал.

Котькыӵе куиньсэрголэн дурез, мукет кык дурлэн огазеамезлэсь ичи луоз, соин ик $a < b + c$. Ӵошасьтэмлэн кык люкет'ёсаз котыр a йылтыса: $2a < a + b + c$ шедьтиськом, якё $2a < 2p$, отысь $a < p$, соин ик $p - a$ азинэс лыд: озьы бере $p - b$ но $p - c$ азинэс лыд'ёс луо. Озьы выжы улын гожтэм лыд'ёс азинэсэсь луо.

§ 6. Куиньсэрголэсь куинь дур'ёсыз'я площадьзэ шедьтон. Геронлэн формулаэз.

Задача. *ABC $\triangle$-лэсь a, b но c дур'ёсыз'я площадьзэ шедьтоно.*

Лыд'янэз. $S\triangle = \frac{1}{2}a \cdot h_a$, нош $h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b(p-c)}$, татын куиньсэрголэн p жыны периметрез луэ, соин ик:

$$S\triangle = \frac{1}{2}a \cdot \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

нош вакчиатэм бере:

$$\boxed{S\triangle = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$ кв. единица луэ.

Та формула **Геронлэн** формулаэз шуиське. **Александриысь** греческой **Герон** математиклэн нименыз верамын.

Юан'ёс но уж'ёс

1. а) Гипотенузаэзлэсь гинэ тодыса, б) шонер сэреглэн йылысеныз ортчытэм жуждалаэныз люкылйськись гипотенузалэсь вандэт'ёссэ гинэ шонер сэрег'ем куиньсэрго лэсьтыны луоз-а?

2. 4 *см*, 5 *см*, 6 *см* но 10 *см*, 6 *см*, 4 *см* дур'ёсын куиньсэрго солэн сэрег'ёсызлэн тус'ёсыз'я кыӵе луоз?

3. Шонерсэрег'ем куиньсергоын h_c жуждалаэз 8 *см* ӵоша но гипотенуза вылэ одйгезлэн катетэзлэн проекциэз 6 *см* ӵоша. Куиньсэрголэсь дур'ёссэ тодоно.

4. 3,2 *кг* но 2,4 *кг* кык кужым'ёс одйг точка бордэ понэмын но шонер сэрег улсын, одйгез мукетэз доре леземын. Соослэсь огкадь вуттиськись кужымзылэсь бадӟымлыксэ шедьтоно.

5. Куиньсэрголэн дур'ёсыз 8 *см*, 10 *см* но 11 *см* ӵошало. Медианаоссэ но жуждалаэз лыд'яно.

XVIII. КОТРЕТЫН ПРОПОРЦИО ВАНДЭТ'ЁС.

§ 1. Котыргожлэн точкаысеныз диаметр вылэ ортчытэм перпендикулярлэн аслыкез.

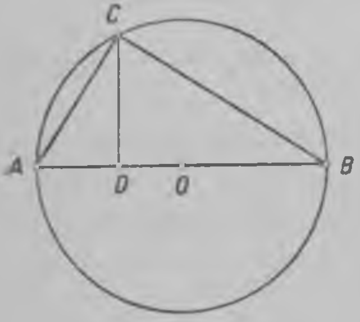
1. *Теорема.* **Котыргожлэн кыӵе ке точкаысеныз диаметр вылэ ортчытэм перпендикуляр, диаметрлэн вандэт'ёсыз вискысь шор пропорци луэ, нош котькудйз кык хордаос пӧлысь но**

точкаэз диаметрлэн пум'ёсыныз огазеасьёсыз, диаметр но диаметр вылэ хорда проекци вискысь шор пропорцио луэ.

Сётэмын: AB диаметр; $OD \perp AB$; AC но CB хордаос (251 сур.).

Зэме поттыны кулэ: 1) $\frac{AD}{CD}=\frac{CD}{DB}$; 2) $\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{AD}$; 3) $\frac{AB}{CB}=\frac{CB}{DB}$

Зэме поттон. $C\angle$ диаметр вылэ пыкиськеменыз ABC куиньсэрго шонерсэрег'ем; CD солэн ӝуждалаэз луэ, AD но DB — хорда проекциос (катет'ёслэн) диаметр вылэ (гипотенуза), соин ик:



251 сур.

$$1)\ \frac{AD}{CD}=\frac{CD}{DB},\ 2)\ \frac{AB}{AC}=\frac{AC}{AD};$$

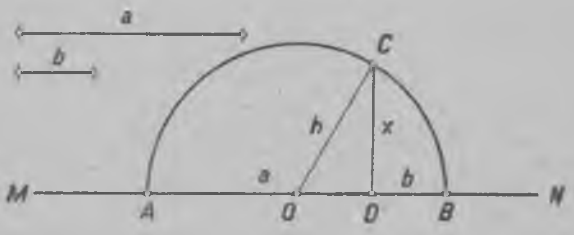
$$3)\ \frac{AB}{CB}=\frac{CB}{BD}$$

2. **1-тӥ задача.** Кык сётэм a но b вандэт'ёс вискы шор пропорцио x вандэт лэсьтоно (252 сур.).

Лэсьтонэз. MN шонер гож вылэ кыӵе ке A точкаысен бӧрсе-бӧрсе радэн $AD=a$, $DB=b$ вандэт тыриськом, AB-эз диаметр интыэ басьтыса, ӝыны котыргоже ортчытӥськом но AB диаметр шорысь D точкаысен котыргожысь C точкаын вожвылскытозяз перпендикуляр ортчытӥськом, соку $CD=x$ со утчано вандэт луэ.

Зэмзэ ик, $a:x=x:b$ яке $x^2=ab$ но $x=\sqrt{ab}$.

2-тӥ задача. *Кык огкадь луымтэ a но b лыд'ёслэн шор арифметическойзы со лыд'ёслэн ик шор геометрическойзылэсь бадзым шуса зэме поттоно.*



252 сур.

Лыд'янэз. Кык огкадесь луымтэ вандэт'ёс, a но b лыд'ёслы мед тупалозы (252 сур.). a но b лыд'ёслэсь шоретӥ геометрическойзэс лэсьтом. $CD=\sqrt{ab}$.

a но b лыд'ёслэн шоретӥ арифметическойзы, мукет сямен — $\frac{a+b}{2}$ суред вылысь адӟиськем'я ӵошало: $\frac{AD+DB}{2}=AC=r$. Озьы бере, $\frac{a+b}{2}=r$. Нош CO озьы ик ӵоша r-лы: COD шонерсэрег’ем куиньсэргоысь $CO > CD$, $CO = \frac{a+b}{2}$ луэ но $CD = \sqrt{ab}$, нош соин ик $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$, мукет сямен:

Кык огкадь луымтэ (по̆ртэм) лыд‘ёслэн шор арифметическойзы со лыд‘ёслэн ик шор геометрическойзылэсь бадз̆ым.

$b = a$ ке, соку $CD = CO$, малы ке шуид соку $\frac{a+a}{2} = \sqrt{aa}$ яке $a = a$.

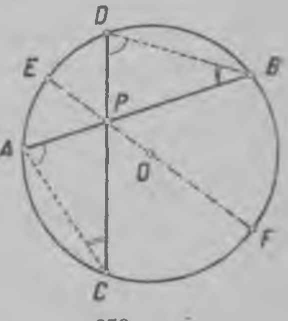
§ 2. Вожвылскись хорда вандэт‘ёслэн аслык‘ёссы.

Теорема. **Сётэм котыргожлэн одйг точкааз, кык яке ко̆ня ке вожвылскись хордаос сётэмын ке, соку котькудйзлэн хордалэн вандэт’ёсызлэн произведенизы, со точкатй ик ортчись сётэм котыргожлэн диаметрезлэн вандэт’ёсызлэн произведенизылы ч̆ошась вош’яськисьтэм бадз̆ымлык луэ (постоянная величина).**

Сётэмын: AB но CD хордаос: EF — диаметр; P — соослэн вожвылскись точказы (253 сур.)

Зэме поттыны кулэ: $PA \cdot PB = PC \cdot PD = PE \cdot PF$.

Зэме поттон. Юрттйсь AC но BD хордаос ортчытом, кык APC но BPD куиньсэргоос шедьтом; соос огкадь сэрег’емесь: $A\angle = D\angle$ но $C\angle = B\angle$ — огкадесь ик букоэн мертам пушказ гожтэм сэрег’ёс кадь, озьы бере куиньсэргоос огзылы-огзы кельшисесь но сооcлэн кельшемысьтызы потэ:



253 сур.

$$PA:PC = PD:PB,$$

яке

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD.$$

AB хордаэз но EF диаметрез кык ваче вожвылскись хордаосыз сямен учкыса зэме поттэм вылысен адз̆иськом:

$$PA \cdot PB = PE \cdot PF.$$

Со ик котькыч̆е P точка пыр ортчись хордалы но тупа, соин ик сётэм котыргожысь одйг точкаын ик вожвылскись котькуд хордаослэн вандэт’ёссылэн произведениоссы вош’яськымтэ быдз̆ала луэ; со сётэм котыргожлэн диаметрезлэн та точкатй ик ортчись вандэт’ёсызлэн произведенизылы ч̆оша.

§ 3. Котретлэн педпалаз вожвылскись вамен вандйсьёслэн аслыксы.

1. Педпал A точкаысен AB вамен вандйсь ортчытэмын (254 с.). Вамен вандйсьлэн котыргож пушкын кыллись люкетэз BC — хорда: солэн котыргож сьо̆рын сётэм A точка дорозь CA азьлань-

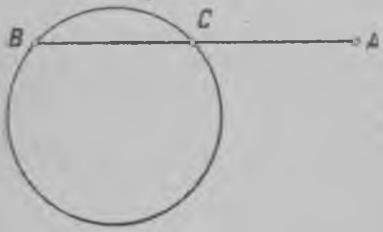
тыса ортчытэмез вамен вандӥсьлэн педпал люкетэз шуыса нимаське. Кыкезлэн ик вандэт'ёслэн суммазы $BC+CA=AB$ вамен вандӥсьлэн кузьдалаэз интыэ басьтӥське.

2. *Теорема.* **Котретлэн педпаласеныз одӥг точкаысен ик вамен вандӥсь но йӧтись ортчытэмын ке, соку котькуд вамен вандӥсьлэн солэн педпал люкетэзлы произведениэз вош‘яськымтэ быдӟала луэ но йӧтскисьлэн квадратэзлы ӵоша.**

Сётэмын: PA но PC — вамен вандӥсьёс; PK — йӧтӥсь: P — соослэн вожвылскон точказы (255 сур.).

Зэме поттыны кулэ: $PA\cdot PB=PC\cdot PD=PK^2$.

Зэме поттон: PA но PC — вамен вандӥсьёс, PB но PD — сооcлэн педпал люкет'ёссы. Юрттӥсь AD но BC хордаос ортчытом но кык ADP но BCP куиньсэргоос шедьтом. Та куиньсэргооослэн быдэс кык тупаса ӵошасен сэрег'ёссы вань $A\angle$ но $C\angle$ пушпала гожтэмын, одӥг со BD буколэн ӝыныэныз мертасько но $P\angle$ — ог'я сэрег, озьы бере соос огкадь сэрег'емесь, нош соин ик кельшисесь.

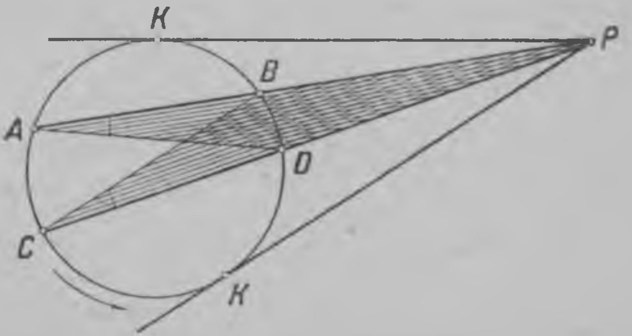


254 сур.

Сооcлэн кельшемысьтызы:

$$\frac{PA}{PD}=\frac{PC}{PB}, \text{ яке } PA\cdot PB=PC\cdot PD \text{ луэ.}$$

PC вамен вандӥсез P точка вӧзтӥ гож'я мед интыаськоз шуса берык'яд ке, соку вамен вандӥсен котыргожен вожвылскись C но D точкаос матэктӥськозы, PC вамен вандӥсь пичиалоз, нош солэн педпал люкетэз PD бадӟымалоз; йӧтон K точкаын вамен вандӥсь но солэн люкетэз но PK йӧтӥсьлы ӵошалозы, соин ик $PA\cdot PB=PC\cdot PD$ ӵошаны котькудзэ PC но PD вандэт'ёсыз PK вандэтэн вoштыса шедьтом: $PA\cdot PB=PK\cdot PK$ яке $PA\cdot PB=PK^2$.



255 сур.

Озьы:
$$PA\cdot PB=PC\cdot PD=PK^2$$

Тини, со ик P точкаысен ортчытэм котькуд вамен вандӥсьёслы тупа, соин ик вамен вандӥсьёслэн сётэм котретлэн педпалысеныз одӥг со точкаысен ик ортчытэм вамен вандӥсьёслэн педпал люкетсылы произведениез вош'яськымтэ быдӟала луэ но, со точкаысен ик ортчытэм йӧтскисьлэн квадратэзлы ӵоша.

3. ***Следстви.*** **Одӥг точкаысь ик котретлэн педпалысеныз йӧтскись но вамен вандӥсь ортчытэмын ке, соку йӧтскись вань вамен вандӥсь куспысь но солэн педпал люкетэз куспысь шор пропорцио луэ.**

Зэмзэ ик, $PA \cdot PB = PK^2$, озьы бере, $PA : PK = PK : PB$.

§ 4. Вандэтэз дурлось но шорлось отношениэн люкон.

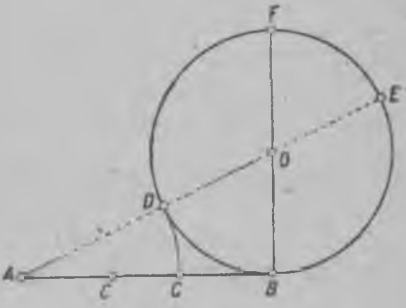
1. *Вандэтэз дурлось но шорлось отношениэн люкон — вандэтлэсь кык люкетлы лыкиськон точкаэз шедьтон луэ, озьы бадзым люкетэз вань вандэт'ёс куспын но солэн пичи люкетэз куспын шорети пропорцио луэ.*

2 задача. *Сётэм вандэтэз дурлось но шорлось отношениэн люконо.*

Лыд'янэз. $AB = a$ — сётэм вандэт. C точка утчано точка мед луоз (256 сур.). Бадӟым люкетсэ AC-эз x пыр пус'ём, соку пичи люкетэз $CB = a - x$. Задачалэн условиэз'я $\frac{a}{x} = \frac{x}{a - x}$ луэ, яке $x^2 = a^2 (a - x)$ яке $x^2 = a^2 - ax$.

Та ӵошанэз тазьы вились гож'ялом: $a^2 = x^2 + ax$, татысен $a^2 = x (a + x)$.

$AB = a$-эз кыӵе ке котыргож бордэ йӧтӥсен кутом, $a + x$-эз вамен ӵогись интыэ но x-эз солэн педпал люкетэз интыэ кутом; со сяна вамен ӵогись шор пыртӥз ортче шуса кутом, соку a котыргожлэн диаметрез луоз.



256 сур.

Лэсьтонэз. $AB = a$-эз йӧтӥсь гож интыэ кутыса но B точкаэз йӧтон точка интыэ кутыса, B точкаын AB доре перпендикуляр ортчытӥськом но со вылэ котыргожлэн диаметрезлы a-лы ӵошась BF вандэт понӥськом. BF-эз шори люкыса O шорзэ шедьтӥськом но OB-лы ӵошась радиусэн котыргож ортчытӥськом, собере O шор пыртӥз AE вамен вандӥсь ортчытӥськом; соку вамен вандӥсьлэн педпал люкетэз AD x-лы ӵоша. AB вылэ $AC = AD$ интыаса AB вандэт вылэ утчано C точкамес шедьтом, нош со соэ дурлось но шорлось отношениэн люке.

Зэмзэ ик, $AE \cdot AD = AB^2$. Нош $AE = a + x$, $AD = x$ но $AB = a$, нош соин ик $(a + x) x = a^2$ яке $ax + x^2 = a^2$, отысен $x^2 = a^2 - ax = a(a - x)$, мукет сямен $a : x = x : (a - x)$.

AB вандэтэ солэн мукет A пумаз йӧтӥсь бордтӥз котыргож лэсьтӥд ке, соку AB вандэт вылын нош ик одӥг C_1 точка луоз, со сётэм AB вандэтэз дурлось но шорлось отношениэн люкоз.

Озьы AB вандэт вылын соэ дурлось но шорлось отношениэн люкылӥсь кык точкаос вань. Со C но C_1 точкаос AB вандэтлэн шорез'я симметрио интыамын. Вылӥ шедьтэм $a^2=x^2+ax$ ӵошанэз вились тазьы гожтыны луоз: $x^2+ax-a^2=0$; та ӵошанэз x сярись лыд'яса шедьтӥськом $x_{1;2}=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2}$. Асьмеос x-лэн вандэтлэсь куд пала кошкемзэ учкытэк кузьдалазэ учкем бере, азинэстэм выжыэз куштыса, асьмелэн луэ:

$$x=-\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2},\quad \text{яке}\quad x=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2}-\frac{a}{2};$$

озьыэн, катет'ёсыз $\frac{a}{2}$ но a (ABO куиньсэрго) луись шонерсэрег'ем куиньсэрголэн гипотенузаэз вискысь но a (OD вандэт) сётэм вандэтлэн ӝыныэз вискысь, x вандэт разностез луэ, мукет сямен $x=AO-OD=AD=AC$ (256 сур.).

x понна шедьтэм лыдпус'етэз мукет пус'ем карыса шедьтӥськом:

$$x=\frac{a}{2}\sqrt{5}-\frac{a}{2}=a\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

яке $x\approx 0{,}62a$. Озьыэн, $AC:CB\approx 5:3$.

Юан'ёс но уж'ёс.

1. Котыргожлэн диаметрез P точкаэн 4 *см* но 6 *см* ӵошась люкет'ёслы люкиське. Со люкет'ёслэн одӥгез 3 *см*-лы ӵошась хордаэз со точка пыртӥ малы ортчытыны уг луы?

2. Кык вожвылскись хордаослэн вандэт'ёсыз 6 *см* но 25 *см* ӵошало, мукетэзлэн вандэт'ёсызлэн кусыпсы 1:2 ӵошало. Кыкетӥ хордалэсь кузьдалазэ шедьтоно.

3. Хорда 5 *см* ӵоша. Азьлаӵе ортчытэм вандэт пумысен ортчытэм йӧтӥсь гож 6 *см* мед ӵошалоз шуса, соэ куд мында кузёмытыны кулэ на?

4. Котретын R радиусаз хорда ортчытэмын, со радиус перпендикулярной но солэн шор вадьсытӥз нуэмын. Хордалэсь кузьдалазэ шедьтоно но хордаэн золтэм буко котыргожлэсь кыӵе люкетсэ кылдытэмзэ тодоно?

XIX. ПУШПАЛТӤЗ НО КОРТЫРТӤЗ ГОЖТЭМ УНОСЭРГООС.

§ 1. Пушпалтӥз но котыртӥз гожтэм куиньсэргоос.

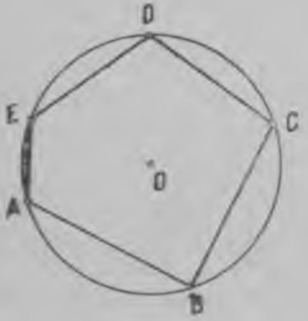
1. *Уносэрголэн сэрегезлэн вань йыл'ёсыз котыргож вылын кыллё ке, пушпалтиз гожтэм уносэрго шуса нимаське* нош ачиз котыргож — *котыртиз гожтэм* шуиське. $ABCDE$ пушпалтӥз гожтэм витьсэрго (257 сур.). Солэн дур'ёсыз — AB, BC, CD... сётэм котыргожлэн хордаосыз луэ.

Уносэрголэн вань дур'ёсыз котыргоже йӧто ке, котыртиз гожтэм уносэрго шуса нимаське, нош ачиз котыргож *пушпалтиз гожтэм* луэ. $ABCDE$ витьсэрго котыртӥз гожтэм луэ (258 сур.). Солэн дур'ёсыз—AB, BC, CD... котыргожлы йӧтӥсь луэ.

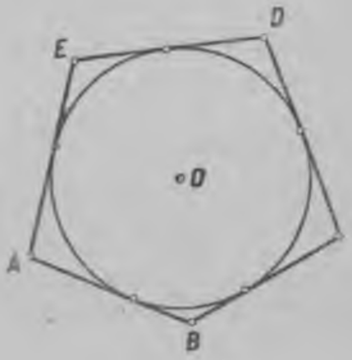
2. *Теорема.* **Котькыӵе куиньсэрголэн куинь йыл пыртӥз одӥг гинэ котыргож ортчытыны луоз.**

ABC куиньсэрголэн йыл'ёсыз *A*, *B* но *C* точкаос; одӥг шонер вылын кылльымтэ дыр'я соос пыр одӥг котыргож гинэ ортчытыны луоз.

Котыртиз гожтэм котыргожлэн шорез куиньсэрголэн котькуд кык дурез сооcлэн шорвадьсытизы ортчытэм перпендикуляр'ёслэн вожвылскон интыазы луэ. Куинетӥ дураз солэн шор вадьсытӥз ортчытэм перпендикуляр озьы ик котыртӥз гожтэм котыргожлэн шортӥз ортче.



257 сур.

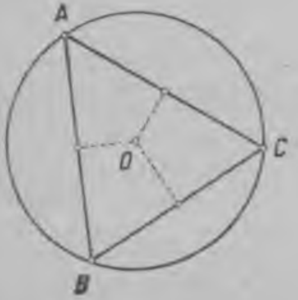


258 сур.

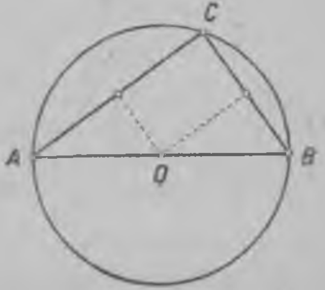
***Следстви.* Куиньсэрголэн дур'ёсаз сооcлэн шорвадьсытӥз ортчытэм перпендикуляр'ёс одӥг точкаын котыртӥз гожтэм котыргожлэн шораз вожвылско.**

Котыртӥз гожтэм котыргожлэн шорез кылле:

1) Куиньсэрго йылсосэрег'ем ке, куиньсэрголэн пушказ (259 стр.)



259 сур.



260 сур.

2) Куиньсэрго шонерсэрег'ем ке, гипотенуза вылаз но, солэн шор вадьсаз (260 сур.)

3) Куиньсэрго мырксэрег'ем ке, куиньсэрголэн педпалаз (261 сур.)

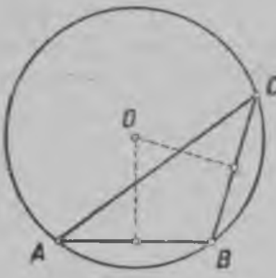
3. *Теорема.* Котькыче куиньсэрголэн пушпалтӥз одӥг гожтэм котыргож гинэ гожтыны луоз.

Сётэмын: $ABC\triangle$ (262 сур.).

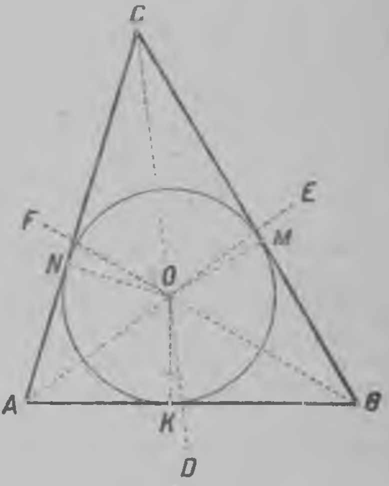
Зэме поттыны кулэ: $ABC\triangle$-е пушпалтӥз одӥг гожтэм котыргож гинэ гожтыны луоз.

Зэме поттон. Куиньсэргоэ пушпалтӥз котыргож гожтон — солэсь шорвадессэ но, солэн радиусэзлэсь кузьдалазэ шедьтон луэ. ABC куиньсэрголэн дур'ёсыз утчано котыргожмылы йӧтӥсесь луо, одӥг со котыргоже ик йӧтӥсьёс шор интысен радиуслы ӵошась кемын сыло: соин ик пушпалтӥз гожтэм котыргожлэсь шорзэ шедьтон понна, куиньсэрголэн дур'ёсысенызы котькудӥзлы ог кемын палэнтэм точкаэз шедьтыны кулэ.

Куиньсэрголэн дур'ёсыз бордысь ог кемын луись точка куиньсэрголэн котькуд кык биссектрисаосызлэн вожвылскон O точка луэ. O точка куиньсэргоэ пушпалтӥз гожтэм котыргожлэн шорез луэ; та котыргожлэн радиусэз котькудӥз шорысеныз куиньсэрголэн дураз ортчытэм OK, OM яке ON перпендикуляр'ёс луо. Куиньсэрголэн OK, OM но ON радиус'ёслы перпендикулярной луись но соослэн K, M но N пум'ёстӥзы ортчись котыргож вылын кыллись дур'ёсыз, котыргоже йӧтӥсьёс луо.



261 сур.



262 сур.

Со ABC куиньсэргоэ ик пушпалтӥз гожтэм мукет котыргож уз луы ни, солэн кык сэрегезлэн биссектрисаосыз одӥг точкаын гинэ вожвылско.

BC но AC дур'ёслы ог кемын луись O точка, $C\angle$ биссектриса вылын но кылле.

4. O точка сяна куиньсэрголэн вань куинь дур'ёсызлэсь огкеме палэнтэм нош ик куинь точкаос луэмзэс тодмо, со точкаос куиньсэрголэн педпалаз кыллё. Со куинь точкаос куинь котыргож'ёслэн шор'ёссы луо, нимистьыз точка куиньсэрголэн огпал дураз но кык мызон дур'ёслэн кузёмытэмазы йӧтэ. Сыӵе котыргож'ёс **педласянь пушказ гожтэм** нимасько (215 сур. 118 бам).

Озьыен, куиньсэргоя чакласа асьмеос пӧртэмаськом: 1) куиньсэрголэн вань куинь йыл'ёсыз пыр ортчись **педпалласянь гожтэм** одӥг котыргожез, 2) куиньсэрголэн вань дур'ёсаз йӧтскись **пушласянь гожтэм** одӥг котыргожез но, 3) педласянь пушказ гожтэм куинь котыргож'ёсыз.

§ 2. Пушпалтӥз гожтэм ньыльсэрголэн сэрег’ёсызлэн аслык‘ёссы.

1. *Теорема.* Котькыӵе пушпалтӥз гожтэм ньыльсэргоын ваче пумит сылӥсь сэрег‘ёсызлэн суммазы кык шонер сэрег‘ёслы ӵошало, мукет сямен $2d$-лы.

Сётэмын: $ABCD$ — пушпалтӥз гожтэм ньыльсэрго (263 сур.).

Зэме поттыны кулэ: $A\angle + C\angle = 2d$ но $B\angle + D\angle = 2d$.

Зэме поттон. $A\angle$ пушпалтӥз гожтэм луыса $\frac{DCB\smile}{2}$-эн мертаське $C\angle$ мертаське $\frac{BAD\smile}{2}$, озьы бере A но C сэрег’ёслэн суммазы $\frac{DCB\smile}{2} + \frac{BAD\smile}{2}$ луэ яке $\frac{DCB\smile + BAD\smile}{2}$ суммаэнызы мертаське, мукет сямен, котыргожлэн ӝыныэныз, соин ик нош $A\angle + C\angle = 180°$ яке $2d$.

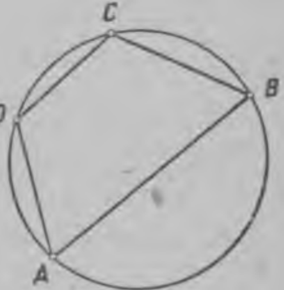
Озьы ик $B\angle + D\angle = 2d$ шуыса зэме поттӥське.

2. *Теорема (пумит).* Ньыльсэргоын ваче пумит кыллись сэрег‘ёслэн суммазы $2d$-лы ӵоша ке, солэн йыл‘ёсыз пыртӥ котыргож ортчытны луоз.

Сётэмын: $ABCD$-ньыльсэрго (263 сур.)
$A\angle + C\angle = 2d$ но $B\angle + D\angle = 2d$

Зэме поттын кулэ: $ABCD$ ньыльсэрголэн A, B, C но D йыл‘ёсыз пыртӥ котыргож ортчытыны луэ шуса.

Зэме поттон: $ABCD$ ньыльсэрголэн A, B но C йыл’ёсыз пыртӥ котыргож ортчытом. Со котыргож озьы ик D йыл пыртӥ но ортчоз шуса зэме поттом. Зэмзэ ик, D точка котыргож вылын кылльытэк солэн пушпалаз яке педпалаз интыаськысал ке, соку $D\angle$ ABC буколэн ӝыныэныз ӧй мертаськысал, озьы бере BD сэрег’ёслэн суммазы 180° яке $2d$ ӧй ӵошасал, со условилы пумит кариське, соин ик D точка котыргож вылын кыльыны кулэ, со нош A, B но C точкаос пыр ортчись котыргож озьы ик D точка пыр но потэмез возьматэ. $ABCD$ — ньыльсэрго пушпалтӥз гожтэм ньыльсэрго луэ.



263 сур.

3. Шонерсэрго, квадрат но огкадь урдэс’ем трапеци но пушпалтӥз гожтэм луыны быгато, малы ке шуид, со ньыльсэргоослэн ваче пумит кыллись сэрег’ёссылэн суммазы $2d$ луэ.

§ 3. Котыртӥз гожтэм ньыльсэрголэн дур‘ёсызлэн аслыксы.

1. *Теорема.* Котыртӥз гожтэм ньыльсэргоын кык ваче пумит кыллись дур‘ёсызлэн суммазы мукет кык дур‘ёслэн суммазылы ӵоша.

Сётэмын: $ABCD$ — котыртӥз гожтэм ньыльсэрго (264 сур.).
Зэме поттыны кулэ: $AD+BC=AB+DC$.

Зэме поттон. Котыртӥз гожтэм ньыльсэрголэн дур'ёсыз котыргоже йӧтӥсь интыын луо. Одӥг со точкаысь ик котыргож доре ортчытэм кык йӧтӥсьёс ӵошасесь; соин ик $AN=AK$, $BL=BK$, $CL=CM$, $DN=DM$. Та ӵошан'ёсыз нимаз член'ёсын огазаса шедьтом:

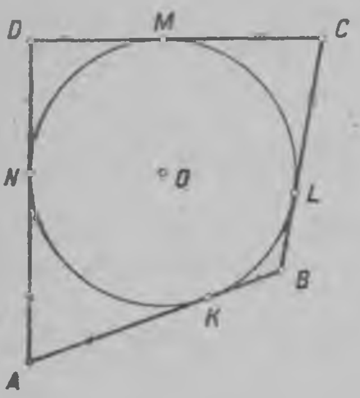
$$AN+DN+BL+CL=AK+BA+CM+DM,$$

яке

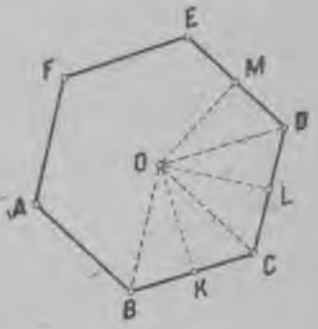
$$AD+BC=AB+DC.$$

2. *Кык ваче пумит кыллись дур'ёслэн суммазы мукет кык дур'ёсызлэн суммазылы ӵошась ньыльсэргоэ пушпал котыргож гожтыны луоз.*

Вань параллелограм'ёс пӧлысь пушпал котыргож ромбе гинэ гожтыны луэ нош озьы бере квадратэ но луэ.



264 сур.



265 сур.

§ 4. Котыртӥз гожтэм уносэрголэн но куиньсэрголэн площадез.

1. *Теорема.* **Котыртӥз гожтэм уносэрголэн площадез, солэсь периметрзэ пушпал гожтэм котыргожлэн радиусэзлы уноам произведенилэн ӝыныэзлы ӵоша.**

Сётэмын: $ABCDE$ — котыртӥз гожтэм n-сэрго;
r—пушпал гожтэм котыргожлэн радиусэз:
P_n— n-сэрголэн периметрез (265 сур.).

Зэме поттыны кулэ: солэн площадез $S_n=\frac{1}{2}P_n\cdot r$.

Зэме поттон. Котыргожлэсь O шорзэ $ABCDE$ уносэрголэн йыл'ёсыныз огазеаса, асьмеос уносэргоэз n куиньсэргоослы люкиськом.

$$AOB\triangle \text{ пл.} = \frac{1}{2} AB \cdot r;\ BDC\triangle \text{ пл.} = \frac{1}{2} BC \cdot r$$

……

Тӥни, $AOB\triangle \text{ пл.} + BOC\triangle \text{ пл.} + \ldots = \frac{1}{2} r\ (AB + BC + \ldots)$;

озьы бере, $S_a = \frac{1}{2} r . P_a$, яке $S_n = \frac{1}{2} P_n \cdot r$

2. ***Следстви.*** **Котыртӥз гожтэм куиньсэрголэн площадез $S\triangle = p.r$; татын p—куиньсэрголэн ӝыны периметрез луэ.**

3. **Задача.** *Куиньсэрголэн дур'ёсыз a, b но c.* Пушпал гожтэм котыргожлэсь r радиуссэ тодоно.

Лыд'янэз. $S\triangle = p \cdot r$, озьы бере, $r = \frac{S\triangle}{p}$, нош Геронлэн формулаэз'я

$$S\triangle = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

соин ик $r = \frac{\sqrt{p(p-a)\ (p-b)\ (p-c)}}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)\ (p-b)\ (p-c)}{p}}$

Юан'ёс но уж'ёс.

1. Ньыльсэрголэн сэрег'ёсыз рад'язы 2:3:4:5 кадь кусып'ясько; малы солэн вань йыл'естӥз котыргож ортчытыны уг луы?

2. Ньыльсэрголэн дур'ёсыз 1:2:3:4 кадь кусып'ясько ке, малы отчы пушпал гожтэм котыргож гожтыны уг луы?

3. Дур'ёсыз b но c, нош котыртӥз гожтэм котыргожлэн R—радиусэз сётэмын ке, ABC куиньсэрго лэсьтоно.

4. a дурез, B но пушпал гожтэм котыргожлэн R — радиусэз сётэмын ке, ABC куиньсэро лэсьтоно.

5. c дурез, $A\angle$ но пушпал котыртожлэн r радиусэз сётэмын ке, ABC куиньсэрго лэсьтоно.

6. $A\angle$ но $B\angle$ но пушпал котыргожлэн r радиусэз сётэмын ке, ABC куиньсэрго лэсьтоно.

7. Куиньсэрголэн a дйнез'я но котыртӥз гожтэм куиньсэрголэн R радиусэз'я огкадь урдэс'ем куиньсэрго лэсьтоно.

8. a дурез'я но пушпал гожтэм котыргожлэн r радиусэз'я ромб лэсьтоно.

9. Котыртӥз гожтэм ньыльсэрголэн куинь дур'ёсыз огез бӧрсе мукетсэ басьтэм рад'я 6 *см*-лы, 4 *см*-лы, 5 *см*-лы чошало. Солэсь ньылетӥ дурзэ тодоно.

10. *Котькуд куиньсэргоын $a \cdot b = 2Rh_c$, отын R — котыртиз гожтэм котыргожлэн радиусэз.* Зэме поттоно.

11. *$ab = 2Rh_c$ формулаэз кутыса $R = \frac{abc}{4S}$ луэмез возьматоно, яке $S = \frac{abc}{4r}$, отын S — куиньсэрголэн площадез.*

XX. ШОНЕРЕСЬ УНОСЭРГООС.

§ 1. Шонересь уносэргоос.

1. *Уносэрго 1) вань дур'ёсыз огкадесь ке но 2) вань сэрег'ёсыз огкадесь ке шонер шуса нимаське.*

Огкадь дуро куиньсэрго но квадрат шонересь уносэргоослы пример'ёс луо. Шонерсэргоэз яке ромбез шонер уносэрго шуыны уг луы: шонерсэрголэн вань сэрег'ёсыз ог кадесь, нош дур'ёсыз огкадесь ӧвӧл, ромблэн вань дур'ёсыз ог кадесь, нош сэрег'ёсыз огкадесь ӧвӧл.

2. n-сэрголэн пушпал сэрег'ёсызлэн суммазы $2d\,(n-2)$ ӵоша, озьы бере шонер n-сэрголэн котькуд пушпал сэрегез $\frac{2d\,(n-2)}{n}$ ӵоша. Котькыӵе уносэрголэн педпал сэрег'ёсызлэн суммазы $4d$-лы ӵоша, соин ик нош шонер n-сэрголэн котькуд педпал сэрегез $\frac{4d}{n}$ -лы ӵоша.

Шонер n-сэрголэсь пушпал сэрегзэ соин артэ сылӥсь педпал сэрегез'я лыд'яны луоз: пушпал сэрегез ӵоша: $2d-\frac{4d}{n}=2d\left(1-\frac{2}{n}\right)$

3. n-сэрголэн дурез a-лы ке ӵоша, солэн периметрез $P=an$

Огмында дуро уносэргоос огним'емесь шуса нимасько,

Шонересь огним'ем уносэргоослэн дур'ёссы ӵошало ке, куспазы уносэргоос но ӵошало.

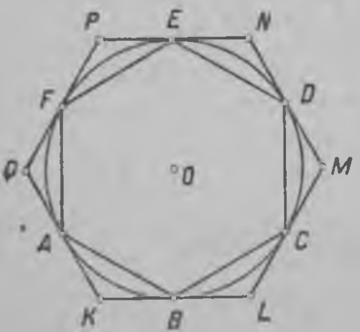
§ 2. Шонересь пушпал гожтэм но котыртӥз гожтэм уносэргоосыз лэсьтон.

1. *Теорема.* Котыргож кӧня ке эркын басьтэм огкадесь лыд люкет'ёслы люкемын ке, соку: 1) люкем точкаосыз бӧрсе-бӧрсе герӟась хордаос шонер пушпал гожтэм уносэрго пӧрмыто; 2) люкем точкаосы ортчытэм йӧтӥсьёс котыртӥз гожтэм шонер уносэрго пӧрмыто.

Сётэмын: A, B, C... точкаосын O котыргож огкадесь n люкет'ёслы люкемын (266 сур.).

Зэме поттыны кулэ: 1) AB, BC, CD... хордаос пушпал гожтэм шонер уносэрго но 2) KL, LM, MN йӧтӥсьёс котыртӥз гожтэм шонер уносэрго пӧрмыто.

Зэмепоттон. 1) Котыргожез люкем точкаосыз бӧрсе-бӧрсе рад'яз хордаосын герӟаса, $ABCDEF$ пушпал гожтэм уносэрго шедьтом. AB, BC, CD... букоос ӵошасесь, соин ик нош огкадесь букоосыз золтӥсь луыса хордаосыз но $AB=AC=CD$... Со сяна, огкадесь букоосын мертаськись пушпал гожтэм сэрег'ёс, $A\angle=B\angle=C\angle$..., соин ик дур'ёсыз но сэрег'ёсыз огкадесь луись пушпал гожтэм $ABCDEF$ уносэрго,— шонер.



266 сур.

2) Котыргожез A, B, C, D... люкем точкаос пыр йӧтӥсьёс ортчытыса, котыртӥз гожтэм $KLMNFQ$ шонерсэрго шедьтом. AKB, BLC, CMD... куиньсэргоослэн AB, BC, CD... дӥньёссы огкадесь; сооcлэн дӥньёссы бордын кылись сэрег'ёс $KAB\angle$, $KBA\angle$, $LBC\angle$, $LCB\angle$... огкадесь букоосын мертаськеменызы ӵошасесь; соин ик куиньсэргоос 1) огкадь дур'емесь но 2) аcьсэ куспазы ӵошасесь.

Куиньсэргооослэн ӵошанысьтызы потэ:
$KA = KB = BL = LC = MC = MD = \ldots$, яке $KL = LM = MN = \ldots$, озьы ик нош $K\angle = L\angle = M\angle = \ldots$

Озьы котыртӥз гожтэм KL, MN, FQ уносэрголэн дур'ёсыз но сэрег'ёсыз огкадесь, соин ик со шонер.

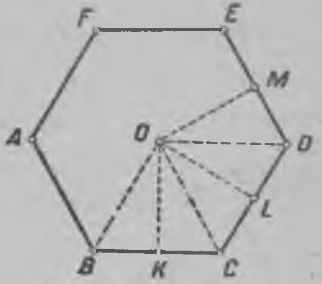
2. Пушпал гожтэм яке котыртӥз гожтэм уносэргоэз лэсьтон—котыргожгез огкадесь люкет'ёслы люконэ лыктэ.

3. *Теорема.* **1) Котькыӵе шонер уносэргоэ пушпал гожтэм котыргож гожтыны луэ но 2) солэн йыл'ёсыз пыртӥ котыртӥз гожтэм котыргож ортчытыны луэ.**

Сётэмын: $ABCDEF$—шонер уносэрго (267 сур.).
$A\angle = B\angle = C\angle = \ldots$ но $AB = BC = CD = \ldots$

Зэме поттыны кулэ: 1) Шонер уносэргоэ пушпал котыргож гожтыны луэ,
2) солэн йыл'ёсыз пыр котыртӥз гожтэм котыргож ортчытыны луоз.

Зэме поттон. 1) Уносэрго пушпал котыргож гожтон понна, солэсь шорзэ но радиусэзлэсь кузьдалазэ тодыны кулэ. Пушпал гожтэм котыргожлэн шорез—уносэрголэн вань дур'ёсызлы ог кемын палэнтэмо точка луэ. AB но BC дур'ёс дорысен ог кемын луись точкаос $B\angle$-лэн биссектрисаэз вылын кыллё: BC но CD дур'ёс дорысен ог кемын луись точкаос $C\angle$-лэн биссектрисаэз вылын кыллё; озьы бере кыкезлэн ик биссектрисаослэн вожвылскись O точказы AB, BC но CD дур'ёс дорысен ог кеме палэнтэмын.



267 сур.

Озьы ик уносэрголэн CD но DE дур'ёсыз дорысен O точка ог кемын палэнтэмын шуыса зэме поттом, озьы бере со $D\angle$-лэн биссектриса вылаз кылле. Со понна O точкаэз D йылэн огазе каром но $COD\triangle$ но $BOC\triangle$ учком. Соослэн OC дур'ёссы ог'я бере, $BC = CD$ но $OCB\angle = OCD\angle$. Та куиньсэргооослэн ӵошанысьтызы потэ: $OBC\angle = ODC\angle$, нош $OBC\angle = \frac{B\angle}{2}$, озьы бере, шонер уносэрголэн сэрег'ёсыз луэмен $D\angle = B\angle$, $ODC\angle = D\angle$ нош $ODC = \frac{D\angle}{2}$ке соку OD-лэн биссектрисаэз O луэ.

Озьы ик OE, но OF но OA уносэргооослэн сэрег'ёссылэн биссектрисаоссы шуса зэме поттӥськом, нош со, O точка уносэрголэн вань сэрег'ёсызлэн биссектрисаэзлэн вожвылскон точказы, вань дур'ёсыз дорысен ог кемын палэнтэмын шуса тодытӥське, озьы бере, пушпал гожтэм котыргожлэн шорез луэ. $OK = OL = OM = r$ утчано котыргожлэн радиусэзлы.

2) BOC, COD... куиньсэргооослэн ӵошанысьтызы $OA = OB = OC = \ldots$ потэ; со, уносэрголэн вань йыл'ёсыз дорысен ог кемын O точка луэ но $R = OA = OB = \ldots$ радиусэн пушпал гожтэм котыргожлэн шорез луэ шуса возьматэ.

Шонер уносэрголэн пушпал но котыртиз гожтэм котыргож'ёслэн шорзы ог вадьсы тупало. Сооcлэн оглом шорзы O точка шонер уносэрголэн шорез шуса нимаське. Дур'ёсысеныз O точка OK, OL кусып'ёс солэн апофемаэз шуса нимаське. Уносэрголэн апофемаэз со дыре ик пушпал гожтэм котыргожлэн радиусэз но луэ.

§ 3. Шонересь огним'ем уносэргооослэн аслык'ёссы.

1. *Шонересь огним'ем уносэргооослэн сэрег'ёссы огкадесь луэменызыно сооcлэн дур'ёссы пропорциоэсь луэменызы соос огзылы огзы кельшисесь.*

2. *Теорема.* **Шонересь огним'ем уносэргооослэн дур'ёссы котыр гожтэм котыргож'ёслэн радиус'ёссы кадь кусыпаськo.**

Сётэмын: $n =$ уносэрголэн дур'ёсызлэн лыдэз (268 сур.)
AB но A_1B_1 — уносэрголэн дур'ёсыз;
OA но OB... O_1A_1 но O_1B_1 — котыртйз гожтэм котыргожлэн радиус'ёссы;
MO но O_1M_1 — пушпал гожтэм котыргож'ёслэн радиус'ёссы яке апофемаос.

Зэме поттыны кулэ: $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{OA}{O_1A_1} = \frac{OM}{O_1M_1}$

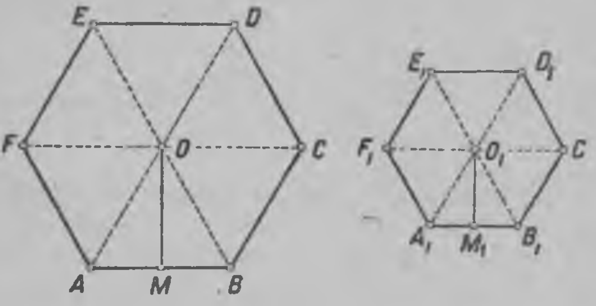
Зэме поттон. Огкадь дур'ем $A_1O_1B_1$ но AOB куиньсэргоосын $O_1\angle = O\angle$, малы ке шуид, соос котькудйз нимаз $\frac{4d}{n}$-лы чоша, озы бере, куиньсэргоос кельшисесь,

$$AOB\triangle \backsim A_1O_1B_1\triangle;$$

со куиньсэргооослэн келшемысьтызы потэ:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{OA}{O_1A_1} = \frac{OM}{O_1M_1},$$

мукет сямен, шонересь огним'ем уносэргооослэн дур'ёссы котыртйз гожтэм котыргож'ёслэн радиус'ёссылы но апофемаоссылы пропорциональноесь.



268 сур.

3. *Следстви.* **Шонересь огним'ем уносэргооослэн периметр'ёссы, котыртйз гожтэм котыргож'ёслэн радиус'ёссы кадь яке апофемаос сямен кусыпаськo.**

$ABCDEF$ но $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ шонересь огним'ем уносэргоос кельшисесь но, озы бере, сооcлэн огвыллем дур'ёссы пропорциональноесь:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \ldots \text{ нош } \frac{AB + BC + CD + \ldots}{A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1 + \ldots} = \frac{AB}{A_1B_1}$$

яке

$$\frac{P}{P_1} = \frac{AB}{A_1B_1}, \text{ нош } \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AO}{A_1O_1} = \frac{OM}{O_1M_1} \text{ бере, соку } \frac{P}{P_1} = \frac{AO}{A_1O_1} = \frac{OM}{O_1M_1};$$

§ 4. Шонер уносэрголэн площадез.

Теорема. **Шонер уносэрголэн площадез, солэсь периметрзэ апофемаэзлы уноам произведениэзлэн ӝыныэзлы ӵоша.**

Сётэмын: шонер n-сэрго: a_n — шонер n-сэрголэн дурез;
n — солэн дурезлэн лыдэз; $OM=h$ — апофемаэз;
P_n — солэн периметрез (269 сур.).

Зэме поттыны кулэ: n-сэрголэн площадез $S_n=\frac{1}{2}P_n\cdot h$

Зэме поттон. Шонер n-сэрголэсь йыл’ёссэ солэн шорезыз огазеаса n огкадесь, огкадь дур’емесь куиньсэргоос шедьтом сооcлэн котькудзылэн площадьзы $S=\frac{1}{2}a_nh$, татын h — куиньсэрголэн ӝүждалаэз, со дыре ик уносэрголэн апофемаэз; татысен быдэс уносэрголэн площадез:

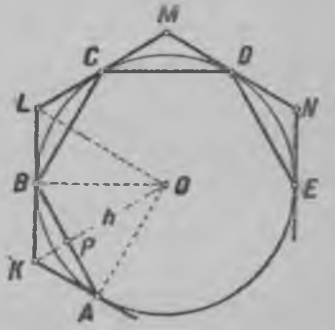
$$S_n=n\cdot S\triangle=\frac{1}{2}na_nh;$$

нош $a_n\cdot n=p_n$, уносэрголэн периметрезлы, соин ик

$$S_n=\frac{1}{2}p_n\cdot h.$$

Следствиос. **1. Пушпал гожтэм шонер уносэрголэн площадез слоэсь периметрзэ апофемаэзлы уноам произведениэзлэн ӝыныэзлы ӵоша** (269 сур.):

$$S_n=\frac{1}{2}p_nh.$$



269 сур.

2. Котыртӥз гожтэм шонер уносэрголэн площадез, солэсь периметрзэ котыргожлэн радиусэзлы произведениэзлэн ӝыныэзлы ӵоша (269 сур.):

$$S_n=\frac{1}{2}p_nh=\frac{1}{2}p_n\cdot r$$

3. Огним’ем шонер уносэргооcлэн площадьзы сооcлэн дур’ёссылэн квадрат’ёссы кадь кусыпасько, яке котыртӥз но пушпал гожтэм котыргож’ёслэн радиус‘ёссылэн квадрат‘ёссы кадь кусыпасько (268 сур.)

$ABCDEF$ но $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — огним’ем шонересь уносэргоос; AO но A_1O_1 — сооcлэн радиус‘ёссы, OM но O_1M_1 — сооcлэн апофемаоссы, S но S_1 — сооcлэн площадьзы.

Огним’ем шонересь уносэргоос кельшисесь, соин ик сооcлэн площадьёссы, сооcлэн дур‘ёссылэн квадратсы кадь кусыпасько:

$$\frac{S_1}{S}=\frac{A_1B^2_1}{AB^2} \tag{1}$$

Огним'ем шонересь уносэргоослэн дур'ёссы нош пушпал яке котырйз гожтэм котыргож'ёслэн радиус'ёс сы кадь кусыпасько:

$$\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{O_1A_1}{OA}=\frac{O_1M_1}{OM}. \qquad (2)$$

(1) но (2) ӵошан'ёсын ваче пуктыса тазьы йылпум'яськом,

$$\frac{S_1}{S}=\frac{A_1B^2{}_1}{AB^2}=\frac{O_1A^2{}_1}{OA^2}=\frac{O_1M^2{}_1}{OM^2}$$

§ 5. Котыргоже пушпал гожтэм квадрат. Солэн лэсьтонэз но солэсь дурзэ радиус пыр пус'ён.

Задача. *Котыргожлэн R радиусэз'я пушпал гожтэм квадрат гожтоно но солэсь a_4 дурзэ радиус пыр пус'ёно.*

270 сур.

1) Лэсьтонэз. Котыргож пушкекык ваче перпендикулярной AC но BD диаметр'ёс ортчытом (270 сур.): со ньыль огкадесь люкет'ёслы люкиськоз. Диаметр'ёслэсь пум'ёссэс огез бӧрсе мукетэз ваче вуттыса, огазеаса пушпал гожтэм шонер ньыльсэр о, мукет сямен, квадрат шедьтом, солэн дур'ёсыз огкадесь букоосыз золтйсь хордаос луэменызы ваньзы огкадесь, нош котькудйз солэн сэрегез диаметр вылэ пыкиськись луэменызы шонересь.

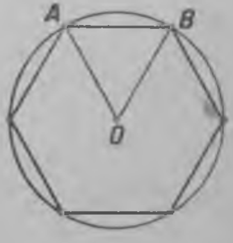
2) Лыд'янэз. Шонерсэрег'ем AOB куиньсэргоысь шедьтйськом:
$AB^2=AO^2+BO^2$, яке $AB^2=2R^2$ отысен $AB=R\sqrt{2}$.

Пушпал гожтэм шонер ньыльсэрголэн дурез:

$$\boxed{a_4=R\sqrt{2}}$$

§ 6. Пушпал гожтэм шонер куатьсэрго. Солэн лэсьтонэз но солэсь дурзэ радиус пыр пус'ён.

Задача. *R радиуслэн котыргожаз, пушпал лэсьтэм шонер куатьсэрго гожтоно но солэсь a_6 дурзэ радиусэз пыр пус'ёно.*



271 сур.

Лыд'янэз. Анализ. AB пушпал гожтэм шонер куатьсэрголэн дурез ме д луоз (271 сур.), соку $AOB\angle=\frac{360°}{6}=60°$. $AOB\triangle$ огкадь дур'ем, $OA=OB=R$ но $A\angle=B\angle$ но котькудйз таосын быдэн 60°.

$AOB\triangle$ — огкадь сэрго, озьы бере огкадь дур'ем но, нош соин ик $AB = AO = BO = R$.

Пушпал гожтэм шонер куатьсэрголэн дурез:

$$\boxed{a_6 = R.}$$

Лэсьтонэз. Сётэм котыргож вылэ котыргожлэн радиусэзлы ӵошамон циркулез усьтыса, огез бӧрсе огзэ куать огкадесь букоос вандӥськом; котькудӥзлэсь буколэсь пум'ёссэ хордаэн ваче герӟаса утчано шонер куатьсэрго шедьтом.

§ 7. Пушпал гожтэм шонер куиньсэрго. Солэн лэсьтонэз но солэсь дурзэ радиус пыр пус'ён.

Задача. *R радиуслэн котыргожаз пушпал гожтэм шонер куиньсэрго гожтоно но солэсь a_3 дурзэ радиусэз пыр пус'ёно.*

1) Лэсьтонэз. Котыргожез куать огкадесь люкет'ёслы люкиськом. Люкем точкаосмес огзэ куспатыса хордаосын ваче герӟам ке, утчано шонер ABC куиньсэргомес шедьтом (272 сур.), солэн $AB = BC = CA$ огкадесь букоосыз золтӥсь хордаос луо.

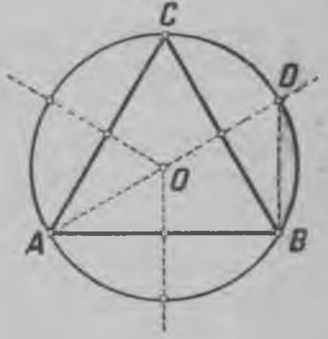
2) Дурзэ лыд'ян. AD диаметр ортчытыса D точкаэз B точкаэн ваче огазеаса но шонер сэрего B йыло шонерсэрег'ем $ABD\triangle$ шедьтом. Шонерсэрег'ем ABD куиньсэргоысь адӟиськом:

$$AB^2 = AD^2 - DB^2; \quad AD = 2R$$

но $DB = R$ нош соин ик

$$AB^2 = a_3^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2,$$ татысен

$$\boxed{a_3 = R\sqrt{3}}$$



272 сур.

§ 8. Пушпал но котыртӥз гожтэм котыргожлэн радиус'ёссэ шонер куиньсэрголэсь ӝуждалазэ но площадьзэ солэн дур'ёсыз пыр пус'ён.

Шонер $ABC\triangle$ сётэмын (273 сур.). Солэн дурез $AB = a$; $OM = r$ — пушпал гожтэм котыргожлэн радиусэз; $OA = OC = R$ — котыртӥз гожтэм котыргожлэн радиусэз: $CM = h$ — ӝуждала S — солэн площадез.

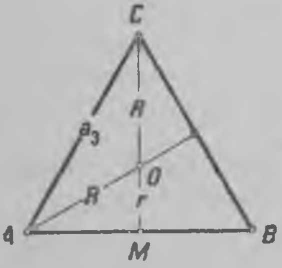
1) R-ез лыд'ян. Дурез $AB = a_3 = R\sqrt{3}$; татысен потэ.

$$R = \frac{a_3}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

2) r-ез лыд'ян. AOM шонерсэрег'ем куиньсэргоын гипотенузаэз $AO = R$ ABC куиньсэргоысь $A\angle$-лэн биссектрисаэз, озьы

бере, $OAM\angle = 30°$, нош соин ик катет $OM = r$ 30° сэреглы ваче пумит кыллись луыса, гипотенузалэн ӝыныэзлы ӵоша, мукет сямен $r = \frac{R}{2}$. Озьыэн,

$$1)\ r = \frac{R}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6} \qquad 2)\ R = 2r.$$



273 сур.

3) h-эз лыд'ян. Ӝуждала $h = CM = CO + OM$, нош $CO = R = 2r$ но $OM = r = \frac{R}{2}$ соин ик:

$$1)\ h = R + \frac{R}{2} = 1{,}5R;$$

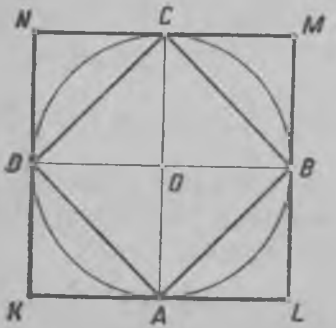
$$2)\ h = 2r + r = 3r$$

$$3)\ h = 3r = 3\cdot\frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

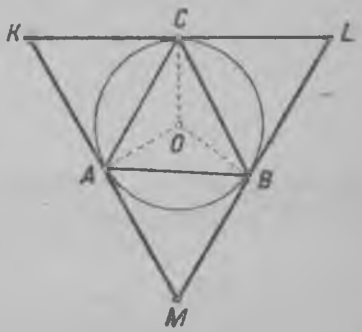
4) S-эз лыд'ян. Площадь $S = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}a\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ кв. единицаос.

§ 9. Котыртӥз гожтэм квадратэз но котыртӥз гожтэм шонер куиньсэргоэз лэсьтон но соослэсь дур'ёссэс радиус пыр пус'ён.

1 задача. *Котыртиз гожтэм квадрат лэсьтоно но солэсь b_4 дурзэ пушпал гожтэм котыргожлэн r радиусэз пыр пусйыса возьматоно.*



274 сур.



275 сур.

Лыд'янэз. r радиуслэн котыргожаз пушпал квадрат гожтӥськом (274 сур.). Солэн йыл'ёсыз пыртӥ ваче вожвылскытозязы йӧтӥсьёс ортчытӥськом, $KLMN$ котыртӥз гожтэм квадрат шедьтӥськом. Солэн дурез $KL = b_4$ котыргожлэн диаметрезлы DB-лы ӵоша, нош соин ик.

$$\boxed{b_4 = 2r}$$

2 задача. *Котыртиз гожтэм шонер куиньсэрго лэсьтоно но солэсь b_3 дурзэ пушпал гожтэм котыргожлэн r радиусэз пыр пусйыса возьматоно.*

Лыд'янэз. r радиусо котыргожлэн пушказ шонер куиньсэрго гожтйськом (275 сур.). Солэн йыл'ёсыз пыр ваче вожвылскытозязы йӧтйсьёс ортчытыса, котыртйз гожтэм шонер KLM куиньсэрго шедьтйськом. KLM куиньсэргоын A но B йӧтйсь точкаос $KA=AM$ но $LB=BM$ луэменызы KM но LM дур'ёслэн шорвадессы луо; татысен $AB=a_3$ KLM куиньсэрголэн шор гожез луэ. Нош $AB=\frac{KL}{2}$, яке $a_3=\frac{b_3}{2}$, татысен $b_3=2a_3$.

Котыртйз гожтэм шонер куиньсэрголэн дурез, со котыргоже ик пушказ гожтэм куиньсэрголэн дурезлэсь кык пол бадӟым:

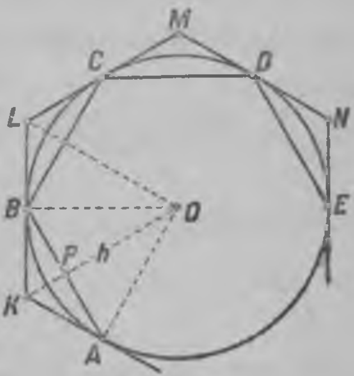
$$\boxed{b_3=2r\sqrt{3}}$$

§ 10. Огним'ем пушказ гожтэм уносэрголэн дурез'я но радиусэз'я шонер, котыртйз гожтэм уносэрголэсь дурзэ лыд'ян.

1. Задача. *Шонер пушказ гожтэм уносэрголэн дурез'я но радиусэз'я огним'ем шонер котыртиз гожтэм уносэрголэсь дурзэ лыд'яно.*

Лыд'янэз. $ABCD$... но $KLMN$... уносэргоос (275 а сур.) шонересь но огним'емесь, озьы бере, соос кельшисесь. Дурез $KL=b_n$, дурез $AB=a_n$. Уносэргоослэн кельшемысьтызы потэ:

$$\frac{b_n}{a_n}=\frac{R}{h}, \text{ кытысен } b_n=\frac{a_nR}{h}. \quad (1)$$



275 а сур.

Шонерсэрег'ем OPB куиньсэргоысь катетэз $PB=\frac{a_n}{2}$, h-эз тодйськом:

$$h^2=R^2-\left(\frac{ah}{2}\right)^2; \qquad h=\sqrt{R^2-\frac{a^2_n}{4}}. \quad (2)$$

h понна шедьтэм (2) лыд пус'етэз (1) чошанэ пуктыса, луэ:

$$\boxed{b_n=\frac{a_n\cdot R}{\sqrt{R^2-\frac{a^2_n}{4}}}.}$$

2. Та формула, шонер пушказ гожтэм уносэрголэн сётэм a_n дурез'я но R радиусэз'я огним'ем котыртйз гожтэм шонер уносэрголэсь b_n дурзэ тодыны лэзе.

3. Шедьтэм формулалэсь кык люкет'ёссэ ик квадратэ ӝутыса a_n тодӥд ке, соку шедьтом:

$$\boxed{a_n = \frac{b_n R}{\sqrt{R^2 + \frac{b^2_n}{4}}}.}$$

Та формула, шонер котыртӥз гожтэм уносэрголэн сётэм b_n дурез'я R но радиусэз'я огним'ем пушказ гожтэм шонер уносэрголэсь a_n дурзэ тодыны лэзе.

4. Задача. *Шонер котыртӥз гожтэм куатьсэрголэсь пушказ гожтэм b_6 котыргожлэн радиусэз пыр R дурзэ пус'ёно.*

Лыд'янэз. Задачаэз лыд'ян понна улӥ формулаэз кутом:

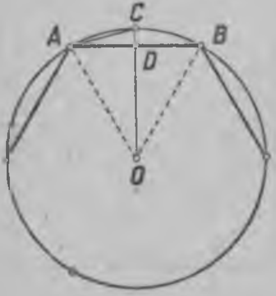
$$\boxed{b_n = \frac{a_n R}{\sqrt{R^2 - \frac{a^2_n}{4}}}.}$$

n уносэрголэн дур лыдэз задачалэн условиэз'я 6-лы ӵоша, озьы бере $a_n = a_b = R$ нош, соин ик:

$$b_6 = \frac{a_6 R}{\sqrt{R^2 - \frac{a_6^2}{4}}} = \frac{R \cdot R}{\sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}}} = \frac{R^2}{\sqrt{\frac{3R^2}{4}}} = \frac{2R^2}{R\sqrt{3}} = \frac{2R\sqrt{3}}{3}.$$

§ 11. Пушказ гожтэм шонер уносэрголэсь дур лыд'ёссэ кык пол будэтон.

1. Задача. *Пушказ гожтэм шонер уносэрголэсь дур лыд'ёссэ кык пол будэтоно но солэсь a_{2n} дурзэ a_n но R пыр пус'ёно.*



276 сур.

Лыд'янэз. 1) $AB = a_n$ — пушказ гожтэм шонер n-сэрголэн дурез мед луоз (276 сур.). Сётэм сярись кык пол трос дур лыдо пушказ гожтэм уносэрголэсьтон понна, мукет сямен, $2n$ дур'ёсын, котыргожез $2n$ огкадесь люкет'ёслы люкыны кулэ. Кылсярись AB дурезлы тупась AB букоэз шори люкиськом, соку $\smile AC = \smile CB$ но AC хорда пушказ гожтэм $2n$ дуро луись уносэрголэн дурез луэ.

2) $AC = a_{2n}$ лыд'ян понна йылсо сэрег'ем $AOC\triangle$ эскером но та дурен квадратэз малы ӵошамзэ гожтом:

$$AC^2 = AO^2 + OC^2 - 2OC \cdot OD.$$

яке

$$a_{2n}^2 = R^2 + R^2 - 2R \cdot OD = 2R^2 - 2R \cdot OD.$$

Шонерсэрег'ем $AOD\triangle$-ысь шедьтӥськом:

$$OD = \sqrt{AO^2 - AD^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2} = \sqrt{R^2 - \frac{a^2_n}{4}}.$$

Выли ҷошанысь OD-эз берпум пус'емен вoштыса луэ:

$$a_{2n}^2 = 2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}, \text{ яке } a_{2n} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}}.$$

Та формула, пушказ гожтэм шонер n-сэрėголэсь дур лыд'ёссэ кык пол будэтон формула, пушказ гожтэм шонер a_n сэреглэн сётэм n дурез'я но R радиусэз'я пушказ гожтэм шонер уносэрголэсь a_{2n} дурзэ тодыны лэзе, солэн $2n$ дур лыд'ёсыз n-сэрголэн дур лыд'ёсыз сярись кык пол трос.

2. **Пример.** *Пушказ гожтэм шонер даскыксэрголэсь дурзэ R пыр пусйыса возьматоно.*

Лыд'янэз.

$$a_{12}^2 = 2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_6^2}{4}}; \qquad a_{12}^2 = 2R^2 - 2R\sqrt{\frac{3R^2}{4}},$$

малы ке шуид, $a_6 = R$:

$$a_{12} = \sqrt{2R^2 - R^2\sqrt{3}} = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}, \text{ яке } a_{12} = \frac{R}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2}),$$

$$\text{малы ке шуид } 2 - \sqrt{3} = \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}\right)^2.$$

Юан'ёс но уж'ёс.

1. *R радиуслэн котретэз пушказ шонер тямыссэрго гожтоно но солэсь дурзэ радиус пыр пус'ёно.*
2. Пушказ гожтэм шонер куиньсэрголэн, ньыльсэрголэн тямыссэрголэн сётэм n дурез'я котретлэсь радиуссэ тодоно.
3. R радиуслэн котыргожаз пушказ гожтэм шонер тямыссэрголэсь, даскыксэрголэсь диагональёсызлэсь кузьдалазэс тодоно.
4. Котыртйз гожтэм шонер куатьсэрголэн дурыз b-лы ҷоша. Котретлэсь радиуссэ тодоно.
5. Сётэм a дурез'я шонер тямыссэрго лэсьтоно.
6. Котретлэн радиусэз R-лы ҷоша. $a_{10} = R \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$. Пушказ гожтэм шонер витьсэрголэсь дурзэ тодоно.
7. h апофемая лэсьтоно: 1) шонер куиньсэрго, 2) квадрат, 3) шонер куатьсэрго.

XXI. КОТЫРГОЖЛЭН КУЗЬДАЛАЭЗ НО КОТРЕТЛЭН ПЛОЩАДЕЗ.

§ 1. Шонересь пушпал но котыртйз гожтэм уносэрголэн периметренызы котыргожлэсь кузьдалазэ ҷошатон.

1. Котыргожлэсь кузьдалазэ со вылэ кузьдалазэ мертан мертэтэз мёчак поныса мертаны уг луы, кузьдалаэз мертан мертэт шонерлэн квадратэз луэменыз кырыж гожен поттэмын уз луы; соин ик котыргожлэсь, кузьдалазэ пушказ но котыртйз гожтэм уносэргоослэсь периметр'ёссэс мертаса со вамен тодо.

Котыргожлэсь кузьдалазэ тодон формулаэз поттон сярись теоремаэз эскерыны кутскемлэсь азьвыл, пӧртэм гож'ёслэн кузьдалазы куспын герӟаськонлыкез эскером, со гож'ёслэн пум'ёссы A но B точкаос луо.

Кык $AEDCB$ но $AFGB$ тӥаськем гож'ёс сётэмын мед луоз, со пӧлысь $AEDCB$ — тэрытӥсь но $AFGB$ — тэрем тӥаськем гож сооослэн пум'ёссы A но B точкаос луо.

Тэрись $AFGB$ тӥаськем гож тэрытӥсь $AEDCB$ тӥаськемлэсь котькудӥзлэсь вакчи луэмзэс возьматом, сооослэн A но B пум'ёссы огзы вылэ огзы усё.

Зэмен но, $AFGB$ тӥаськемлэсь FE дурзэ $AEDCB$ тӥаськемен вожвылскытозяз мыд-мыд пала кузёмытыса (277 сур.), луэ:

$$AF < AK + KF;$$
$$KF + FG + GL < KE + ED + DC + CL;$$
$$GB < GL + LB.$$

Быдэн-быдэн членэз'я сётэм ӵошамтэлэсь огазеаса поттом:

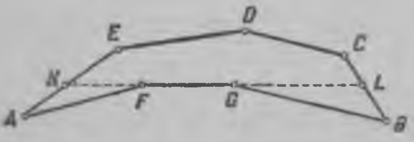
$$AF + KF + FG + GL + GB < AK + KF + KE + ED + DC + GL + \\ + GL + LB,$$

яке, ӵошамтэлэсь кыкезлэсь ик люкетэзлэсь быдэн KL но GL куштыса но $AK + AE = AE$ но $GL + LB = CB$ шуыса синйылтыса, луэ:

$$AF + FG + GB < AE + ED + DC + CB,$$

мукет сямен, поглес тэрись тӥаськем гож котькыӵе тэрытӥсь тӥаськем гожлэсь вакчи, солэн пум'ёсыз тэрисьлэн пум'ёсыныз тупа, со вылэ усе.

Га верам — тэрытӥсь яке тэрись котыргожлэн букоосыз луон учырлы но зэм кыле, малы ке шуоно, котыргожлэсь букозэ ёз'ёссылэн кузьдалазы ничиэсь луись уно лыдо тӥаськемез кадь эскерыны луэ.



277 сур

277 а сур.

Озьы, кылсярись, DC_1F буко (278 сур. 171 бам) DCF тӥаськем гожлэсь вакчи, со кык йӧтӥсьёслэсь CD но CF лэсьтэмын.

Шаркак озьы ик DC_1F буко $DQPF$ тӥаськемлэсь вакчи, мукет сямен $DC\smile + CF\smile < DQ + QP + PF$.

2. *Теорема.* Пушказ гожтэм шонер уносэрголэн периметрез котыргожлэн кузьдалаэзлэсь пичи но солэсь дур лыд'ёссэ кык пол будэтэм'я солы матэктӥське.

Сётэмын: p_n — n-сэрголэн периметрез, C — котыргожлэн кузьдалаэз (277а сур.).

Зэме поттыны кулэ: $r_n < C$ но n дур лыдэз кык пол будэтэм'я C доре матэктӥське.

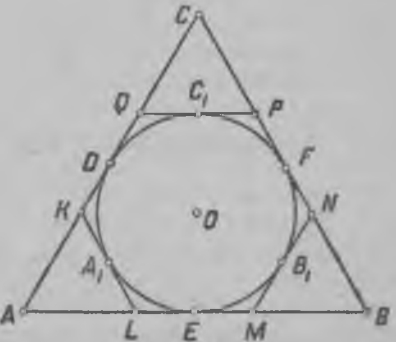
Зэме поттон. AB — пушказ гожтэм шонер ABC куиньсэрголэн дурез, солэн периметрез $p_3 = 3AB$. AB, BC, CA букоосыз шори люком но, люкем D, E но F точкаосыз со букооослэн пум'ёсынызы ваче огазеаса, пушказ гожтэм шонер куатьсэрго шедьтом, солэн периметрез $p_6 = 6AD$, пушказ шонер куиньсэрголэн периметрез сярись бадӟым. Зэмзэ ик ADB куиньсэргоысь адӟиськом: $AD + DB > AB$, нош $AD = DB$, соин ик $2AD > AB$; чошамтэослэсь кык люкетсэс ик 3 = лы уноаса шедьтом: $6AD > 3AB$, яке $p_6 > p_3$. Собере AD, DB, BE, EC... букоосыз шори люком но, люкем K, L, M, N... точкаосыз со букооослэн пум'ёсынызы ваче огазеаса, пушказ гожтэм шонер даскыксэрго шедьтом, солэн периметрез $p_{12} > p_6$. Уж вылысен ADK куиньсэргоысь адӟиськомз: $AK + KD > AD$, нош $KD = AK$, соин ик $2AK > AD$; чошамтэослэсь кыксэ ик люкетсэс 6-лы уноаса шедьтом, $12AK > 6AD$, яке $p_{12} > p_6$.

Котькуд виль шедьтэм уносэрголэсь дур лыд'ёссэ кык пол будэтонэз азьланьтыса ортчим ке, пушказ гожтэм шонер уносэрголэн периметрез солэн дур'ёсыз трос'я уно луэ, шуса оскиськом.

Вань: $p_6 > p_3$; $p_{12} > p_6$... ог'я вераса $p_{2n} > p_n$, татын p_n пушказ гожтэм шонер n дур'ёсын уносэрголэн периметрез, нош p_{2n} — $2n$ дуро уносэрголэн периметрез.

Озьы, пушказ гожтэм шонер уносэрголэсь дур лыдзэ кык пол будэтыса лэзем'я, солэн периметрез будэ, котыргождэн кузьдалаэзлы весь матэ но магэ матэктӥське ке но, солэсь вакчигес ик кыле.

Зэмен ик, пушказ гожтэм шонер уносэрголэн дур'ёсыз, букоосыз ӧжытгес золтӥсь хордаос луо, нош соин ик уносэрголэн вань дур'ёсызлэн суммазы, котыргожлэн вань букоосызлэн суммазылэсь вакчи; татысен, пушказ гожтэм уносэрголэн периметрез, котыргожлэн кузьдалаэзлэсь вакчи луэмез потэ.



278 сур.

Котыргожлэсь кузьдалазэ C пыр тодмоам ке, соку шедьтэм йылпум'яммы тазьы гожтӥськоз: $p_n < C$.

Пушказ гожтэм шонер уносэрголэсь дур лыдзэ пумтэм трос пол кыклы будэтӥд ке, солэн периметрез котыргожлэн кузьдалаэзлы туж матэктӥськыса, солэн кузьдалаэныз но периметрен $C - p_n$ разностез бырымон пичи кылёз.

3. *Теорема.* Котырӥз гожтэм шонер уносэрголэн периметрез котыргожлэн кузьдалаэзлэсь кузь но, солэсь дур лыдзэ кык пол будэтэм'я котыргожлэн кузьдалаэзлы матэктӥське.

Сётэмын: p_n — уносэрголэн периметрез: C — котыргожлэн кузьдалаэз (278 сур.).

Земе поттыны кулэ: $p_n > C$ но n дур лыд'ёсыз кык пол будэт'яса C доре матэктӥське.

Зэме поттон. AB — котыртӥз гожтэм шонер ABC куиньсэрголэн дурез, солэн периметрез $P_3 = 3AB$. Котыргожен котыртӥз гожтэм ABC куиньсэрголэн дурысьтыз йӧтӥсь D, E но F точкаос куспысь — букоосыз шори люкиськом но, люкем A_1, B_1 но C точкаос пыр йӧтӥсьёс ортчытӥськом, котыртӥз гожтэм шонер $KLMNPQ$ куатьсэрго шедьтӥськом, солэн $P_6 = 6KL$ периметрез P_3-лэсь вакчи; $P_6 < P_3$. Зэмзэ ик: AKL, BMN, CQP куиньсэргоосысь луэ: $KL < AK + AL$; $MN < BM + BN$; $PQ < CQ + CP$, нош со ABC куиньсэрго бордысь ӵогылэм AK но AL, BM но BN, CQ но CP вандэт’ёслэн суммазы пичиэсь KL, MN но PQ вандэт’ёсын воштӥськем луэ, соин ик нош $P_6 < P_3$. Озьы ик котыртӥз гожтэм шонер куатьсэрголэсь дур лыд’ёссэ кык пол будэтыса, асьмеос котыртӥз гожтэм шонер даскыксэрго шедьтон солэн периметрез котыртӥз гожтэм куатьсэрголэн периметрезлэсь вакчи, мукет сямен $P_{12} < P_6$ мукет но; ог’я $P_{2n} < P_n$.

Озьы, котыртӥз гожтэм шонер уносэрголэсь дур лыдзэ кык пол будэт‘ям’я солэн периметрез весь котыргожлэн кузьдалаэзлы матэктӥськыса пичиа, нош озьы ке но солэсь бадӟымесь кыле. Та йылпум’ян тазьы гожтӥське: $P_n > C$

Котыртӥз гожтэм уносэрголэсь дур лыдзэ пумтэм трос пол кыклы будэтӥд ке, солэн периметрез котырголжэн кузьдалаэзлы туж матэктӥськыса, котыртӥз гожтэм уносэрголэн периметреныз но котыргожлэн кузьдалаэныз $P_n - C$ разностез бырымон пичи кылёз.

4. Вань верамез огазе карыса $p_n < C < P_n$ шуса юнматӥськом, мукет сямен, котыргожлэн кузьдалаэз пушказ гожтэм шонер уносэрголэн периметрезлэсь кузь но котыртӥз гожтэм унксэрголэн периметрезлэсь вакчи; со куспын та уносэрголэн периметр’ёссы, соослэсь дур лыд’ёссэс кык пол будэтэм’я вош’яськыса котыргожлэн вош’яськытэк кылись кузьдалаэзлы весь матэ но матэ матэктӥське.

§ 2. Вош‘яськись но вош‘яськытэк кылись бадӟымлык‘-ёс сярись валан.

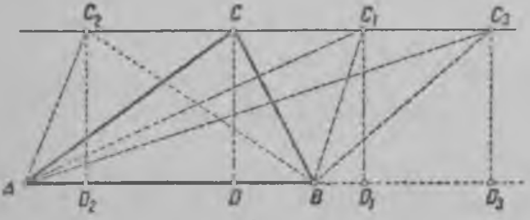
1. Пушказ но котыртӥз гожтэм шонер уносэрголэн p_n но P_n периметр’ёссы соослэсь дур лыд’ёссэс пумтэм кык пол будэт’яса вош’ясько но весь котыргожлэн кузьдалаэзлы, соин ог кадь карискыны турттыны сямен, матэ но матэ карисько; котыргожлэн кузьдалаэз нош уг вош’яськы, пушказ но котыртӥз гожтэм уносэргоослэсь дур лыд’ёссэс кык пол будэт’янэз ортчытон ӵоже ик воштӥськытэк кыле.

2. Сётэм задачалэн условиаз весь пӧртэм валанлык басьтӥсь бадӟымлык вош’яськись бадӟымлык шуыса нимаське: нош со задача условиын ик весь аслэсьтыз валанлыксэ возе ке, вош’яськытэк кылись бадӟымлык шуиське.

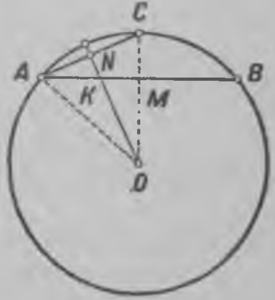
Пушказ но котыртӥз гожтэм уносэрголэн p_n но P_n периметр’ёссы соослэсь дур лыд’ёссэс пумтэм кык пол будэт’яку вош’яськись быдӟалаослэн периметрзы луэ, нош котыргожлэн C кузьдалаэз вош’яськытэк кылись бадӟымлык луэ.

3. Одӥг со задачалэн ик условиаз вош’яськись но вош’яськытэк кылись бадӟымлык’ёслэн пример’ёссы.

1) ABC куиньсэрго сётэмын (279 сур.). Солэсь C йылзэ солы AB дӥнезлы валлин луись шонер’я, дӥньзэ вырӟыт’ятэк кельтыса вош’яд ке, соку солэн дур’ёсызлэн кузьдалаосыз, куиньсэрголэн периметрез, солэн котькуд сэрег’ёсызлэн бадӟымлыкез, вош’яськись бадӟымлык’ёс луозы; нош — солэн пыдэсэз солэн вань сэрег’ёсызлэн $2d$-лы ӵошась суммаэз, солэн ӝуждалаэз но солэн площадез вош’яськытэк кылись бадӟымлык’ёс луозы.



279 сур.



280 сур.

2) R радиуслэн котыргожез сётэмын (280 сур.); $AB = a_n$ пушказ гожтэм шонер n-сэрголэн дурез, $OM \perp AB$ вандэт — апофема: соэ h_n пыр пус’ём.

n-сэрголэсь дур лыд’ёссэ кык пол будэтыса, $AC = a_{2n}$ но $ON \perp AC$ вандэт — апофемаэз шедьтом, соэ h_{2n} пыр пус’ём.

Шонерсэрег’ем OMK куиньсэргоысь адске: $OK > OM$ но OK ON-лэн люкетэз гинэ луэ, соин ик ON OM сярись уката ик бадӟым. Озьы, $ON > OM$ яке $h_{2n} > h_n$, мукет сямен, уносэрголэсь дур лыд’ёссэ кык пол будэтэм’я, апофемаэз будэ, ас кузьдалаэз’я R радиуслэн котыргожезлэн кузьдалаэзлы матэктӥськыса, со куспын ик солэсь вакчигес кыльыса весь будэ но будэ. Озьы луыса уносэрголэсь дур лыдзэ пумтэм кык пол будэтэм’я h_n апофема вош’яськись быдӟала луэ, котыргожлэн радиусэз но вош’яськытэк кылись быдӟала луэ, нош радиуслэн но апофемалэн кузьдалаэз куспысь $R - h_n$ разностез, весь пичи но пичи луыса, уносэрголэн туж трос дурез луэм’я бырымон пичи луэ.

§ 3. Предел сярись валан. Котыргож пушказ но котыртӥз гожтэм уносэргооslэн периметр‘ёссылэн пределзы.

1. Пушказ гожтэм шонер уносэрголэн периметрез солэсь дур лыд’ёссэ пумтэм кык пол будэт’ям кузя но котыргожлэн кузьдалаэзлы матэктӥське; соку дыр’я сётэм котыргожлэн кузьдалаэзлэн но пушказ гожтэм шонер уносэрголэн периметрез куспысь разностез, пушказ гожтэм уносэрголэн дур лыдэз трос’я ӧжыт вакчи луэ, нош дур’ёсызлэсь лыдзэс пумтэм будэтон дыр’я нульлы матэктӥське.

2. Котыртӥз гожтэм шонер уносэрголэн периметрез, солэсь дур лыд’ёссэ пумтэм кык пол будэт’яса котыргожлэн кузьдала-

эзлы весь кулэсмыса матэктӥське: соку дыр'я солэн периметрезлэн но котыргожлэн кузьдалаэз куспысь разностез, котыртӥз гожтэм уносэрголэн дур лыд'ёсыз трос'я вакчи луэ но дур'ёсызлэсь лыдзэс пумтэм кык пол будэтон дыр'я нуле матэктӥське.

3. Уносэрголэсь дур лыд'ёссэ пумтэм кык пол будэт'ям'я, пушказ гожтэм уносэрголэн периметрез но каньыл'я будыса, котыргожлэн кузьдалаэзлы ӵошамез уг луы, котыртӥз гожтэм уносэрголэн периметрез но каньыл'я кулэсмыса котыргожлэн ӵошась уг луы. Котыргож соослэн пределзы луэ.

4. *Вош'яськись бадзымлык матэктиськись вош'яськытэк кылись бадзымлыкез, солэн но вош'яськись быдзалалэн разностьсы, аслаз абсолютной бадзымлыкез'я, котькыче азьвыл сётэм бадзымлыклэсь пичи лэсьтэмын луоз но солэсь пичи кылемез луоз, соэ вош'яськись бадзымлыклэн пределэз шуо.*

Озьы луыса, котыр ож пушказ но котыртӥз гожтэм шонересь уносэргооcлэн, сооcлэсь дур лыд'ёссэс пумтэм кык пол будэт'яку периметр'ёссылы предел луэ.

Та верам тазьы гожтӥське: предел $p_n = C$ яке предел $P_n = C$ уносэрголэн дур лыд'ёсыз пумтэм будон дыр'язы сыӵе луэ, яке $lim\ p_n = C$; $lim\ P_n = C$; татын, *lim* пределэз возьматэ; *limes* латин кылэз ӝиктыса верамын (берыктыса—пум'яськон, предел шуэм луэ).

Уносэрголэсь дур лыд'ёссэ пумтэм кык пол будэтыку C но p_n кусыпысь разность но P_n но C кусыпысь разность весь пичиаса бырымон пичилы пӧрмо; тӥни соин ик, котыргожлэн кузьдалаэз интыэ пушказ яке котыртӥз гожтэм уносэрголэсь туж трос дур лыдо периметрзэ куто.

5. *Сётэм задачалэн условиаз весь пичиась но азьвыл сётэм котькыче бадзымылыклэсь пичи кылись вош'яськись бадзымлык, пумтэм пичи шуыса нимаське.*

Пумтэм пичи бадӟымлык, вош'яськыса, нуль доре вуыны тырше шуса верамо, нуль солэн пределэз луэ. Пумтэм пичи бадзымлык'ёслы пример'ёс: котыртӥз гожтэм котыргожлэн радиусэныз но солэн пушказ гожтэм шонер уносэрголэсь дур лыдзэ пумтэм кык пол будэт'яку апофема вискысь разностез; котыргожлэн кузьдалаэныз но пушказ гожтэм уносэрголэн периметрез вискысь разностез; котыртӥз гожтэм уносэрголэн периметреныз но, со условиын ик котыргожлэн кузьдалаэз куспысь разностез луо.

$$\text{Гожтонэз: } \left.\begin{array}{r} R-h_n = \text{пумтэм пичилы} \\ C-p_n = \text{пумгэм пичилы} \\ P_n-C = \text{пумтэм пичилы} \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{шонер уносэрголэсь дур} \\ \text{лыдзэ пумтэм кык пол} \\ \text{будэт'яку.} \end{array}$$

§ 4. Котыргожлэсь кузьдалазэ лыд'ян лыд.

1. Котыргожлэсь кузьдалазэ, кузьдала мертанэн мёчак мертаны уг луы. Солэн кузьдалаэз, солэн пушказ яке котыртӥз гожтэм уносэрголэн, уносэрголэсь дур лыд'ёссэ пумтэм кык пол будэт'яку, периметрез со доре матэктыны тыршись предел кадь тодытӥське.

2. Со бордысен, пушказ яке котыртӥз гожтэм тужгес но трос дур лыдо уносэрголэсь периметрзэ лыд'яло но, потэм бервыл лыдзэ, котыргожлэн кузьдалаэз интыэ куто. Пушказ но котыртӥз гожтэм шонер уносэрголэсь дур'ёсызлэсь кузьдалаоссэс котыргожлэн сётэм радиусэз'я лыд'яку таӵе формулаосын ужало:

$$a_{2n}=\sqrt{2R^2-2R\sqrt{R^2-\frac{a^2_n}{4}}}\text{ но }b_n=\frac{a_nR}{\sqrt{R^2-\frac{a^2_n}{4}}}$$

Котыргожлэн сётэм радиусэз'я дур'ёслэсь кузьдалаэс лыд'ямлэн бервыл лыдэз нош озьы ик пушказ но котыртӥз гожтэм шонер уносэрголэсь периметр'ёссэ кудӥзлэн дур лыд'ёсыз каньыл'я кык пол будо таблицаын вуттыса возьматэмын. Котыртӥз но пушказ гожтэм огним'емесь шонересь уносэргоослэн разностьсы 0,00001-озь шаркак вуттыса возьматэмын.

n — дур'ёслэн лыдзы	a_n — пушпалтӥз гожтэм уносэрголэн дурез	P_n — пушпалтӥз гожтэм уносэрголэн периметрез	b_n — котыртӥз гожтэм уносэрголэн дурез	P_n — котыртӥз гожтэм уносэрголэн периметрез	$P_n - p_n$ — периметр'ёслэн разностьсы
6	1,0000000 R	6,00000 R	1,1547006 R	6,92820 R	0,92820 R
12	0,5176381 R	6,21166 R	0,5358084 R	6,43078 R	0,21912 R
24	0,2610524 R	6,26526 R	0,2633050 R	6,31932 R	0,05406 R
48	0,1308063 R	6,27870 R	0,1310869 R	6,29217 R	0,01347 R
96	0,0654382 R	6,28206 R	0,0654732 R	6,28543 R	0,00337 R
192	0,0327235 R	6,28290 R	0,0327278 R	6,28375 R	0,00085 R
384	0,0163623 R	6 28311 R	0,0163628 R	6,28333 R	0,00022 R
768	0,0081812 R	6,28317 R	0,0081813 R	6,28322 R	0,00005 R
1 536	0,0040906 R	6,28318 R	0,0040906 R	6,28319 R	0,00001 R

Таблицаэз эскерем уносэргоослэсь дур лыдзэс кык пол будэтэм'я таэ возьматэ: 1) a_n кулэсме нош p_n будэ: 2) b_n кулэсме но P_n кулэсме; 3) a_n но b_n, p_n но P_n лыдо значениос каньыл'я матэктӥсько; 4) котыртӥз но пушказ гожтэм уносэргоослэн периметр'ёссы куспысь $P_n - p_n$ — разностез весь ӧжыт но ӧжыт луэ.

Озьы луыны кулэ: кыкез ик периметр'ёс каньыл'я котыргожлэн кузьдалаэныз одӥг кадь луыны турттыса, одӥг предел доре, котыргожлэн кузьдалаэз доре вуо.

Тырмыт валамон, котыртӥз но пушказ гожтэм огним'ем шонересь уносэргоослэн дурзы 768 луыку, периметр'ёссы кусыпысь разностез 0,00005 R-лы ӵоша ке, соку сётэм котыргожлэн кузьдалаэныз но пушказ гожтэм уносэргоослэн периметрез кусыпысь разностез, яке котыртӥз гожтэм уносэргоослэн периметрез но сётэм котыргожлэн кузьдалаэз куспысь разностез 0,00005 R лэсь ӧжытгес луоз, соин ик котыргожлэн кузьдалаэз интыэ, матэктыса, пушказ яке котыртӥз гожтэм уносэргоослэн дур лыдэз туж уно луись периметрзэ кутыны луоз; дур'ёсызлэн лыдзы макем уно,— матэктэммы сокем шаркак луоз.

Озьы, 1 *м* радиус'ем котыргож басьтэмын ке, соку $P_n - p_n$ разностез $n = 768$ луыку 0,00005 *м* = 0,005 *см* = 0,05 *мм* ёрос луоз, мукет сямен, ваньзэ ӝыны миллиметрлэн одӥг кызетӥ люкетэз гинэ. 1 *м* радиус'ем котыргожлэн кузьдалаэз пушказ яке котыртӥз гожтэм уносэрголэн периметрезлэсь солэсь но пичи бадӟымлыклы пӧртэм луэмез валамон.

Озьы, R радиус'ем C котыргожлэн кузьдалаэз шаркак 0,0001-озь матэктӥськыса, 6,2832 R-лы ӵоша, мукет сямен $C = 6{,}2832\,R$.

Та лыдпус'етын котыргожлэсь R радиуссэ, солэн D диаметрезлэн ӝыныэныз воштӥд ке, мукет сямен, R интыэ $\frac{D}{2}$ басьтӥд ке, соку шедьтом:

$$C = 6{,}2832\,R = 6{,}2832 \cdot \frac{D}{2} = 3{,}1416\,D.$$

Берпум формула, C котыргожлэн кузьдалаэз, солэсь диаметрзэ 3,1416 лыдлы уноаса потэмзэ возьматэ.

3. $C \approx 3{,}1416\,D$ формула котькыӵе диаметро котыргожлэсь кузьдалазэ лыд'яны ярасен кыле. Формулаысь адӟиськом: $\frac{C}{D} \approx 3{,}1416$. Та отношени котыргожлэн кузьдалаэз аслаз диаметрезлэсь 3,1416 пол бадӟым шуыса возьматэ.

Котыргожлэн C кузьдалаэлэн аслаз D диаметрезлы отношениэз вош'яськытэк кылись лыд луэ, со матэктыса 3,1416.

Та вош'яськымтэ лыдэз π греческой букваэн пусйыны кутэмын („пи" шуыса лыдӟиське), озьыэн $\pi \approx 3{,}1416$ луэ. Та пус'ёнэз кутыса, асьмеос котыргожлэн C кузьдала формулаэзлы таӵе вились тус сётӥськом: $C : D = \pi$, яке $C = \pi D$, яке $C = 2\pi R$ мукет сямен:

Котыргожлэн кузьдалаэз, аслаз диаметрезлэсь π пол бадӟым, яке 2 π пол аслаз радиусэсэзлэсь бадӟым.

4. π лыд иррациональной лыд, соин ик нокыӵе рациональной дробен но шаркак пусйыны уг луы. Котыргожлэн C кузьдалаэз интыэ тотыртӥз гожтэм шонер уносэрголэсь периметрзэ кутыса, кудӥзлэн ке дур клыд'ёсыз 768-лы ке ӵоша, соку асьмеос понна матэктӥськем 3,1416 лыд шедьтом, со шаркак 0,0001-озь луоз.

Ужен бэдэстон понна котыргожлэсь C кузьдалазэ лыд'яку $\pi = 3{,}14$ гинэ кутыса тырмэ, шаркак 0,01-озь.

Задача лыд'яку π лыдлы огланъ лыдэн ужано луэ, мукет сямен дробен $\frac{1}{\pi}$; $\frac{1}{\pi} = 0{,}318$ шаркак 0,001-озь; $\frac{1}{\pi}$ - эз 0,32-лы ӵошасен куто, шаркак 0,01-озь.

5. Котыргожлэсь кузьдалаэ лыд'ян уж, яке котыргожез шонертон сярись шуэм сямен, математик'ёслэсь визьзэс олокӧня но сюрс ар'ёс ӵоже кутыса возиз. Вашкала вавилонян'ёс но еврейёс котыргожлэсь кузьдалазэ соэн 3 диаметрезлы ӵошась карса куто вылэм. Вашкала дыр'я одӥг дано математик **Архимед** π понна $3\frac{1}{7}$ лыд шедьтэн ношсо котыргожлэсь кузьдалазэ лыд'яку та книгаын возьматэм амалэн ик ужам. **Птоломейлэсь**, индус'ёслэсь но берлогес араб'ёслэсь асьмеос π понна 3,1416 лыдэз кутэмзэс адӟиськом. **Адриан Меций** шедьтэм $\pi = \frac{355}{113}$. Та лыдэз, радэн нырись кузтэм лыд'ёсыз быдэн кык пол гожтыса 113355, собере берлось куинь лыдпус'ёсыз нырись куинь лыдпус'ёслэсь вис'яса тодэ вайыны капчи.

Шор даур'ёсы ини π лыд бадӟым шаркакен лыд'ямын вал. Озьы француз математик **Виета** (1540—1603) π-эз дасэтӥ дасмосо пусозяз лыд'яз. Германской математик **Лудольф** (1649—1711) π-эз 35 дасмосо пусэн лыд'яз. Собере со π лыдэз лудольфлэн лыдэз шуыны кутскизы. Нош озьы ке но берлогес π-лэсь значенизэ тужгес шаркакен сётэмын вал. Озьы, английской математик **Шанкс** (1812—1882) 707 пусэн лыд'яз. Со берпум льд'ян'ёс ӧжыт пайдао луо но соэ лыд'ян понна быдтэм туж уно ужез ассэ ачиз уг сыл: Шанкслэсь лыдзэ ужпумын лыд'яськыку нокин но уг кутылы.

Соин герӟаськем теори югдур'ёс интереснойгем но кулэгем луо. Вашкала дыр'я ик ини тани кыӵе задача котырын трос мурт'ёс выризы: **котыргожез шонератон** сярись, мукет сямен вераса, сётэм котыргожлэн кузьдалаэз кузьд авандэт, лэсьтон сярись задача но **котретлэн квадратураэз** сярись, мукет сямен вераса сётэм котретлэн площадезлы ӵошась квадрат лэсьтон сярись задача. Соин артэ ик, созэ но мызонзэ но лэсьтонэз кык инструментэн ужаса быдэстыны кулэ — линэйкаэн но циркулен, мукет сямен, шонер гож'ёс но котыр гож'ёс ортчыт'ян вамен. Кыкез ик та задачаос куспазы юн герӟаськемын. Котыргожлэн кузьдалаэзлы ӵошась вандэт басьтыны быгатӥм ке, соку со вандэтэз шонерсэрголэн дӥнезлы кутыса, нош радиуслэсь ӝынызэ — солэн ӝуждалаэзлы кутыса, — шонерсэрго поттом, сётэм котретлы бадӟымен огкадь; шонерсэргоэз бадӟымен огкадь квадратэ берыктон со шуг ӧвӧл ини: соэ **Евклид** но лэсьтыны быгатэ вал ини.

Котретлэн квадратураэз но котыргожез шонератон задача туж трос геометр'ёсыз малпаськытылӥз. Соос пӧлын туж дано геометр'ёс но вань. Котыргожлэсь радиуссэ мертэт понна единицалы кутӥм ке, соку ӝыны котыргожлэн кузьдалаэз π лыдэн пуктӥськоз. Озьы бере кузьдалаэз π лыдэн пуктӥскись вандэтэз циркулен но линейкаэн лэсьтон бордэ уж-югдур султэ. Сыӵе лэсьтонлэн луонэз π лыдлэн сямез бордысь потэ. 1768 аре ини германской математик **Ламберт** π иррациональной лыд луэ шуса возьматӥз. Нош озьы ке но уноэз иррациональной лыд'ёс циркулен но линейкаэн лэсьтэмын луыны быгато. Озьы, дурез 1-лы (кузьдалалэн единицаэзлы) ӵошась квадрат лэсьтыса но солэсь диагональзэ ортчытыса, кузьдалаэз $\sqrt{2}$ лыдэн возьматӥсь-кись вандэт поттом. Пушласянь котретэ гожтэм шонер тямыссэрголэн дурез, солэн радиусэз единицалы ӵоша, $\sqrt{2-\sqrt{2}}$ лы'дэн возьматӥське, со но озьы ик циркулен но линейкаэн лэсьтэмын луоно. Нош π лыд со сярись кушето лэсьтӥськоно луэ. Кылем XIX даурлэн кыкетӥ люкетаз француз математик Эрмит (1873) предложениос пуктыны бигатӥз, соос вылэ пыкиськыса германской математик Линдеман (1882) π лыдэн возьматэм вандэтэз циркулен но линейкаэн лэсьтэны луоно ӧвӧл шуса шарааз. Та зэме поттэм берлогес уно математик'ёсын капчиатэмын но умоятэмын вал. Озьы бере, циркулен но линейкаэн — котретлэсь квадратуразэ лэсьтыны луон ӧвӧл шуса умой тодыса пуктэмын.

Кушето инструмент'ёсын, мукет сямен кушето кривойёс вамен та лэсьтонэз бы дэстыны луоно шуса синйылтом, нош со вашкала дыр'я ик тодмо вал ини.

6. ***Теорема.*** **Кык котыргож'ёс сооcлэн радиус'ёссы яке диаметр'ёссы кадь кусыпасько.**

Сётэмын: C_1 но C_2 котыргож'ёслэн кузьдалаоссы но R_1 но D_1, R_2 но D_2 сооcлэн диаметр'ёсы но радиуссы.

Зэме поттыны кулэ: $\frac{C_1}{C_2}=\frac{R_1}{R_2}=\frac{D_1}{D_2}$

Зэме поттон. $C_1=2\pi R_1=\pi D_1$; $C_2=2\pi R_2=\pi D_2$.

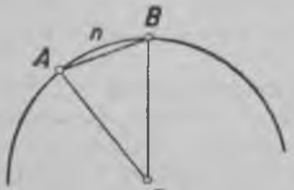
Нимаз член'ёсыз'я нырись ӵошатонэз кыкетӥэзлы люкыса адӟиськом:

$$\frac{C_1}{C_2}=\frac{2\pi R_1}{2\pi R_2}=\frac{R_1}{R_2};\quad \frac{C_1}{C_2}=\frac{\pi D_1}{\pi D_2}=\frac{D_1}{d_2}$$

§ 5. Буколэн кузьдалаэз.

1 задача. *$n°$ буколэсь кузьдэлазэ тодоно, солэн R радиусэз* (281 сур.).

Лыд'янэз. AB буколы $=n°$ (букоо) ӵошась шор $AOB\angle=n°$ (сэрего). Одӥг букоо градуслэн кузьдалаэз $\frac{2\pi R}{360}=\frac{\pi R}{180}$. Нош AB буко $n°$ возе, озьы бере, солэн кузьдалаэз $a=\frac{\pi R\cdot n}{180}$. n но 360 лыд'ёс огним'емесь мед луозы; со луэ, n минутаэн сётэмын ке, соку 360° но минутаэ берыктыны кулэ.



281 сур.

2 задача. *Котыргожлэн радиусэзлы ӵошась тупась буколэсь шор сэрегезлэсь бадзымлыксэ тодоно.*

Лыд'янэз. $a=\frac{\pi R^n}{180}$ формулаысь адӟиськом: $n°=\frac{180°\cdot a}{\pi R}$. задача условиэз'я $a=R$, озьы бере:

$$n°=\frac{180°\cdot R}{\pi R}=\frac{180°}{\pi}\approx 57°18'.$$

Кудизлэн ке букоэзлэн кузьдалаэз радиусэзлы ке чоша сыче сэрег радиан шуса нимаське. Радиан матэктыса 57° 18′-лы оша: тужгес ик шаркак радиан 57° 17′ 44″,8-лы чоша.

§ 6. Котретлэн, секторлэн, сегментлэн площадез.

1. Пушказ но котыртӥз гожтэм уносэргоослэн площадьёссы, соослэсь дур лыдзэс пумтэм кык пол будэт'яку — вош'яськись быдӟалос луо. Дур лыдзэ пумтэм будэт'ян дыр'я пушказ гожтэм уносэрголэн площадез будыса кошке, нош котыртӥз гожтэм уносэрголэн площадез кулэсме. Кыкез ик та вош'яськись быдӟалаос, каньыл'я одӥг со пределэ вуттӥськыны турттыса матэктӥсько. Соослэн вуттӥськыны турттон пределзы котретлэн площадез луэ.

Озьы котретлэн площадез,— пушказ но котыртиз гожтэм шонер уносэрголэсь дурзэс пумтэм будэт'яку площадьёсызлэн пределэз луэ.

Котретлэсь плошадьзэ K пыр ке пусйид, котыртӥз гожтэм шонер уносэрголэсь площадьзэ $S_{\text{к.г.}}$ пыр ке пусйид, соку $S_{\text{п.г.}} < K < S_{\text{к.г.}}$ луоз.

Уносэрголэсь дур лыдзэс кык пол будэт'ям'я пушказ но котыртӥз гожтэм уносэрголэн площадьзылэн $S_{\text{к.г.}} - S_{\text{п.s.}}$ разностьсы каньыл'я весь пичи но пичи луыса пичиоме. Валамон, та условиосын $S_{\text{к.г.}} - S_{\text{п.г.}}$ разностьсы $K - S_{\text{п.г.}}$ но $S_{\text{к.г.}} - K$ разностьсылэсь ӧжыт луэмзы валамон луэ.

Соин ик котретлэн площадез интыэ, пушказ яке котыртӥз гожтэм туж трос дур лыдо уносэрголэсь площадьзэ куто.

Котыртӥз гожтэм шонер уносэрголэн площадез $S_{\text{к.г.}} = \frac{1}{2} P_{\text{к.г.}}\ R$

Дур лыд'ёссэ пумтэм кык пол будэт'яку уносэрголэн $P_{\text{к.г.}}$ периметрез аслаз пределэз доре котыргожлэн C — куздалаэз доре матынске, одӥг дыре ик солэн $S_{\text{к.г.}}$ площадез аслаз пределэз доре котретлэн K площадез доре вуыны турттэ.

$S_{\text{к.г.}} = \frac{1}{2} P_{\text{к.г.}}\ R$ ӵошан котькыӵе дур лыдо уносэрголы тупась кыле; со n туж бадӟым дыр'я но тупась луэ, нош сыӵе учыре $P_{\text{к.г.}}$ C-лэсь но $S_{\text{к.г.}}$ K-лэсь соэ шӧдонтэм пичи быдӟалалы пӧртэм луэ; соин ик ӵошан $P_{\text{к.г.}}$ солэн пределеныз C но $S_{\text{к.г.}}$ соослэн пределэнызы K-эн воштыку но тупась кыле. Озьы

$$K = \frac{1}{2}\ C \cdot R \tag{1}$$

мукет сямен, **котретлэн площадез солэн котыргожезлэсь кузьдалазэрадиусэзлы уноам произведенилэн ӝыныэзлы ӵоша.**

(1) формулаэ $C = 2\pi R$ пуктӥм ке, луоз:

$$K = \frac{1}{2} CR = \frac{1}{2}\ 2\pi R \cdot R = \pi R^2.$$

Берпум ӵошанын R-эз $\frac{D}{2}$ пыр воштӥд ке, котретлэн площадез понна формула шедьтом: $K=\pi R^2=\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2=\frac{\pi D^2}{4}=\frac{1}{4}\ \pi D^2$.

$$\boxed{\text{озьы тйни,}\ K=\pi R^2,\ \text{яке}\ K=\frac{1}{4}\ \pi D^2.}$$

1) Котретлэн площадез солэсь квадрат радиуссэ π лыдлы уноамлы ӵоша.

2) Котретлэн площадез солэсь черык квадрат — диаметрзэ π лыдлы уноамлы ӵоша.

Следстви. **Кык котрет'ёслэн площадьёссы сооослэн радиус'ёссылэн квадратсы кадь, яке сооослэн диаметр'ёссылэн квадратсы кадь кусыпасько.**

Зэмзэ ик K_1 но K_2 — кык котрет'ёслэн площадьёссы, R_1 но R_2 - сооослэн радиус'ёссы, D_1 но D_2 сооослэн диаметр'ёссы, озьы бере

$$K_1=\pi R^2{}_1=\frac{1}{4}\pi D^2{}_1;\ K_2=\pi R^2{}_2=\frac{1}{4}\ \pi D^2{}_2.$$

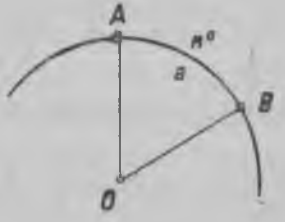
Сётэм ӵошанэз нимаз член'ёсын люкылыса шедьтӥськом:

$$\frac{K_1}{K_2}=\frac{\pi R^2{}_1}{\pi R^2{}_2}=\frac{R^2{}_1}{R^2{}_2}=\frac{D^2{}_1}{D^2{}_2}$$

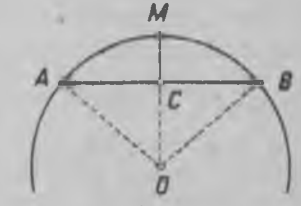
2. ***Теорема.*** **Секторлэн площадез солэн букоэзлэсь кузьдалазэ радиусэзлы уноам произведенилэн ӝыныэзлы ӵоша.**

Сётэмын: R радиуслэн котретэз (282.); буколэн кузьдалаэз $AB=a$; AOB сектор $n°$ возе.

Зэме поттыны кулэ: $S_{\text{сект}}=\frac{1}{2}\ aR$.



282 сур.



233 сур.

Зэме поттон. K котретлэн R радиуслэн площаедз πR^2 ӵоша, букоэз 1°, ӵошась секторлэн площадез котретлэсь $\frac{1}{360}$ люкетсэ кылдытэ но озьызэн $\frac{\pi R^2}{360}$ ӵоша, AB букоэз $n°$ возись AOB секторлэн щадез, $S_{\text{сект}}=\frac{\pi R^2 n}{360}=\frac{1}{2}.\frac{\pi RnR}{180}$ нош $AB\smile=a=\frac{\pi Rn}{180}$ соин ик,

$$\boxed{S_{\text{сект}}=\frac{1}{2}\ aR.}$$

3. Сегментлэн площадез. $AMB=a$ букоэн но AB хордаэн пум'ям AMB сегментлэн площадез (283 сур.) AOB секторлэн площаденыз со a букоэн куспысь разностез кадь ик но, AOB огкадь дур'ем AB хордаэн но кык радиус'ёсын лэсьтэм куиньсэрголэн площаденыз разностез кадь лыд'яське.

AMB сегментлэн площадез $AOB\triangle$-лэн площадезтэк AOB секторлэн площадезлы ӵоша; секторлэн площадез $\frac{1}{2}aR$ лы ӵоша но куиньсэрголэн площадез $\frac{1}{2}a_n h_n$-лы ӵоша, нош соин ик сегментлэн площадез $\frac{1}{2}aR-\frac{1}{2}a_nh_n$ ӵоша.

AMB сегментын (283 сур.) AB хорда солэн дӥнез шуыса нимаське сегментлэн дӥнезлэн шортӥз ортчись $CM=h$ перпендикуляр жуждалаэз, яке сагментлэн стрелкаэз шуыса нимаське.

Юан'ёс но уж'ёс.

1. Котыргожлэсь радиуссэ 1 *м*-лы будэтӥд ке, солэн кузьдалаэз кӧнялы будоз?

2. Шонер куиньсэргоэ пушказ гожтэм котыргожлэн кузьдалаэз, котыртӥз гожтэмлэн сярись кӧня пол вакчи?

3. Пушказ щонер куинъсэрго гожтэм котретлэн площадез, со куиньсэрголэн пушказ гожтэм котретлэн площадез сярись кӧня пол бадӟым?

4. $R=1$ *м* радиуслэн 120° возись сётэм букоэз, соэ кыскись хордалэсь кӧнялы бадӟым шуыса лыд'яно.

5. Шаркак 0,01 лыд'ям жыны котыргожлэн кузьдалаэз матэктыса a_8+a_4 ӵоша Соэ эскероно.

6. Куинь огкадесь $R=3{,}0$ *м* радиус'ем котыргож'ёс кузэн педпалтӥзы ваче йӧто. Котыргож'ёс куспысь „кырыж гожо" куиньсэрголэсь площадьзэ т доно.

7. *Шонерсэрег'ем куиньсэрголэн 2a 2b но 2c дур'ёсыз котрет'ёслэн диаметр'ёссы луо. Гипотенуза вылын лэсьтэм котретлэн площадез катет'ёс вылэ лэсьтэм котрет'ёслэн площадьёссылэн суммазылы ӵоша.*

Зэме поттоно.

8. Кык огкадесь $R=10$ *м* радиусо котыргож'ёс педпалтизы ваче йӧто. Сётэм котыргож'ёсыз шори люкись котыргож ортчытоно но вань куинь котрет'ёслэсь ог'я люкетсылэсь площадьзэс лыд'яно.

$R=2$ *м* радиусо ко рег концентро котыргожен шори люкемын. Концентро котыргожлэсь радиуссэ тодоно.

10. *Кульчолэн площадез* $\pi(R+r)-(R-r)$ *ӵоша шуса, зэме поттоно; татын R но r педпал но пушпал радиус'ёс.*

ОТВЕТ‘ЁС.

Гл. II. Бам. 22. 4. 80° но 100°. 5. 76°,5; 45°. 6. 61°. 8. 90°.

„ III „ *29.* 3. 5 *см*, 5 *см* но 4 *см* яке $4\frac{1}{3}$ *см*, $4\frac{1}{3}$ *см* но $5\frac{1}{3}$ *см*

„ VI „ *42.* 1. $\frac{a}{2}$. 2. a но b.

„ VII „ *53.* 1. $AB \parallel CD$. 2. $CD \perp KL$.

„ „ 3. 45° но 135°; 78°45′ но 101°15″; 80° но 100°; 108°,5 но 71°,5.

„ „ 7. 108° но 72°; 80° но 100°; 110° но 70°; 50° но 130°; 1 8°, 80°; 110° но 50°.

„ 8. 30°, 60° но 90°: ӧвӧл

„ VIII „ *69.* 2. 24,2 *см* 1. 10 *см.*

„ IX „ *81.* 2. 9 пол 3. 0 = 0. 4. 250 *м.*

5. Квадратлэн площадез 900 *кв. см*-лы бадӟым.

6. Квадратлэн периметрез 60 *см*-лы пичи. 8. 25 $см^2$.

„ XI „ *92.* 6. Котькӧня. 8. 6 *см.*

12. 2) 2 r-лы 3) 3 *см* но 7 *см* радиус‘ем’ концентро котыргож‘ёс.

13. Сёгэм гож‘ёслы валлинэсь но соос вискытӥ ортчись шонер гож; AB но CD-вискын сэрег‘ёслэн кык биссектрисаоссы.

16. Концентро котыргож, солэн радиусэз шорысеныз хордаозь кусыплы ӵоша.

„ XII „ *99.* 1. 30°, 35° но 115°. 37°,5, 60° но 82°,5. 5. 80°. 6. 70°.

„ XIII „ *104.* 2. 8 *см* но 4 *см* радиус‘ем концентро котыргож‘ёс.

3. 1,5 *см*; 3 *см.*

„ XIV „ *107.* 5. Диаметр вылын кадь вандэт вылын лэсьтэм котыргож‘ёс; та вандэтлэн пум‘ёсыз: сётэм точка но сёгэм котыргожлэн шорез.

„ XV „ *117.* 2. Биссектриса ортчытоно. 3. 2; 2; 0,5. 6. 12,8 *см* но 8 *см.*

„ XVI „ *128.* 9. Кыкетӥэз но куинетӥэз. 10. 6 *см.* 11. 1,5 *см.* и 4,5*см*

12. Шонерсэргоос квадрат‘ёс ке, соку гӥнэ кельшисесь.

„ XVII „ *135.* 1. а) уг; б) луоз. 2. Йылсо сэрег‘ем; уз луы.

3. 10 *см*, $13\frac{1}{3}$ *см*, но $16\frac{2}{3}$ *см.* 4. 4 *кг.*

„ XVIII „ *140.* 2. $5\sqrt{3}$ *см* но $10\sqrt{3}$ *см.* 3. 4 *см.* 4. $R\sqrt{3}$; одӥг куиньмос

„ XIX „ *144.* 1. Малы ке шуид $2+4\pm3+5$. 2. Малы ке шуид $1+3\pm2+4$.

9. 7 *см.*

„ XX „ *153.* 2. $\frac{1}{2}a\sqrt{3}$; $\frac{1}{2}a\sqrt{2}$; $\frac{1}{2}a\sqrt{2(2+\sqrt{2})}$.

3. 1) $R\sqrt{2}$; $R\sqrt{2+\sqrt{2}}$; $2R$;

2) R; $R\sqrt{2}$; $R\sqrt{3}$; $R\sqrt{2+\sqrt{3}}$; $2R$

4. $\frac{1}{2}b\sqrt{3}$. 6. $\frac{1}{2}R\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

„ XXI „ *164.* 1. 2π *м*-лы 2·2 пол. 3. 4 пол.

4. ≈ 36 *см*-лы 6. 1,44 *м.* 8. $2R^2(\pi-2)\approx2{,}3$ $м^2$.

9. $\frac{1}{2}R\sqrt{2}\approx1{,}4$ *м.*

Кыл валэктон

апофема — апофема
арифметической — арифметическая
ас быдӟалааз (пусэз) — натуральный
азинэстэм возьматйсь — отрицательный показатель
амал — прием, способ
аслык — свойство
артэ сэрег‘ёс — смежные углы
артэ пуктыны — сопоставить
азьвылэз — предыдуший
биссектриса — биссектриса
буко — дуга
бадӟымлык, быдӟала — размер
бадӟымен огкадь — равновелики
быдэс — целый
бератэз — последующий
ваче сылйсь — противолежащий
ватсэт — дополнение
ватсан уноасьёс — дополнительные множители
валчеам — замкнутый
вистэм гож — замкнутая линия
вандэт — отрезок
выжыэз, нырисез — основной
ваньмызлэсь бадӟым ог‘я люкись — общий наибольший делитель
вӧзысь — прилежащий
вожвылтон — пересечение
век‘ян — провешивание
валлин — параллельный
валлин гож‘ёс — параллельные линии
вамен ӵогем — поперечное сечение
ваче пумит’ем — противоположный
возьматон — представление
валэктон — примечание
выжы — корень
ваче уноано — перемножить
выл тыр — поверхность
векчиатыны — раздробить
вамен вандйськем — сечение
вандйсь, ӵогись, вожвылтйсь—секущая
валэктон — указание
5-лы уноано — увеличить на 5
5-лы кулэстоно — уменьшить на 5
5 пол уноано — увеличить в 5 раз
5 пол ичиомытоно — уменшить в 5 раз
градус — градус
геометрио образ — геометрический образ
гипотенуза — гипотенуза
граница — граница
герӟаськон — зависимость
гож — линия
гоп — лунка
диагональ — диагональ
дасм со дробь — десятичная дробь
дробь — дробь
данлык, кулэлык — значение
дйнь — основание
дур — сторона
действи — действие
единицаос — единицы (меры)
ёзнаны — разложить
ёз — ступень
жильдон — разложить
ӝуждала — высота
ӝутон — возвышение
ӝымыт — наглухо
ӝиктыны —сократить
ӝиктон — сокращение
золтэм — натянутая, стянутая
зэме поттон — доказательство
зэме поттыны — доказать
знаменатель — знаменатель
значени — значение
Ӟирыо параллелограм — шарнирный параллелограм
иррациональной — иррациональный
интыаны — расположить
итэмын — соединены, сращены
интыаське — вмещается
йыл — вершина
йылпум‘ян — вывод
йӧтись гож — касательная линия
йылсо сэрег — острый угол
кулэстон — вычитание
кулэстйсь — вычитаемое
кулэлык — значеиие
кутскон, потон —исходная
катет — катет
котрет — круг
квадрат — квадрат
коэфициент — коэфициент
кыллись — лежащий
кечат кыллись — накрестлежащий
котькудйзлы люкиськись пичи лыд — наименьшее краткое
котькудйзлэсь бадӟым — наибольшее
котыртэм — ограниченный
кылемез — остаток
кусып — расстояние

котыртйз гожтэм — описанный
котыргож — окружность
кельшись — подобный
куасалтыны — перегнуть
кылемез — разность
кылпум нуон — рассуждение
кушето — сложный
куиньсэрго — треугольник
капчиагоно, огшорыяно — упростить
кулэсмись — уменьшаемое
кузо лыд — четное число
лыд’яны — вычислить, решить
лыдпус‘ет — выражение
лыд‘ян — вычисление, решение
люкон — деление
люкись — делитель
люкрак — пучок
люкет — часть, доля
люконо отношени — кратное отношение
лыд рад’ян — нумерация
лэзьыны — опустить, восстановить перпендикуляр.
лэсьтон — построение
лыд’ян‘ёслэн радзы — порядок действий
лэсьтэмен огкадь — равносоставленный
лыд — число
лыдпус — цифра
меӵ гож — вертикальный
масштаб — масштаб
малпан — предположение
матэктйське — приближается
матэктыса лыд‘яськон — приближенное вычисление
мертаны луоно — соизмеримый
мертаськисьтэм —несоизмеримый
мырк сэрег — тупой угол
нялмыт — наклонный
нулё — нулевой
ньыльсэрго — чытыреугольник
отношени — отношение
ог‘я вераса — вообще
огкадь — одинаковый
одйг пусо — однозначное
огшоры лыд — простое число
ответ — ответ
огкадь карон — приравнять
огшоры точка — произвольная точка
ортчытыны — провести
огкадь, ӵошась — равный, равно
огкадь дуро — равносторонний
огкадь урдэс‘ем — равнобедренный
огкадь сэрго — равноугольный
огкадь палэнтэмын — рмвноудаленный
огазеан — сложение
огазеаськисьёс — слагаемые
огазеаськись — слагаемое
огшоры — условно
определенной — определенный
пыдпал — внешний

пушпал гожтэм — вписанный
пушпал — внутренний
пыртэм — заключенная
поттыны — извлечь
пумчлен — крайний член
питран — колесо
пӧрмон тус — образ
палэнтэмын — отклонено
пӧртэмлык — особенность
произведени — произведение
перпендикуляр — перпендикуляр
пропорциональность — пропорциональность
пропорцио — пропорциональный
периметр — периметр
площадь — площадь
пазьгес — развернутый
паськытлык — широта
радысьтыз — последовательно
ромб — ромб
рациональный — рациональный
радиус — радиус
разряд — разряд
результат — результат
соотношени—соотношение
сектала — вес
следстви — следствие
степень — степень
сётэм — данный
синйылтон — замечание
со гинэ — исключительно
си — луч
суреданы — начертить
симматри черс — ось симметрии
суред — рисунок, чертеж
сэрег — угол
сэрегез огкадь люкись — равноделящие угла
сумма — сумма
симметри — симметрия
симметрио — симметричный
сектор — сектор
сегмент — сегмент
скобка — скобка
система — система
сочетани — сочетание
сэрег шонертон — угольник
суро дробь — смешанная дробь
тэрытйсь — вмещающий, об’емлющий
тйаськем гож — ломанная линия
тодыны — определить
тодытон — определение
тырмытйсь сэрег‘ёс — пополнительные углы
тодмет — признак
точка — точка
теорема — теорема
тупа — соответствует
тэрись — об’емлемая
урдэс дур — грань
уносэрго — многоугольник
уно пусо — многозначное
уноаськись — множимое

уноась — множитель
урдсаз пуксе — прилегает
усе — приходится
урд — ребро
уноано лыд‘ёс — сомножители
уравнени — уравнение
участок — участок
удельной вес — удельный вес
фигура — фигура
фундамент — фундамент
хорда — хорда
шыгрес — вогнутое
шонертэм — выведенная
шедьтоно лыд — искомое число
шонер гож — прямая линия
шонер — прямая, правильно
шонер сэрег — прямой угол
шонерсэре‘гем — прямоугольный
шонерсэрго — прямоугольник
шонер гожо — прямолинейный
шонер дробь — правильная дробь
шор член — средний член
шаркак — точно
шар — шар
шор — центр
шоретӥ — центральный
шорвадес — средина
черс — ось
частной — частное
черык - четверть
числитель — числитель
ӵошкес — плоскость
ӵошкесо — плоский
ӵошкыт гож — горизонтальная линия
ӵошан пус — знак равенства
ӵошан — равенство
ӵогыны — отсечь

ЙЫР’ЯН

Дунэз 1 ман. 30 кон.
Цена 1 руб. 30 коп.

Переплётэз 30 кон.
Переплет 30 коп.

Ю. О. ГУРВИЦ и Р. В. ГАНГНУС

СИСТЕМАТИЧЕСКИЙ КУРС
ГЕОМЕТРИИ

ЧАСТЬ I
ПЛАНИМЕТРИЯ

На удмуртском языке