Ю. О. ГУРВИЦ и Р. В. ГАНГНУС

ГЕОМЕТРИЯНЬ

СИСТЕМАТИЧЕСКАЙ КУРС

ВАСЕНЬЦЕ ПЯЛЬКССЬ

ПЛАНИМЕТРИЯСЬ

⁂

АФ ПЯШКСЕ СРЕДНЯЙ
И СРЕДНЯЙ ШКОЛАСА
ТОНАФНЕМА КНИГА

* * *

УЧПЕДГИЗ
МОСКУ
1936

Ю. О. ГУРВИЦ и Р. В. ГАНГНУС

ГЕОМЕТРИЯНЬ
СИСТЕМАТИЧЕСКАЙ КУРС

ВАСЕНЬЦЕ ПЯЛЬКССЬ

Планиметриясь

АФ ПЯШКСЕ СРЕДНЯЙ И СРЕДНЯЙ
ШКОЛАНЬ 6—8 КЛАССА
ТОНАФНЕМА КНИГА

Рузоннеста ётафтозе *Е. И. Карцев*

НОЛДАФ КОЛМОЦЕДА

РСФСР-нь НКП-са кемекстаф тонафнема книгаста мокшень кяльс ётафтфть кемекстазе Мокшэрзянь АССР-нь Наркомпроссь

ГОСУДАРСТВЕННАЙ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКАЙ ИЗДАТЕЛЬСТВАСЬ
МОСКУ ★ 1936

Ю. О. Гурвиц и Р. В. Гангнус.
СИСТЕМАТИЧЕСКИЙ КУРС ГЕОМЕТРИИ. Учебник для 6 — 8 классов неполной средней и средней школы, часть первая, планиметрия.
Перевод Е. И. Карцева.
Государственное Учебно-Педагогическое Издательство — Москва 1936 г.

	Наблюдали за переизданием:
Ответ. редактор *М. А. Рогов.*	Отв. ред. *М. А. Рогов.*
Техред *С. И. Чугин.*	Техред *Рожин Вл.*
Корректор *В. В. Лазарева.*	Корректор *Сидоров И.*

Сдано в набор 7/II 1936 г.; подписано к печати 11/V 1936 г.
Формат $62\times94_{16}$. Тираж 1000 экз.
Изд. листов $12^1/_4$. Бум. л. $9^1/_8$. Авт. листов 14,86.
93176 *тип. знаков на 1 бум. листе.*
Бумага № 2 Каменской бум. фабрики.

Индекс У-2 н. Учгиз № 7793.
Цена без переплета 1 руб. 30 к., переплет 30 коп.
Уполномоченный Главлита Б-22936.

Заказ № 2068.

17-я фабр. нац. книги ОГИЗ'а РСФСР треста «Полиграфкнига»
Москва, Шлюзовая наб., д. № 10.

ВВЕДЕНИЯСЬ.

ГЕОМЕТРИЯНЬ ОСНОВНОЙ ШАРЬХКЕДЕМАТ.

1 §. Физическай и геометрическай теласъ.

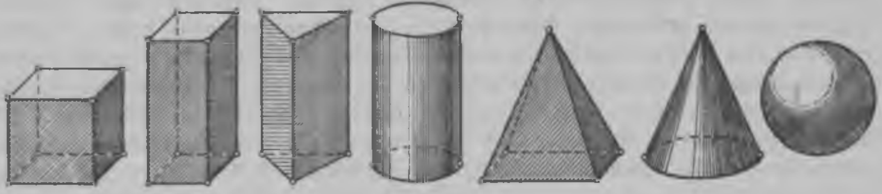
Минь перьфканок ащи сембе предметтнень, или телатнень, ули фкя марстонь свойстваснa, а именна — синь сембе заньцихть пространствань определённай пяльks. Тяконь пингста эрь телать улихть лама соньцень физическай свойстванза, конатнень коряс сон содави лият телатнень эзда. Физическай тяфтама свойствакс лувондовихть: телать сталмоц, сонь массац, непроницаемостец, упругостец, тюсец (окраскац) и лиятне, конат ащихть телать веществанц эзда. Физическай свойствада башка эрь телать улихть соньцень лангстонь (внешняй) свойстванза, а именна — формац и ункстама ширец (размероц); нят свойстватненьди мярьгихть телать геометрическай свойстванза.

Телать физическай свойстванзон тонадкшесазь естественнай наукатне: физикась, химиясь и ст. тов. Телать геометрическай свойстванзон, сонь форманц и ункстама ширенц, конат улихть соньцень эрь телать и конатнень вельде фкя теласъ содави омбоцеть эзда, тонадкшесыня геометриясь, башка телать соньцень физическай свойстванзон эзда; сяс сяньди, кие тонадкшесы геометриять, фкя питнец — телать форманзон и сонь геометрическай свойстванзон тонадкшемс сявф кубсь ули ли кшниста или валазяста лаксеф кевста, шарсь резиновай или точиндаф пакарьста, призмась глянцянь или шуфтонь и ст. тов.

Штоба сяда цебярьста шарьхкедемс перьфканок ащи телатнень формаснон, геометриянь тонафнити эряви маштомс аф шарфнемс эсь мяленц телатнень физическай свойстваснон лангс и тонадома шарфнемс эсь мяленц телатнень аньцек фкя свойстваснон лангс — синь формаснон лангс. Эряви мяляфтомс, што формась аф явфтови телать соньцень свойстванзон эзда и што геометриясь телать форманц тонафнемста явфнесы тя формать, сявеньдсы перьфканза пространстваса ащи действительнай телать эзда башка. Аньцек лама сядот кизонь опытонь и упражнениянь вельде ломаньсь тонадсь арьсема отвлечённай формаса, тонадозень синь особенностьснон и нолясыня тевс башка форматнень свойстваснон реальнай действительностьса: техникаса, производстваса.

Лисеньди, геометриясь тонафни аф физическай тела сембе соньцень физическай свойстванзон мархта, а стама тела, конань бта аш кодамовок физическай свойстванза и кона ванфтозень ся действительнай физическай телать аньцек форманц и размерэнзон, конань эзда арьсезь ащихть башка сонь физическай свойстванза. Тяфтама телатненьди мярьгихть геометрическай телат. Минь содасаськ, што всякай физическай телась заньци пространствань определённай пялькс, сяс ули кода мярьгемс, што **геометрическай телась арси пространствань пяльксокс, конань заньцесы физическай телась, лиякс мярьгемс — геометрическай телась — тя пространствань сембе шире́ста перяф пялькс**.

Геометрическай телать, кода и физическай телать, улихть колма ункстама ширенза: кувалмоц, келец и серец или эчкец. Кда телать эзда явфтама кодамовок пялькс, эста телать тя пяльксоц ули станя жа тела. Сяньди, кона явфтсы телать перьфканза ащи пространстват эзда и лия телатнень эзда, мярьгихть сонь лангоц. **Телать границац ули сонь лангоц.**


куб брус призма цилиндра пирамида конус шар

1 тяш.

Перьфканок минь няеньдтяма всякай лаца лангт, конатнень формасна содсевихть телать форманц коряс. Кепетьксоньди сявемс, класснай доскать, моркшть, ведаркать, кофкять, шарть, цилиндрать, конусть лангсна аф фкят и ащихть аньцек телать форманц эзда.

Телать лангонц ули кода явомс пяльксова, и тя эрь пяльксоц станя жа арси лангокс.

1-це тяштьксса няфтьфт разнай формаса телат: куб, видеужексонь параллелепипед, или брус, призма, цилиндра, пирамида, конус, шар. Нят телатнень эзда фкятнень — кубть, брусть, призмать, пирамидать, лангсна лапшт (плоскайхть), омбоцетнень, кепетьксоньди сявемс — шарть — лангсна кичкорхт, колмоцетнень — цилиндрать, конусть — лангсна лапшт и кичкорхт.

Лангть улихть кафта ункстама ширенза: кувалмоц и келец. Лангть границанцты, лиякс мярьгемс ся вастти, коса телать лангонц фкя пяльксонц туркс ётай омбоце пяльксоц, мярьгихть китькс. **Лангть границац ули китькссь.** Китьксть ули аньцек фкя ункстама ширец — кувалмоц. Ванцаськ 1-це тяштькссга кубть. Кубть рёбрац тя ули сонь кафта гранензон фкя-фкянь туркс ётама китькссь, конатнень эзда эрь граньсь ащи кубть марнек лангонцты пяльксокс.

Китькксть ули кода явомс пялькксова и сонь эрь тя пялькксоц ули китькс.

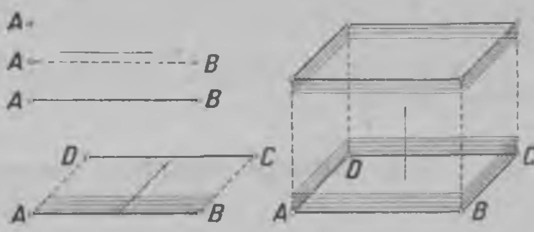
Китькксть границац ули точка. Точкать аш ункстама ширенза. Сон арси кафта или сяда лама китькксонь фкя-фкянь туркс ётама вастокс. Тяфта, 1-це тяштькссa кубть пряц арси колма китькксонь фкя-фкянь туркс ётама вастокс. Ланкнень, китькснень и точкатнень ули кода няемс аньцек телань лангста; башка синь ашет; кда минь геометрияса корхтатама ланкнень, китькснень и точкатнень колга, кода мезеньгя башка ащинь колга, ся аньцек сяс, што шарьхкедькшесайнек синь телатнень эзда башка, кода бта телатнень эзда сявфста.

Телати, лангти, китькксти и точкати мярьгихть **геометрическай образт**.

2 §. Кода движениянь вельде тиевихть геометрическай образт.

Точкаса тяшнесазь пространстваса определённай вастть, ули ли тя вастсь телать лангса или телать потмоса, лангть ланга ётафтф китькксть лангса, или арьсемань коряс телать эзда башка китькс лангса.

Кда точкась пространстваса ётни вастста-вастс (2 тяш.), аф лотксезь полафнесы эсь вастонц и тяфта сон кода бта тяшти кодама-кодама китькс; сяс корхтайхть: *китькссь — вастста-вастс ётни точкань след.* Кда сявемс ёмла толу цятконя, кона няеви валда точкакс и сонь вишкста яфиямс шобда вастса, эста тейнек няеви сонь молемац стама китькксокс, кона арси сембе сят положениятнень следкс, конаса цятконясь уленьди пространствава молемстонза. Тяфта жа пространствава вастста-вастс китькксть молемста тиеви лангсь (2 тяш.), кда китькссь моли аф эсь кувалмонц коряс. Вишкста шары шарыть спицанза кода бта арсихть фкакс и няевихть лангокс.



2 тяш.

Лангть движениянц вельде тиеви тела, кда лангсь моли аф эсь васеньце положениянц коряс (2 тяш.).

Кругсь эсь диаметранц перьф шаромстонза няеви шаркс.

3 §. Кодамот улихть китькст и лангт.

1. Телатнень лангса уленьдихть виде и кичкора китькст.

Сявемс, кубть кафта гранензон фкя-фкянь туркс ётама вастокс арси сонь рёбрац — виде китькс; цилиндрать боковь лангонц и сонь основаниянц фкя-фкянь туркс ётама вастокс арси окружностьсь — кичкора китькс.

Виде китькстъ азондомс аш кода. Виде китькстъ колга шарьхкедемать эряви лувомс основнойкс; тя шарьхкедемать ломаньсь получандакшесы видеста опытста.

Уленьдихть горизонтальнай и вертикальнай виде китькст. Горизонтальнай виде китькстъ направлениянц няфнесы сетьме ведь лангса уеньди виде байдексь; вертикальнай виде китькстъ направлениянц няфнесы отвессь — ся пикскять ащемац, конань пес сотф ёмла гиряня и ащи алу нюрьгезь. Вертикальнай виде китькссь — тяфтама виде китькс, кона моли масторть центранц шири.

2. Телань лангт уленьдихть лапшт и кичкорхт.

Лапш ланга, или видеста мярьгемс *ланга*, минь мярьгтяма тяфтама *лангоньди, конань улихть тяфтама свойстванза, што сонь кафта любовай точканзон ланга ётай виде китькстъ сембе точканза токайхть эзонза.*

Лапш лангонь кепетьксокс ули кода сявемс цебярьста иньзедьф моркш лангть: лангозонза путф линейкать рёбрац, кона шири дяк ладя ули плотна моркш лангть мархта и ётковаст аф няеви валдсь.

Кубть граненза, цилиндрать и конуснень основаниясна арсихть лапш лангокс. Шарть лангоц, цилиндрать и конусть бокстонь лангсна кичкора лангт: кда линейкать рёбранц путомс шарть лангс, эста сон, кона шири дяк ладя, аф токай мархтонза; кда линейкать рёбранц путомс цилиндрать или конусть лангс, эста сон аф сембе шири ащемста ули плотна нят телатнень лангснон мархта.

Горизонтальнай лангокс лувондсазь аф оцю кядьгса сетьме ведьть лангонц.

4 §. Мезьти тонафты геометриясь и кода явондови сон.

1. Геометрическай обраснень: точкать, китькстъ, лангть, телать ули кода тонадкшемс или фкя-фкянь эзда башка или фкя-фкянь мархта определённай сочетанияса. Кафцьке лаца тонафнемста геометрическай обрасненьди станя жа мярьгихть геометрическай фигурат, а эрь геометрическай образти, кона ащи фигурать эса, мярьгихть сонь элементоц.

Колмужекссь — геометрическай фигура, сонь ширенза и ужênза — фигурать элементонза, колмужекстъ элементонза; кубсь — геометрическай тела, сонь граненза, рёбранза, уженза арсихть кубти элементокс.

2. Мезе стамсь геометриясь? Геометриясь тяфтама наука, кона тонадкшесынь геометрическай — лапш и пространственнай — фигуратнень признакснон и свойстваснон.

Лапш фигура мярьгихть тяфтама фигуратненьди, конатнень сембе точкасна ащихть аньцек фкя лапш лангса; кепетьксоньди сявемс колмужекссь, фкя-фкянь туркс ётай кафта виде китькснe, окружностьсь — тят лапш фигурат.

Пространственнай фигурат мярьгихть тяфтама фигуратненьди, конат сембе эсь пяльксснон мархта фкя лапш лангс аф тяльгихть. Пространственнай фигурань или телань кепетьксокс улихть фкя-фкянь туркс ётай кафта лапш лангт, кубсь, призмась, цилиндрась, шарсь и ст. тов.

Геометриять явондсазь кафта пялькскова — планиметриясь, кона тонадкшесынь лапш фигуратнень свойстваснон, и стереометриясь, кона тонадкшесынь пространственнай фигуратнень или телатнень свойстваснон. Геометриясь, кода всякай наукатне, тиевсь и кассь ломаньтнень хозяйстваса работамстост опытонь и ванондомань вельде. Геометрия вальсь — тя греческай вал, кда сонь ётафтомс, лиси модань унксема.

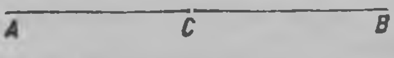
3. Геометриять кармасть содамонза минь эранькен ушедомда лама сядот кизода сяда ингеле. Шинь стяма ширень культурнай народтне, вавилонянтне и египтянтне, лама содасть геометриять эзда, конатнень синь тонадозь модань участкань унксемста, всякай постройкань строямста и Шить, Ковть, тяштьтнень движенияснон тонадкшемста. Геометриясь научнайста сяда пяк кассь Грецияса. Греческай васеньце математикне египтянтнень учениксна. Синь нингя минь эранькен самда 6 сядот кизода ингеле содсезь геометрическай фигуратнень лама свойстваснон; синь эсь опытснон эзда явф простой геометрическай обраснень колга сведениятнень вельде музь лият, сяда сложнай геометрическай обраснень свойстваснон. Евклидть эряма пингенц самс, кона эрясь 3 сядот кизода минь эранькен ушедомда ингеле, пуромсь пяк лама содсемат геометрическай обраснень колга, и Евклидсь тись стама оцю тев, што сон сёрмадсь геометриять колга пяк лац арьсеф руководства — „Начало“, конаса тя наукань основатнень кочказень фкя цебярь системас.

I. ВИДЕ КИТЬКССЬ.

1 §. Виде китькссь. Лучсь. Керфкссь. Синнеф китькссь. Кичкора китькссь.

Виде китькссь — тя сембе китькснень эзда сембеда простойсь. Виде китьксонь кепетьксокс ули пяк кемекстаф сюресь, виде линейкань рёбрась; шить лученза, конат ётайхть шобда кудс ёмла варянява, молихть виде китьксокс.

3 тяш.



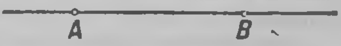
4 тяш.

Виде китькстъ ули кода шарьхкедемс кафцьке шири пефтома кувалгафтфокс.

Виде китькстъ тяшнесазь латинскай алфавитонь кафта оцю букваса. 3-це тяштьксса няфтьф *AB* виде китькс.

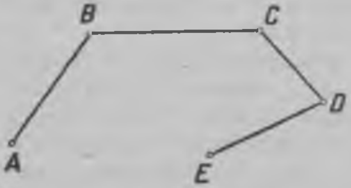
Кда *AB* виде китькстъ лангста конавок вастса сяфтяма *C* точка, эста тя *C* точкась явсы *AB* виде китькстъ кафта лучева: *CA* и *CB* (4 тяш.).

C точкась ули лучть ушедома (начальнай), или лисема (исходнай), точкац и сёрмадкшесазь сонь ингели. Лучть ули кода кувалгафтомс пефтома аньцек фкя шири. Тянь коряс лисеньди, *CA* лучсь шарфтаф *C* точкать эзда кержи шири, а *CB* лучсь — види шири. Кафта *CA* и *CB* лучне арсихть фкя виде китьксокс.



5 тяш.

Кда виде китькстъ лангса конавок вастса сявемс кафта *A* и *B* точкат, эста виде китькстъ ся пяльксонцты, кона ащи нят точкатнень ёткса, мярьгихть керфкс. Виде китьксонь керфкстъ тяшнесазь кафта оцю букваса, конатнень сёрмадкшесазь сонь певанза: *AB* (5 тяш.) тя виде китьксонь керфкс. Сидеста керфкстъ тяшнесазь фкя ёмла букваса, кепетьксоньди сявемс *a* букваса; эста *a*-сь няфтьсы керфкстъ кувалмонцка стама единицаса, кодамоса сявф масштабсь.

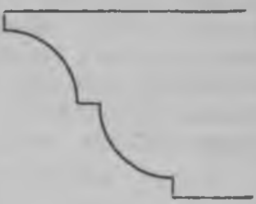


6 тяш.

Ся китькстъ, кона тиф виде китьксонь керфксста и керфксне ащихть аф виде китьксонь кувалмоса, мярьгихть синнеф китькс (6 тяш.). Сят керфксненьди, конатнень эзда тиеви синнеф китькссь, мярьгихть сонь ширенза, или звенанза. Синнеф китькстъ тяшнесазь оцю букваса, конатнень сёрмадкшесазь сонь ширензон пева, кепетьксоньди сявемс *ABCDE* синнеф китькссь.

Кичкора китькс мярьгихть ся китькстъ, конань эса аш виде китьксонь фкявок керфкс (7 тяш.).

7 тяш.



8 тяш.

Шовор китькс мярьгихть ся китькстъ, конань эса улихть виде китьксонь керфкст и кичкора китьксонь пяльккст (8 тяш.).

2 §. Виде китькстъ аксиоманза.

1. Виде китькстъ ули кода пефтома кувалгафтомс кафцьке шири.

Тя свойствада башка виде китькстъ улихть нингя лиятка свойстванза. Тяштьсаськ лапш лангс кафта *A* и *B* точкатнень вастснон (9 тяш.). Лац тиф линейкань вельде *A* и *B* точкатнень ланга тяштьтяма виде китькс. Кда карматама сяка жа кафта *A* и *B* точкатнень ланга тяштема омбоце виде китькс, эста сон тяштеви васеньце китькстъ ланга, тянь коряс лисеньди, што

9 тяш.

2. кафта максф точка ланга ули кода ётафтомс виде китькс и аньцек фкя. Тя — виде китькстть омбоце свойствац; сон няфнесы, што всякай виде китькст положенияц мушендови кафта точкань вельде; сяс кда путомс кафта виде китькснень станя, штоба фкя виде китьксонь кафта точкатне вельхтялезь омбоце виде китьксонь кафта точкатнень, эста кафцьке виде китьксне фкя-фкянь вельхтяйхть сембе точкасост. Кда кафта виде китькснень ули аньцек фкя марстонь точкасна, эста синь ётайхть фкя-фкянь туркс.

Фкя-фкянь туркс ётай кафта AB и CD виде китькснень марстонь точкаснонды мярьгихть фкя-фкянь туркс ётама точка.

Фкя точкань ланга ули кода ётафтомс пефтома лама виде китькст. Сембе тяфтама виде китькснень совокупностьсна арсихть виде китьксонь пучёкокс.

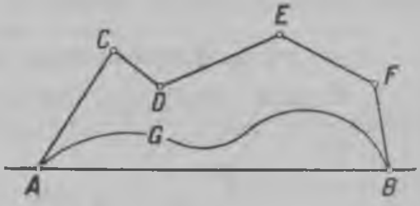
Пучёконь сембе виде китькснень марстонь точкаснонды мярьгихть пучёкть центрац.

Кда сявемс лапш лангса кафта A и B точкат, ётафтомс лангаст виде, кичкора и синнеф китькст, эста A и B точкатнень ёткса фкя пингста кармай улема AB керфкссь и AGB кичкора китькссь и арсихть $ACDEFB$ синнеф китькстги пекс (10 тяш.). Няеви, што AB керфкссь AGB кичкора китькстть и $ACDEFB$ синнеф китькстть коряс сяда нюрьхкяня, тяста лисеньди:

3. виде китькст керфксоц ули виде китькст кафта точканзон ёткса сембеда нюрьхкяня расстояниясь.

Виде китькст тя свойстванц коряс кафта точкань ёткста вастть ункснесазь виде китьксонь кувалмос, кона ётай нят кафта точкатнень ланга. Керфкст кувалмоц няфнесы сонь пестонь точканзон ёткснон.

4. Виде китькст, кода геометрическай фигурань, улихть лама свойстванза, конатнень видесна муфт опытонь вельде, кона опыттнень пуроптозь ломаньтне перьф ащи мирть явлениянзон мельгя эрь шиня ванондозь и практическай кизефкснень арьсезь.



10 тяш.

Тяфта геометрическай фигуратнень сембеда эрявикс свойстваснон колга арьсемати, конат муфт эряфса тевень коряс, мярьгихть аксиома. Аксиоматнень примсесазь апак няфттть (доказательствафтома) и арсихть геометриянь теоремань няфтемс основакс. Виде китькст тят свойстванза — аксиомат:

1) виде китькст ули кода кувалгафтомс кафцьке шири пефтома;

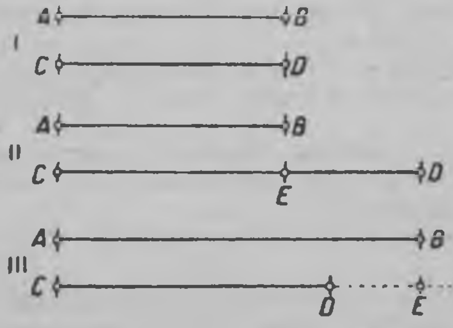
2) максф кафта точкань ланга ули кода ётафтомс виде китькс и аньцек фкя;

3) виде китькст керфксоц — кафта точкатнень ёткса сембеда нюрьхкяня расстояниясь.

3 §. Керфкснень серьстамасна.

Виде китьксНень кувалмоснон серьстамс аш кода, сяс мес виде китьксНень ули кода кувалгафтомс кафцьке пяли пефтома. Фкя-фкянь мархта серьставихть аньцек керфксне.

Серьстамс кафта керфкснень — тя лисеньди содамс, ровнат синь или аф ровнат, и кда аф ровнат, эста содамс, кона сяда кувака. Керфкснень серьснесазь фкя керфксть омбоцеть лангс путнезь.



11 тяш.

Задача. *Серьстамс фкя-фкянь мархта кафта AB и CD керфкснень* (11 тяш.).

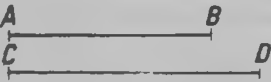
Тиемац. *AB* керфксть путсаськ *CD* керфксть лангс станя, штоба *A* точкась вельхтяльхце *C* точкать и штоба *AB* керфкссь туль *CD* керфксть ланга. Кда *B* точкась вельхтясы *D* точкать — *CD* керфксть пенц, эста *AB* и *CD* керфксне ровнат. Керфкснень тя равенстваснон тяшнесазь тяфта: $AB = CD$.

Кда *B* точкась вельхтясы *CD* керфксть *E* точканц, кона ащи *C* и *D* точкатнень ёткса, эста *AB* керфкссь *CD* керфксть коряс сяда ёмла. Сёрмадкшесазь: $AB < CD$.

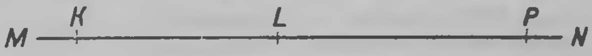
Кда *B* точкась арай *CD* керфксть кувалгафтфонц лангс кодамовок *E* точкас, эста *AB* керфкссь *CD* керфксть коряс сяда оцю. Сёрмадкшесазь: $AB > CD$.

4 §. Керфкснень мархта действиятне.

1. Задача. *Прибавамс AB и CD керфкснень*; тят керфкснень кувалмосна максфт 12 тяштьксса.

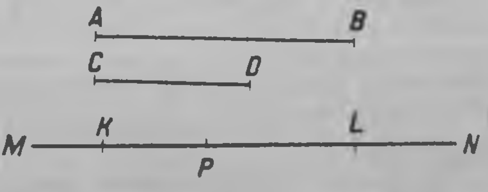


12 тяш.



13 тяш.

Тиемац. Тяштьтяма *MN* виде китькс (13 тяш.). Тя виде китькстъ лангста кодамовок *K* точкаста циркульса ункстатама керфкс $KL = AB$, а тяда меле *L* точкаста ункстатама керфкс $LP = CD$ станя, штоба васеньце керфксть пестонь *L* точкац улель омбоце керфксти ушедома пекс. *KP* керфкссь ули *AB* и *CD* керфкснень суммасна. Сёрмадкшесазь: $AB + CD = KL + LP = KP$.



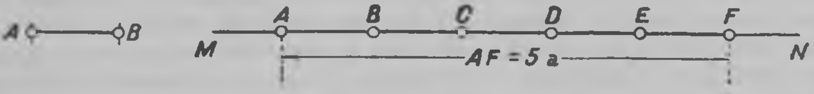
14 тяш.

2. Задача. *AB керфксть эзда сявемс CD керфксть*; тят керфкснень кувалмосна максфт 14-це тяштьксса.

Тиемац. MN виде китькстъ кувалмос ункстатама керфкс $KL=AB$ и тяда меле L точкать эзда мекширя ункстатама керфкс $LP=CD$; керфкссь $AB-CD=KP$.

3. Задача. *AB керфксть касфтомс ветексть, лиякс мяргемс, сявемс сонь прибавави лувксокс 5-ксть.*

Тиемац. MN виде китькстъ кувалмос ункстасаськ фкяфкянь мельгя максф AB керфксть 5-ксть. $5\,AB$ керфкссь ули ровна AF (15 тяш.).



15 тяш.

4. Задача. *Максфт колма a, b и c керфкст. Тиемс $x=3a+2b-4c$ керфкс.*

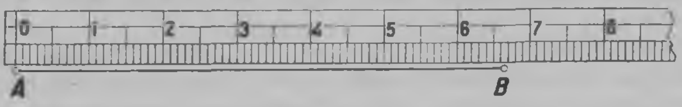
Васенда кодамовок виде китьксонь кувалмос тихтяма керфкс, кона ули ровна $3a$, сяда меле тейнза прибавасаськ $2b=b+b$ керфксть и тяда меле эздонза сявсаськ нилексть c керфксть. Задачась ули кода тиемс аньцек, кда $3a+2b>4c$ или кда $3a+2b=4c$. Мекпяльдень случайста $x=0$.

5. Керфксть керфкс лангс явомать, а станя жа керфксть ровна и аф ровна пяльксова явомать ванцаськ башка сяда меле.

5 §. Керфкснень ункснемасна.

Ункстамс керфксть — лисеньди содамс, мзярокстъ эсонза ули омбоце керфкссь, кона сявф единицакс. Керфксонь ункснемс единицакс ули кода сявемс кодама кельк керфкс. Но керфкснень ункснесазь кувалмонь путф ункстамаса: метраса, сантиметраса, миллиметраса.

Штоба ункстамс AB керфксть, кувалмованза путнесазь кувалмонь ункстама сявф единицать. Кда AB керфксть кувалмос



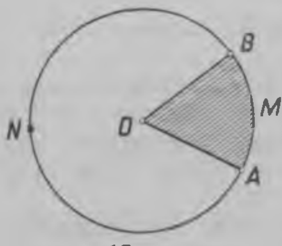
16 тяш.

кувалмонь ункстамс кочкаф единицась путови снярокстъ, што лиси целай лувкс, эста тя лувкссь няфтьсы, мзяра кувалмонь ункстама единицада ули керфксть эса. Кда кувалмонь ункстама кочкаф единицась аф путови AB керфксть кувалмос целай лувксокс и мзяровок ляды, эста тя лядыксть эряви ункстамс сяда ёмла кувалмонь ункстамаса, кда нингя мзяровок ляды, сянь ункстасазь нингя сяда ёмла кувалмонь ункстамаса и ст. тов.

Лияста лиси тяфта, што сявф кувалмонь ункстаматнень эзда фкявок, а станя жа кодамовок пялькссна аф путовихть целай лувксокстъ ся керфксть кувалмос, кона эряви тейнек ункстамс, эста керфксть кувалмонц ункснесазь приближённайста и кода можна сяда точнайста. 16-це тяштьксса AB керфкссь 6,5 *см* коряс сяда кувака и 7 *см* коряс сяда нюрьхкяня; приблизительна эсонза 6,7 *см*. Сёрмадкшесазь: $AB \approx 6{,}7$ *см*.

6 §. Окружностьсь и кругсь.

1. Окружностьсь и кругсь. Кда OA керфксть шарфтомс лапш лангса фкя пенц перьф, кепетьксоньди сявемс O точкать перьф, эста сон шаркстай перьф и арай меки ингельдень вастозонза, эста сонь омбоце пец, A точкась, тяшти кичкора китькс, конаньди мярьгихть окружность. Лапшть ся пяльксонцты, кона перяф окружностьса мярьгихть круг (17 тяш.). O точкати, конань перьф шаркстай OA керфкссь, мярьгихть окружностьть и кругть центрац; OA керфксти мярьгихть радиус и тяшнесазь r или R букваса.



17 тяш.

Эряви азомс, што OA керфксть аф аньцек пестонь A точкац тяшти окружность; O точкать перьф шаркстомстонза керфксть кодама кельк точкац тяшти окружность.

Окружностьть кодама кельк точкац ащи сонь O центранц эзда фкяшка вастса, кона ёткcь ули ровна радиусонц кувалмонцты. Сёрмадкшесазь: $OA = OB = r$.

Окружностьть тиеманц коряс лисеньди, што **окружностьсь арси тя лапш лангса замкнутай кичкора китьксокс, конань сембе точканза ащихть фкяньшка вастса максф точкать эзда — центрать эзда.**

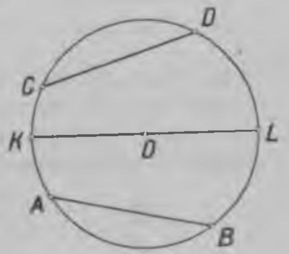
Окружностьсь ули прокс содаф (определённай), *кда максфт сонь радиусоц и центранц вастоц* (положениец).

Окружностьтне фкя-фкянь мархта аф фкят радиусснон кувалмоснон коряс, ков сяда кувака радиуссь, тов сяда оцю окружностьськя. Кафта окружностьтне, конатнень фкянь кувалмоса радиусснa, кда синь путомс фкя-фкянь лангс, синь фкя-фкянь вельхтяйхть и, лисеньди, синь ровнат. Окружностьть тяшнесазь циркульса.

2. Дуга. Мзярда OA керфкссь O точкать перьф шаркстай аф прокс перьф — тии аф целай оборот, а аньцек сонь пяльксонц, эста сонь пец, A точкась, тяшти окружностень пялькс; окружностьть пяльксонцты мярьгихть дуга, а марнек кругть пяльксонцты, кепетьксоньди сявемс AOB, конань тяштьсы OA керфкссь, мярьгихть сектор. AOB-сь — сектор (17 тяштьксcь). „Дуга“ валть сёрмадкшесазь $\smile$ тяштеняса. $AB\smile$ сёрмадфть морафнесазь: AB дугась. Мзярда окружностьть лангс тяштьтяма кодамовок кафта точкат, кепетьксоньди сявемс A и C, минь окружностьть явсаськ кафта пяльксова, кафта дугава, конат сяда сидеста уленьдихть аф ровнат. Штоба няфтемс, кона дугать колга корхтайхть, сонь тяшнесазь аф кафта, а колма букваса, конатнень эзда фкять сёрмадкшесазь дугать песа ащи букватнень ёткс, и сёрмадкшесазь: $AMB\smile$ (17 тяш.). Кда апак няфтть, окружностьть сяда оцю или сяда ёмла AB дугац, эста сонь сёрмадкшесазь аньцек кафта букваса: $AB\smile$, тяса эряви шарьхкедемс сяда ёмла дугать.

Фкя окружностень или кафта ровна окружностень кафта дугатне эста ровнат, кда фкя-фкянь лангс путомстост синь пестонь точкасна фкя-фкянь вельхтяйхть. Кда AB дугать путсаськ DC дугать лангс (18 тяш.) и A точкась арай D точкать лангс, а B точкась — C точкать лангс, эста $AB\smile = DC\smile$.

3. Хордась. CD керфксти, кона ётай окружностьть кафта точканзон ланга, мярьгихть хорда; хордась кемекснесы дугать; окружностень эрь дугати соответствует определённай хорда. Хордась окружностьть явсы кафта пяльксова (18 тяш.). Окружностьть центранц ланга ётай KL хордати мярьгихть диаметра. Окружностьть эса ули кода ётафтомс аф лувомшка лама диаметрат. Окружностьть диаметранза эсь ётковаст ровнат и эрь диаметрась ровна кафта радиусоньди. Диаметрась окружностьть явсы 2 пялеокружностева, а кругть явсы 2 пялекругова.



18 тяш.

Фкя и сяка жа окружностьса или ровна окружностьса ровна хордатне кемекснихть ровна дугат. Афкукс, кда AB и CD дугатне фкя фкянь лангс путомстост (18 тяш.) фкя-фкянь вельхтяйхть, эста вельхтяйхть синь пестонь точкасновок, а тянь коряс лисеньди, што фкя-фкянь вельхтяйхть синь AB и CD хордасновок, конат ащихть нят точкатнень ёткса. Тяфта жа виде ся, што дугатне улихть ровнат, кда ровнат тейст соответствующай хордатне. Тя пингста мяляфтсазь, што серьсневихть хордатнень эса кемекстави кафта дугатнень эзда либо сяда ёмлатне либо сяда оцюфне.

4. Дуговой градуссь. Окружностьть явондсазь 360 ровна пяльксова, 360 ровна дугава; эрь тяфтама дугати мярьгихть дугань градус и тяшнесазь ёмла кружоконяса, конань сёрмадкшесазь дугать градусонзон няфти лувксть види ширезонза, кепетьксоньди 360°, или 180°, или 90°. Окружностьса 360°, пялеокружностьса 180°, окружностьть нилеце пялькссонза 90°.

Дугань эрь градусть явондсазь 60 ровна пяльксова и эрь пяльксти мярьгихть дугань минута; „минута“ валть сёрмадкшесазь ′ тяштеняса. 30′ сёрмадфть морафнесазь: 30 минутат.

Дугань эрь минутать явондсазь 60 ровна пяльксова и минутать эрь тяфтама пяльксонцты мярьгихть дугань секунда. Секундать сёрмадкшесазь ″ тяштеняса. 45″ сёрмадфть морафнесазь: 45 секундат. 90°30′20″ сёрмадфть морафнесазь: 90 градуст 30 минутат 20 секундат.

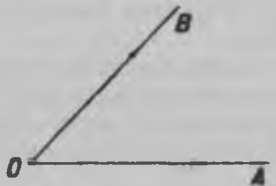
II. УЖЕТНЕ.

1 §. Ужесь и сонь тяшнемац.

1. *Кафта OA и OB лучне, конат лисихть фкя и сяка жа O точкаста, фкя-фкянь мархта аф фкят сянь пяльде, што*

молихть аф фкя шири и тиихть стама фигура, конаньди мярьгихть уже (19 тяш.).

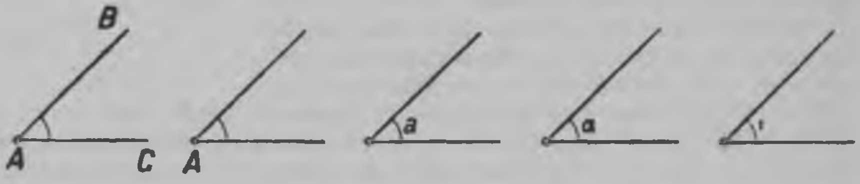
О точкати мярьгихть ужеть прянц (вершинац), а *ОА* и *ОВ* лучненьди — ужеть ширенза.



19 тяш.

Ужеть тяшнесазь колма оцю букваса, конатнень эзда фкять сёрмадкшесазь ужеть прянц тейс, а лият кафттнень — сонь ширензон лангс. „Уже" валть сёрмадкшесазь $\angle$ тяштеняса; ужеть прянц тейста буквать азондсазь и сёрмадкшесазь кафта лият букватнень ёткс.

ОА и *ОВ* лучнень ёткста ужеть ули кода сёрмадомс кафта лаца: $AOB\angle$ или $BOA\angle$. Сидеста ужеть сёрмадкшесазь аньцек фкя оцю букваса, конань тяшнесазь ужеть прянц тейс, эста кда сяка прять тейса аш лият ужет. Станя жа ужеть тяшнесазь греческай или латинскай алфавитонь фкя ёмла букваса или цифраса; тяфта тяштемста буквать или цифрать сёрмадкшесазь ужеть потмос (20 тяш.).

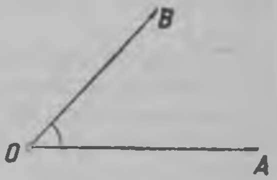


20 тяш.

2. Ванцаськ *ОА* лучть, кона шары эсь *О* ушедоманц перьф (21 тяш.). *ОА* лучсь шаромстонза апак лотксек полафнесы эсь вастонц, васеньце тума вастстонза ётни кодамовок од *ОВ* положенияс и тяфта тии $AOB\angle$.

Ужесь арси лучть ушедома точканц перьфка шаркстоманц ункстамакс.

3. Кафта фкя-фкянь туркс ётай *АВ* и *CD* виде китькснe ширемфт фкя-фкянь шири и тиихть ниле ужет, и эрь ужеть величинац ащи сянь эзда, конашкава ширемф фкя виде китьксcь омбоцети.



21 тяш.

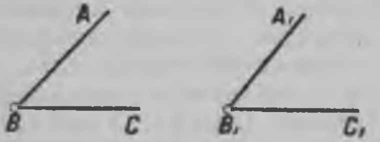
Корхнихть: *ужесь няфтьсы фкя виде китькстъ омбоцети ширемфонь степененц.*

Ужеть величинац аф ащи сонь ширензон кувалмоснон эзда.

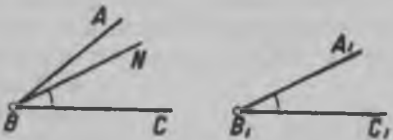
2 §. Ужетнень серьстамасна. Ужетнень равенствасна и афравенствасна.

1. Максфт кафта ужет: $ABC\angle$ и $A_1B_1C_1\angle$ (22 тяш.). Штоба синь серьстамс фкя-фкянь мархта и мумс, ровнат синь или аф ровнат и кона эздост сяда оцю, путнесаськ синь фкя-фкянь лангс.

$A_1B_1C_1\angle$ путсаськ $ABC\angle$ лангс станя, штоба B_1 прясь вельхтяльхце B прять и B_1C_1 ширесь туль омбоце ужеть BC ширенц кувалмос; кда тяфта тиемста B_1A_1 ширесь туй омбоце ужеть BA ширенц кувалмос, эста $A_1B_1C_1\angle$ вельхтясы $ABC\angle$ и лисеньди, што ужетне ровнат. Сёрмадкшесазь: $A_1B_1C_1\angle = ABC\angle$.



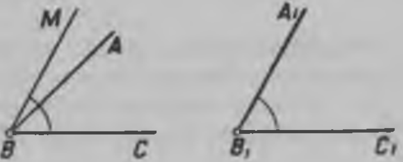
22 тяш.



23 тяш.

2. Кда B_1 и B прятне и B_1C_1 и BC ширетне фкя-фкянь вельхтяйхть и тяда меле B_1A_1 ширесь туй ужеть потмова и арай BN положенияс (23 тяш.), эста $A_1B_1C_1\angle$ аф ровна $ABC\angle$ мархта, сон корязонза сяда ёмла. Сёрмадкшесазь: $A_1B_1C_1\angle < ABC\angle$.

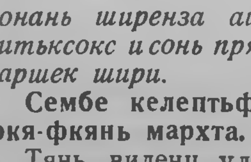
Кда $ABC\angle$ лангс $A_1B_1C_1\angle$ путомста B_1A_1 ширесь туй $ABC\angle$ уше ширьгя и арай BM положенияс (24 тяш.), эста $A_1B_1C_1\angle$ сяда оцю $ABC\angle$ коряс. Сёрмадкшесазь: $A_1B_1C_1\angle > ABC\angle$.



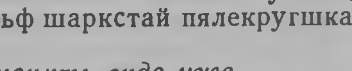
24 тяш.

3 §. Келептьф и виде ужесь.

1. $ABC\angle$ величинац (25 тяш.) ащи сянь эзда, конашкава ширемфт сонь ширенза. Кда ужеть фкя ширенц, кепетьксоньди BA, карматама шарфтома ужеть B прянц перьф, а омбоце BC ширенц кадсаськ сяка вастозонза, эста BA ширесь кармай арсема разнай положенияс: BA_2, BA_3 и ст. тов. BA ширети ули кода арамс и тяфтама BA_1 положенияс, што кармай ащема BC ширети кувалгафтфокс (продолжениякс). Ширетнень тяфта ащемста A_1BC ужети мярьгихть келептьф уже. Лисеньди, *келептьф ужесь тяфтама уже, конань ширенза ащихть фкя виде китьксокс и сонь прянц эзда молихть каршек шири.*



25 тяш.



26 тяш.

Сембе келептьф ужетне ровнат фкя-фкянь мархта.

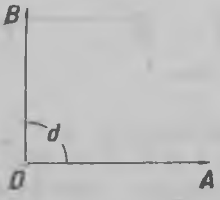
Тянь виденц ули кода проверяндамс фкя келептьф ужеть омбоцеть лангс путозь. Келептьф ужеть ули кода шарьхкедемс OA лучть васеньце и мельце направлениянзон ёткста ужекс, кона лучсь эсь ушедома O точканц перьф шаркстай пялекругшка (26 тяш.).

2. *Келептьф ужеть пяленцты мярьгихть виде уже.*

Виде ужеть тяшнесазь ёмла d букваса (французскай „droit“ валть васеньце буквац, кда ётафтомс тя валть, лиси „виде“).

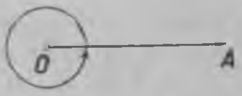
Сембе виде ужетне эсь ётковаст ровнат.

Виде ужесь — OA лучть ушедомань и пестонь направлениятнень ёткста ужесь, кда лучсь шаркстась перьф шаркстомать эзда аньцек нилеце пялькс (27 тяш.): $AOB\angle = d$.



27 тяш.

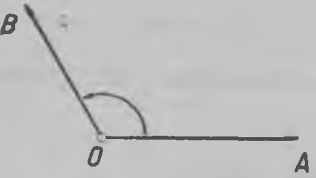
3. Кда OA лучсь шаркстай прокс перьф эсь ушедома O точканц перьфка и тага арай васеньце вастозонза, эста корхтайхть, што OA лучсь ётай пяшксе уже (28 тяш.). *Виде ужесь ровна келептьф ужеть пяленцты, сяс келептьф ужеть эса кафта виде ужет.* Сёрмадкшесазь: $AOA_1\angle = 2d$ (26 тяш.).



28 тяш.

Пяшксе ужесь ровна кафта келептьф, или ниле виде уженьди; пяшксе ужесь ровна $4d$.

4. Ужесь, конань тиезе ся лучсь, кона шаркстась эсь ушедома точканц перьф оборотть нилеце пяльксонц коряс сяда ёмласта (21 тяш.), виде ужеть коряс сяда ёмла, мярьгихть тейнза оржа уже. Ся ужети, кона виде ужеть коряс сяда оцю, но сяда ёмла келептьф ужеть коряс, мярьгихть ношка уже (29 тяш.).



29 тяш.

5. *Виде ужеть сявеньдьсазь ужень ункстама единицаньди.*

Ужетнень оцюснон лувондсазь виде ужеть пялькссa. Кепетьксоньди сявемс:

1) $0{,}3d$, $\frac{1}{2}d$, $\frac{2}{3}d$ — оржа ужет, сяс мес эрь ужесь виде ужеть коряс сяда ёмла;

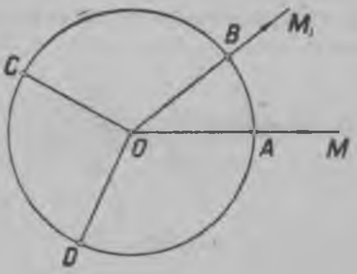
2) $1{,}5d$, $\frac{5}{4}d$, $\frac{11}{8}d$ — ношка ужет, сяс мес эрь ужесь сяда оцю виде ужеть коряс и сяда ёмла келептьф ужеть коряс;

3) $2{,}3d$, $\frac{11}{4}d$, $\frac{23}{8}d$ и ст. тов — стама ужет, конат келептьф ужеть коряс сяда оцюфт.

4 §. Центральнай ужесь и сонь свойстванза.

1. OM лучсь эсь ушедома O точканц перьф шаромста тяшти $MOM_1\angle$ (30 тяш.), OM лучть лангста сявф кодамовок A точкась марса лучть мархта шаромста тяшти окружностень AB дуга, кона окружностьть радиусоц ровна OA. Ванцаськ $AOB\angle$: сонь O пряц ащи окружностьть центраса, тейнза ширекс ащихть OA и OB радиусне, сонь ширензон ёткса ащи сяка жа окружностьть AB дугац.

Ся ужети, конаньди прякс ащи окружностьть центрац, мярьгихть центральнай уже. Эрь центральнай ужети соответствует определённай дуга. Шарьхкедеви, што и эрь дугати соответствует определённай центральнай уже, кона тиеви, кда дугать пензон радиусса поладомс центрать мархта.



30 тяш.

2. Центральнай ужетнень и каршесост ащи дугатнень улихть тяфтама свойствасна.

Фкя и сяка жа окружностьса или ровна окружностьса:

1) ровна центральнай ужетнень каршеса ащихть ровна дугат;

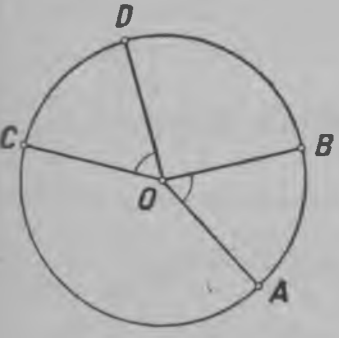
2) ровна дугатнень каршеса ащихть центральнай ровна ужет.

Сяфтяма круг, конань центрац O точкать эса (31 тяш.) и центральнай кафта ровна ужет: $AOB\,\angle$ и $COD\,\angle$. Шарфтсаськ AOB секторть O центранц перьф станя, штоба OA радиуссь вельхтяльхце OD радиусть; эста, мес AOB и COD ужетне ровнат, сяс OB радиуссь вельхтясы OC радиусть, фкя-фкянь вельхтяйхть и AOB и COD секторхнень дугаснон пестонь A и D, B и C точкатневок; кда жа дугатнень пестонь точкатне фкя-фкянь вельхтяйхть, эста, вельхтяйхть фкя-фкянь AB и CD дугатневок.

Сёрмадкшесазь: кда $AOB\,\angle = COD\,\angle$, эста $AB\smile = CD\smile$.

Ровна дугатнень и тейст соответствующай ужетнень свойстваснон сёрмадкшесазь станя:

кда $AB\smile = CD\smile$, эста $AOB\,\angle = COD\,\angle$.



31 тяш.

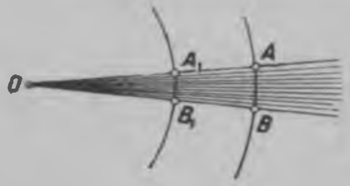
Тя свойствать виденц проверяндакшесазь станя жа фкя-фкянь лангс путозь. Выводсь виде стамовок дуганьди, конат соответствуют фкяньшка радиус мархта кафта разнай окружностень центральнай ровна ужетненьди.

3. Кда окружностьть явсаськ 360 ровна пяльксова и эрь явома точкать поладсаськ центрать мархта, лисихть центральнай 360 ужет, конат эсь ётковаст ровнат, сяс мес эрь ужеть каршеса ащи стама дуга, кона ровна окружностьть $\frac{1}{360}$ пяльксонцты, или дугань фкя градусоньди.

Центральнай ся ужети, конань каршеса ащи фкя градусоньшка дуга, мярьгихть ужень градус. Ужень градуссь явф ужень 60 минутава, а ужень эрь минутась явф ужень 60 секундава. Нюрьхкяняста тяшнесазь ужень градуснень и синь пяльксснон — минутатнень и секундатнень — тяфтама жа тяштеняса, кодамса тяшнесазь дуговой градуснень и синь пяльксснон.

32-це тяштьксса тяштьф $AOB\angle$, кона явф ужень 10 градусова и конань туркс ётафтфт разнай радиусса окружностень кафта дугат, конат окружностьтнень центрасна AOB ужеть O пряса. Тяштькстъ эзда няеви, што дугань градусне аф ровнат и ащихть сянь эзда, конань кувалмоса радиусне.

Окружностьть дуганц эса, мярьгемс $AB\smile$ или $A_1B_1\smile$ эса (32 тяш.), 10° (дугань), а каршесонза соответствующай центральнай ужеть эса 10° (ужень).



32 тяш.

Ся дугать градусонь лувксоц, кона ащи (соответствует) центральнай ужеть каршеса, фкя пингста няфнесы ужеть ужень градусонь лувксонцка.

Пяшксе ужеть, конань пряц ащи O центрать эса, явондсазь центральнай 360 ужева, 360°-ва. Центральнай ужеть эса, кона ровна келептьф ужети, ули 180°. Центральнай ужеть эса, кона ровна келептьф ужеть пяленцты, ули 90°.

Тянь коряс лисеньди, келептьф ужеть пяленц эса 90°, но келептьф ужеть пялец — виде уже, сяс виде ужеть эса 90°.

Ужень фкя градуссь — виде ужеть $\frac{1}{90}$ *пяльксоц.*

4. Ужеть градуснай ункстамас ётафтома таблицась, кона ужесь максф виде ужень пяльксса:

Ужесь видеужень пяльксса лувозь	$\frac{1}{3}d$	$\frac{1}{2}d$	$\frac{2}{3}d$	$\frac{3}{4}d$	$\frac{4}{5}d$	d	$1\frac{1}{3}d$	$1{,}5\,d$	$1\frac{2}{3}d$	$2d$	$3d$	$4d$
Ужесь градусонь ункстамаса лувозь	30°	45°	60°	67°30′	72°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°

5 §. Транспортирсь.

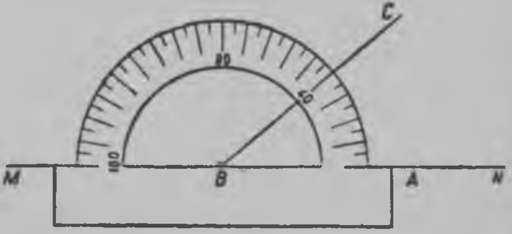
1. Ужетнень ункснесазь стамка приборса — транспортирса. Тя тяфтама пялекруг, конань дугац явф дугань 180 градусова; пялекругть центранц тяшнесазь ёмла керфкяса (33 тяш.).

33 тяш.

Штоба ункстамс максф ужеть, лангозонза путсазь транспортирть станя, штоба транспортирть центрац араль ужеть прянц лангс, а диаметрац араль ужеть фкя ширенц лангс, и ваныхть, транспортирть кона явфонц ланга ётай ужеть омбоце ширец; ся вастста лувкссь, куваня ётай ужеть омбоце ширец, няфтсы мзяра градусда ункстави ужеть эса.

Транспортирса ункснемась ладяф сянь коряс, што центральнай эрь ужеть каршеса ащи стама дуга, конань эса сняра жа градусда и градусонь пялькста, мзяра синь эздост ужеть эсовок.

2. Транспортиронь вельде тиеньдихть ужетка. Тянкса тяштихть *MN* виде китькс (34 тяш.), путсазь сонь лангозонза транспортирть станя, штоба сонь диаметрац вельхтяльхце тя виде китькссть, и ужеть прянц тяштьсазь ся точкаса, коса ащи транспортирть центрац. Тяда меле центрать эзда сявемок транспортирть соответствующай явома точканц ланга тяштихть виде китькс и тяфта лиси эрявикс уже. 34-це тяштькссa $ABC\angle = 40^\circ$.



34 тяш.

3. Окружностьть кувалмоц ащи радиусть кувалмонц эзда, и ков сяда кувака радиуссь, тов сяда оцю ули тяштьф окружностьсь; тянь коряс шарьхкедеви, што дугань фкя градусть кувалмоц, лиякс мярьгемс окружностьть $\frac{1}{360}$ пялькссонц кувалмоц, ащи радиусть кувалмонц эзда и кда полафтомс радиусть кувалмонц, полафты дугань градустькя кувалмоц. Аф тяфта ащи тевсь ужень градусонь тиемста. Ужень градуссь аф ащи радиусть кувалмонц эзда; ужень градуссь аф полафневи, постояннай величина, сон ровна ужеть $\frac{1}{90}$ пялькссонцты.

6 §. Ужетнень мархта действиятне. Прилежащай ужетне.

1. Кда содаф ужетнень градусонь ункстамасна, эста ужень прибавамась и сявемась тиеви и лувозь и тиезь.

1-це задачась. *Мумс тят ужетнень суммаснон и лядыкснон*:

$$ABC\angle = 47^\circ 40' \text{ и } DEF\angle = 30^\circ 23' 45''.$$

Тиемац: 1) $\begin{array}{r} 47^\circ 40' \\ +\ 30^\circ 23' 45'' \\ \hline 78^\circ\ 3' 45'' \end{array}$ и 2) $\begin{array}{r} 47^\circ 40' \\ -\ 30^\circ 23' 45'' \\ \hline 17^\circ 16' 15'' \end{array}$

Ответсь: 1) $ABC\angle + DEF\angle = 78^\circ\ 3' 45''$;
2) $ABC\angle - DEF\angle = 17^\circ 16' 15''$.

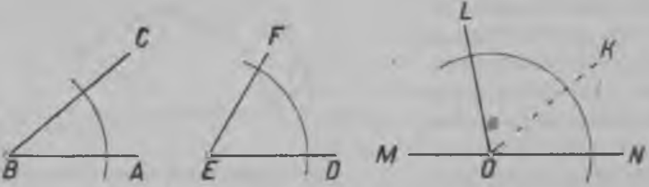
2-це задачась. *Транспортир вельде тиезь мумс ABC и DEF ужетнень суммаснон*; ужетнень величинасна максфт 35-це тяштькссa.

Тиемац. Тяштьтяма *MN* виде китькс и тя виде китькссть кодамовок *O* точканц ваксс тихтяма транспортир вельде

$NOK\angle = ABC\angle$, а тяда меле сявсаськ O точкать ужеть пряньди и OK омбоце ужети фкя ширекс, тихтяма $LOK\angle = DEF\angle$, эста $LON\angle$ ули кафта максф ужетнень вешеньдеви суммасна:

$$ABC\angle + DEF\angle = NOK\angle + KOL\angle = LON\angle.$$

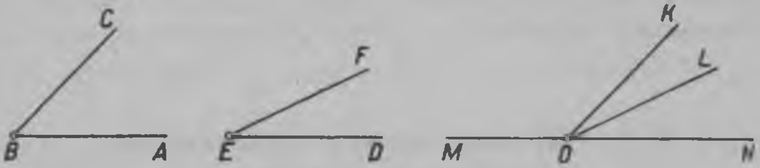
3-це задачась. *Транспортир вельде тиезь мумс ABC и DEF ужетнень разностьснон*; ужетнень величинасна максфт 36-це тяштьксть лангса.



35 тяш.

Тиемац. Тяштьтяма MN виде китькс и сонь лангстонза кодамовок O точкать ваксс тихтяма $NOK\angle = ABC\angle$ (36 тяш.), а сяда меле тяка O точкать перьф и MN виде китькстъ лангс тихтяма $NOL\angle = DEF\angle$, эста $LOK\angle$ ули вешеньдьф разностьсь:

$$ABC\angle - DEF\angle = LOK\angle.$$



36 тяш.

4-це задачась. *$ABC\angle$ ламокстамс колмоксть.*

Тиемац. Задачась тиеньдеви фкя-фкянь мельгя колма ужень путнезь, конат ровнат максф ABC ужети.

2. *Кафта ужетненьди, конатнень ули марстонь прясна и марстонь фкя ширесна и фкя-фкянь аф вельхтяйхть, мярьгихть прилежащай ужет.*

36-це тяштьксса $NOL\angle$ и $KOL\angle$ — прилежащай ужет. $NOK\angle$ и $NOL\angle$ — аф прилежащай ужет.

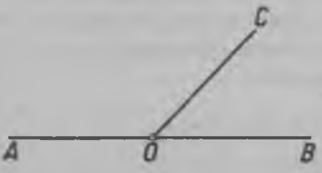
3. Кда ужеть потмова тяштемс виде китькс, кона ётай сонь прянц ланга, эста тя виде китькссь явсы ужеть кафта прилежащай ужева, конат улихть эсь ётковаст или ровнат или аф ровнат.

Виде китьксти, кона явсы ужеть кучкава, мярьгихть ужеть ровна пялькссова явиец, или ужеть биссектрисац.

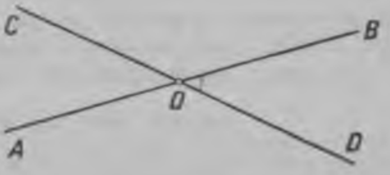
Ужеть ровна или аф ровна пялькссова явоманц ванцаськ башка сяда меле.

7 §. Смежнай ужетне и синь свойствасна. Теоремать колга шарьхкедемась.

1. *Прилежащай кафта ужетненьди* $AOC\angle$ *и* $BOC\angle$ (37 тяш.), *конатнень фкя* OC *ширесна марстонь, а лият кафта* OA *и* OB *ширесна молихть каршек шири, лиякс мярьгемс тиихть фкя виде китькс, мярьгихть смежнай ужет.*



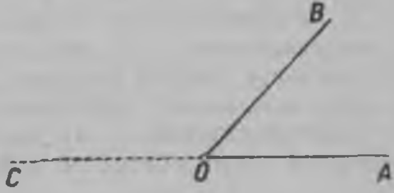
37 тяш.



38 тяш.

Сяфтяма фкя-фкянь туркс ётай кафта AB и CD виде китькст (38 тяш.), синь тиихть ниле ужет, конатнень марстонь прясна ули виде китькснень фкя-фкянь туркс ётама O точкаса. Эрь кафтонь кафта прилежащай ужетне: $AOC\angle$ и $COB\angle$, $COB\angle$ и $BOD\angle$ и ст. тов — смежнай ужет.

Смежнай ужетне тиевихть тяфтаня тиезь: максф $AOB\angle$(39 тяш.): кда кувалгафтомс сонь фкя ширенц, мярьгемс OA-ть, O прять коряс сяда ичкези, эста лиси од $BOC\angle$, кона ули смежнай максф ужети, сяс мес сонь ули мархтонза марстонь O прясна, фкя марстонь OB ширесна и сонь OC ширец арай васеньце ужеть OA ширенц кувалгафтфокс. $AOB\angle$ и $BOC\angle$ — смежнай ужет.



39 тяш.

2. Ули или аш зависимость кафта смежнай ужетнень ёткса? Мусаськ кафта смежнай ужетнень суммаснон: AOB и BOC.

$AOB\angle + BOC\angle = AOC\angle$ — келептьф ужети, кона ровна $2d$, лиякс мярьгемс кафта виде уженьди. Лисеньди, **смежнай кафта ужетнень суммасна ровна $2d$.**

Тят валхнень эса нюрьхкяняста азф смежнай ужетнень свойстваснон колга определённай арьсемась.

3. Смежнай ужетнень свойстваснон колга выводти минь пачкодемя лама арьсемада меле, конат основаннайхть геометрическай содаф фактань лангса.

Геометрическай фигурать свойстванц колга нюрхкяняста азф арьсемати мярьгихть теорема, конань видец кармай улема шарьхкедевиста геометрическай содаф фактань лангс кодамовок няфтемада меле.

Тя арьсемась: „кафта смежнай ужетнень суммасна ровна $2d$“ ули теорема.

Теоремакс станя жа арси тейнек содаф ни арьсемась: „кда центральнай ужетне ровнат, эста ровнат каршесост ащи дугатневок“.

Теоремат токадькшесть арифметикасовок, мзярда минь корхтамя лувкснень свойстваснон колга. Арьсемась: „кда лувкстъ мекельце цифрац чётнай, эста сембе лувкссь лядыксфтома явови кафтова“ ули теорема.

4. Теоремаса улихть:

1. Условиясь, или ся, мезе максф. Станя, „кафта смежнай ужетнень суммасна ровна $2d$“ теоремаса максфт кафта ужет: AOB и BOC; синь колгаст содаф, што синь смежнайхть.

Условиять нюрьхкяняста сёрмадкшесазь:

Максф: $AOB\angle$ и $BOC\angle$ — смежнай ужет.

2. Выводсь, или ся, мезе эряви няфтемс. Станя, „кафта смежнай ужетнень суммасна ровна $2d$“ теоремаса эряви няфтемс, што кафта смежнай ужетнень суммасна ровна $2d$.

Нюрьхкяняста сёрмадкшесазь:

Эряви няфтемс: $AOB\angle + BOC\angle = 2d$.

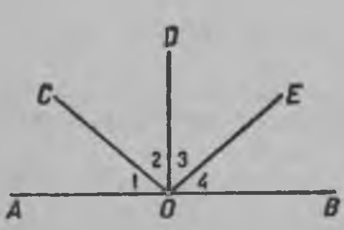
Теоремать условиянц и сонь выводонц сёрмадкшесазь фкяфкянь алу, кода няфтьф сяда алула; тяфта сёрмадомста условиять явсазь выводть эзда китькссa.

Максф: $AOB\angle$ и $BOC\angle$ — смежнай ужет.
Эряви няфтемс: $AOB\angle + BOC\angle = 2d$.

5. *Арьсематненьди, конат лисихть видеста аксиоматнень и теорематнень эзда, мярьгихть следствият.*

Ванцаськ „кафта смежнай ужетнень суммасна ровна $2d$“ теорематъ эзда лисьф следствиятнень.

Следствиятне. 1. **а) Кда максф ужесь оржа, эста сонь смежнай ужец ношка, и мекланкт.**



40 тяш.

б) Кда максф ужесь виде, эста сонь смежнай ужец станя жа виде.

Тянь коряс лисеньди.

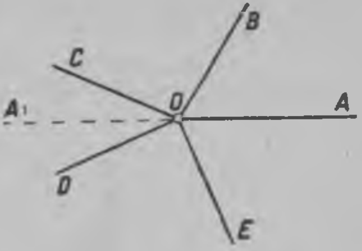
в) Виде ужесь—тя кафта ровна смежнай ужетнень эзда фкя ужесь.

2. Кда мзяровок прилежащай ужетне ащихть станя, што васеньце и мекольце ужетнень крайста ширесна ащихть фкя-фкянь каршеса, лиякс мярьгемс, тиихть фкя виде китькс, эста стама ужетнень суммасна ровна $2d$ (40 тяш.).

Афкукс, 40-це тяштькссa сембе прилежащай ужетне тиихть келептьф уже, а сяс синь суммасна ровна $2d$.

3. Кда мзяровок прилежащай ужетне ащихть станя, што васеньце и мекольце ужетнень крайста ширетне вельхтяйхть фкя-фкянь, эста стама сембе ужетнень суммасна ровна $4d$ (41 тяш.).

Кда кодамовок ужеть фкя ширенц, кепетьксоньди сявемс OA_1, кувалгафтсаськ O точкать омбоце бокс, минь лиси AA_1 виде китькс, кона $COD\angle$ явсы 2 ужева.



41 тяш.

Минь ули:

$$AOE\angle + EOD\angle + DOA_1\angle = 2d$$
$$AOB\angle + BOC\angle + COA_1\angle = 2d$$

Сембе ужетнень суммасна $= 4d$.

6. а) *Кафта ужетненьди, конатнень суммасна ровна 180°, или 2d, мярьгихть пяшкеди (пополнительнай) ужет*; пополнительнай ужень кепетьксокс улихть смежнай ужетне.

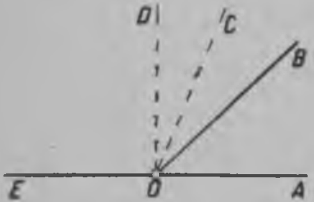
Аф эряви юкстамс, што тя каршек арьсемась „пополнительнай ужетне улихть смежнай ужет" аф сембе пингста виде; сон виде аньцек эста, мзярда пополнительнай ужетне сяка пингста улихть прилежащай ужекс.

Кда кафта прилежащай ужетнень суммасна ровна $2d$, эста тят ужетне смежиайхть, лиякс мярьгемс синь крайстонь ширесна тиихть фкя виде китькс.

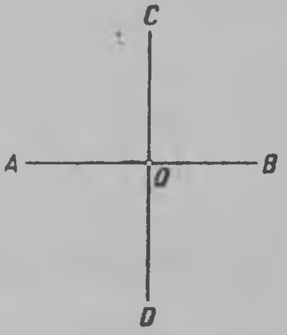
б) *Кафта ужетненьди, конатнень суммасна ровна 90°, или d, мярьгихть дополнительнай ужет.*

8 §. Перпендикулярсь и ширемф китькссь.

1. Кафта смежнай ужетнень эзда $AOB\angle < BOE\angle$ коряс (42 тяш.). Кда синь марстонь OB ширеснон шарфтомс O прять перьф, эста сон арай и стама OD положенияс, мзярда кафцьке смежнай ужетне улихть ровнат, а сянь коряс лисеньди, эрь ужесь ули виде уже. Тяфтама положенияса ащи OD виде китькссти мярьгихть AE виде китькссти перпендикуляр, а O точкати — перпендикулярть основаниец.



42 тяш.



43 тяш.

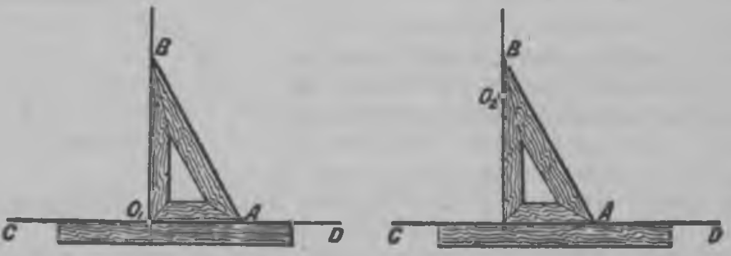
Тянь коряс лисеньди, *максф виде китькксти перпендикулярнайста ащи китькс (нюрьхкяняста перпендикуляр) мярьгихть ся виде китькксти, кона максф виде китьксть мархта тии виде ужет.*

Кафта AB и CD виде китьксненьди, конат фкя-фкянь туркс ётамста тиихть виде ужет (43 тяш.), мярьгихть фкя-фкяньди перпендикулярнай виде китькст.

Кафта виде китькснень фкя-фкяньди перпендикулярнайста ащемать тяшнесазь $\perp$ тяштеняса. $AB \perp CD$ сёрмадфть морафнесазь: AB-сь перпендикулярнай CD-ти.

2. Перпендикулярхнень тиеньдсазь чертёжнай колмужексонь вельде, конань фкя ужец виде, и линейкань вельде. Кода ётафтомс перпендикулярть, цебярьста няеви 44-це тяштьксста. $BO_1 \perp$ $\perp CD$ или $BO_2 \perp CD$.

3. Сяньди, мезень пяльде OD виде китьксть коряс, кона перпендикулярнай AE виде китькски, $OD \perp AE$, аф фкя лаца всякай

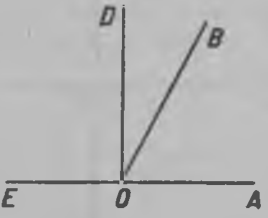


44 тяш.

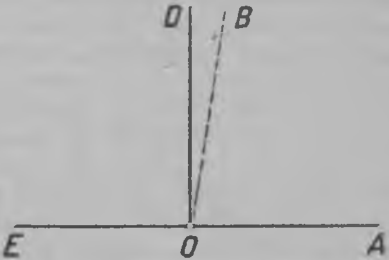
лия виде китькссь, кепетьксоньди OB-сь (45 тяш.), кона AE виде китьксть мархта тии аф виде уже, а ношка или оржа уже, мярьгихть ширемф китькс; ширемф OB китьксть туркс AE виде китьксть ётама вастса O точкати мярьгихть ширемф китьксть основанияц.

4. ***Теорема.*** **Виде китьксть лангса сявф точкать ланга ули кода тяштемс тейнза аньцек фкя перпендикуляр.**

Няфтемац. Арьсетям, што O точкать ланга (46 тяш.) OD перпендикулярда башка ули кода EA-ти ётафтомс нингя фкя перпендикуляр, а именно OB; эста OB перпендикулярсь OA виде китьксть мархта тиихть виде уже, а тянь коряс лисеньди, што



45 тяш.

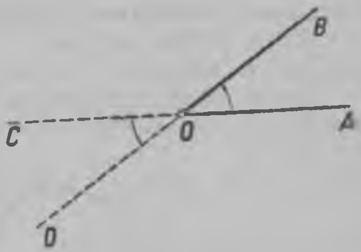


46 тяш.

$BOA \angle$ ули ровна $DOA \angle$ мархта, сяс мес сембе виде ужетне эсь ётковаст ровнат; но $BOA \angle$ ули $DOA \angle$ аньцек пяльксоц, а пяльксcь аф уленьди ровна целайть мархта, сяс $BOA \angle$ аф ули ровна $DOA \angle$ мархта, и сяс арьсемась, што O точкать ланга OD перпендикулярда башка ули кода ётафтомс EA-ти нингя фкя перпендикуляр, аф виде, а сяс аньцек OD ули стама виде китькс, кона EA-ть мархта тии виде уже, а тянц коряс лисеньди, што виде китькс лангса точкань ланга ули кода тяштемс виде китьксти аньцек фкя перпендикуляр.

9 §. Каршек ащи ужетне.

1. Кда AOB ужеть кафцьке ширензон (47 тяш.) кувалгафтомс ужеть O прянц омбоце бокс, эста лиси $COD \angle$, конань O пряц максф ужеть мархта марстонь. *Кафта ужетненьди, AOB и COD, мярьгихть каршек ащи ужет, кда фкя ужеть ширенза арсихть омбоце ужеть кувалгафтф ширекс.* Каршек ащи ужет тиевихть кафта виде китьксонь фкя-фкянь туркс ётамать вельде. O точкать перьф минь улихть кафта пархт каршек ащи ужет: $AOB \angle$ и $COD \angle$, $AOD \angle$ и $BOC \angle$.



47 тяш.

2. ***Теорема.*** **Каршек ащи ужетне эсь ётковаст ровнат.**

Максф: $AOB \angle$ и $COD \angle$ — каршек ащи ужет (47 тяш.).

Эряви няфтемс: $AOB \angle = COD \angle$.

Няфтемац. 1) $AOB \angle + BOC \angle = 2d$ кода смежнай ужет,

2) $COD \angle + BOC \angle = 2d$ кода смежнай ужет.

Сяс,

$$AOB \angle + BOC \angle = COD \angle + BOC \angle,$$

а сяс

$$AOB \angle = COD \angle.$$

Следствия. **Кда максф сят ниле ужетнень эзда, конат тиевсть кафта виде китьксонь фкя-фкянь туркс ётамста, фкять величинац, эста лядыкс колма ужетнень величинасна содавихть максф ужеть коряс.**

Кизефкст и упражненият.

1. Конашка прилежащай кафкса ровна ужетнень эзда эрь ужесь, конат ащихть фкя точкань перьф?

2. Конашка ули ниле сят ужетнень эзда эрь ужесь, конат тиевсть кафта виде китьксонь фкя-фкянь туркс ётамста, кда фкя ужеть эса 60°? $\frac{4}{9}d$?

3. Тиемс уже, кона улельба смежнай максф ABC ужети.

4. Кафта смежнай ужетне относятся станя, кода 4 : 5. Мумс эздост эрь ужеть.

5. Лувомс ужеть, кона эсь смежнаенц коряс сяда ёмла 27°-да? 90°-да?

6. Ниле прилежащай ужетнень эзда, конат ащихть фкя точкань перьф, колма ужетне соответственно ровнат: 0,6d, 20° и 45°. Лувомс нилеце ужеть.

7. Лувомс, мзяра градусда ужеть эса, кона ровна: 1) $\frac{5}{6}d$, 2) $\frac{3}{8}d$, 3) $1\frac{1}{6}d$.

8. Мумс кафта сят виде китьксненьёткста ужеть, конат эрь кафта смежнай ужетнень эзда эрь ужеть явсазь кучкава. Няфтемс, кодама нят виде китьксненьфкя-фкяньди положениясна.

III. КОЛМУЖЕКСНЕ.

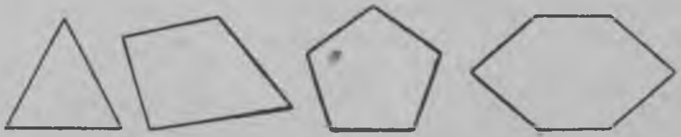
1 §. Видекитьксонь фигурат.

1. *Лапш стама фигурати, кона перяф синнеф замкнутай китьксса, мярьгихть ламужекс.* Синнеф китьксть звенанзонды мярьгихть сонь ширенза. Ламужекстьэрь кафта ряц ащи ширенза тиихть уже. Ламужекс мярьгихть аф сонь ширензон лувксонц коряс, а сонь ужензон лувксонц коряс; ламужекссть мзяра ширедонза, сняра ужедонзовок.

Стама фигурати, кона перяф колма керфксста ащи синнеф китьксса, мярьгихть колмужекс.

Лапш стама фигурати, кона перяф ниле керфксста ащи синнеф китьксса, мярьгихть нилеужекс и ст. тов.

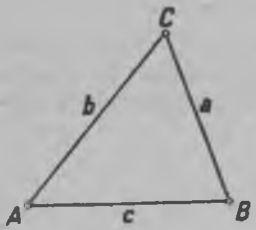
Лапш стама фигурати, кона перяф n керфксста ащи синнеф китьксса, мярьгихть n-ужекс.



48 тяш.

48-це тяштьксса няфтьфт колмужекс, нилеужекс, ветеужекс и котужекс.

2. Ламужекссть тяшнесазь латинскай алфавитонь оцю буквиса, конатнень сёрмадкшесазь сонь ужензон пряснон ваксс; ламужекссть ужензон пряснонды станя жа мярьгихть ламужекссть прянза. „Колмужекс" валть сёрмадкшесазь $\triangle$ тяштеняса. $ABC\triangle$ сёрмадфть морафнесазь: ABC колмужекс.



49 тяш.

Колмужекссть AB, BC и AC ширензон (49 тяш.) тяшнесазь латинскай алфавитонь фкя ёмла буквасовок, кона ули колмужекссть ся уженц тейста букват кодяма, кона ужеть каршеса ащи ширесь. Станя, AB ширеть, кона ащи $C\angle$ каршеса, тяшнесазь ёмла c букваса, AC ширеть — ёмла b букваса и BC ширеть — ёмла a букваса.

Ёмла букваса тяшнесазь ширеть кувалмонцка, кона ункстаф кувалмонь ункстама определённай единицаса. Кепетьксоньди сявсаськ:

$$BC = a\,см, \quad AC = b\,см, \quad AB = c\,см.$$

Нят тяштенятнень коряс лисеньди:

1) $A\angle$ ащи a ширеть каршеса и b и c ширетнень ёткса;
2) $B\angle$ „ b „ „ „ a „ c „ „
3) $C\angle$ „ c „ „ „ a „ b „ „

Тяфта жа:

1) a ширеть ваксса ащихть $B\angle$ и $C\angle$;
2) b „ „ „ $A\angle$ „ $C\angle$;
3) c „ „ „ $A\angle$ „ $B\angle$.

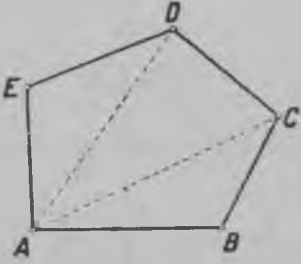
3. *Ламужексонь периметра мярьгихть сонь сембе ширензон суммаснонды.*

$ABC \triangle$ периметрац (49 тяш.) ровна сонь колма ширензон кувалмоснон суммасонды.

$P = BC + CA + AB$, или $P = a + b + c$, коса P букваса тяштьф периметрась.

4. *Ся керфксти, кона поладсынь ламужекстъ кафта прянзон, конат аф ащихть сонь фкя ширенц лангса, мярьгихть диагональ.* Диагональхне явондсазь ламужекстъ колмужексова. AC и AD диагональхне (50 тяш.) явондсазь $ABCDE$ ветеужекстъ колма колмужексова: ABC, ACD и ADE.

5. Ламужекстъ свойстванзон тонафнемась арси колмужекстъ свойстванзон тонафнемакс, а сяс колмужекстъ тонафнеманц пяк оцю значенияц.

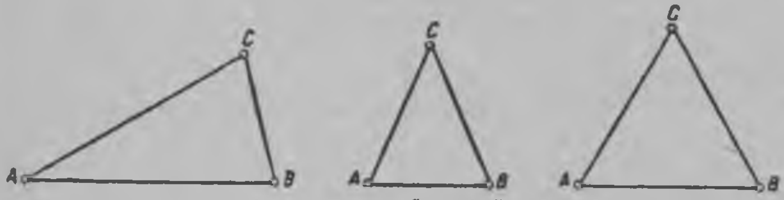


50 тяш.

2 §. Кодамот улихть колмужекст.

1. Ширетнень кувалмоснон коряс улихть колмужекст: 1) розноширень, 2) равнобедреннайхть и 3) ровнаширень (51 тяш.).

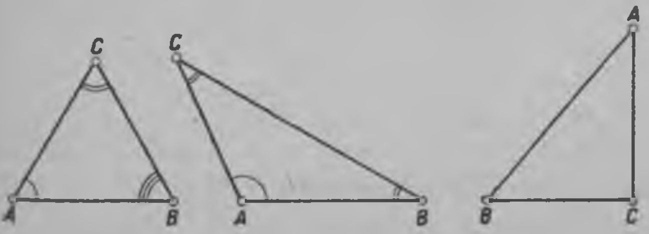
Рознаширень колмужексса сембе ширетне аф фкянь кувалмоса; равнобедреннай колмужекстъ кафта ширенза ровнат; ровнаширень колмужексса сембе колмицьке ширенза ровнат.



рознаширень равнобедреннай ровнаширень

51 тяш.

2. Ужетнень величинаснон коряс улихть тяфтама колмужекст (52 тяш.): 1) косой ужень: а) оржужень, конатнень сембе ужесна оржат; б) ношкужень, конатнень фкянь ужесна ношкат; 2) видеужень, конатнень фкянь ужесна видет.



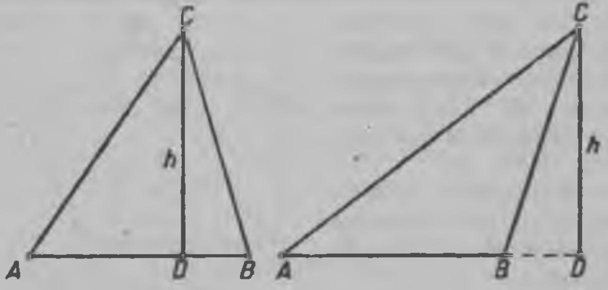
оржужень ношкужень видеужень

52 тяш.

3. Видеужень колмужекстъ ширензон улихть синьцень лемсна; сят ширетненьди, конатнень ёткса ащи виде ужесь, мярьгихть катетт; виде ужеть каршеса ащи ширети мярьгихть гипотенуза.

3 §. Колмужексса китькснe.

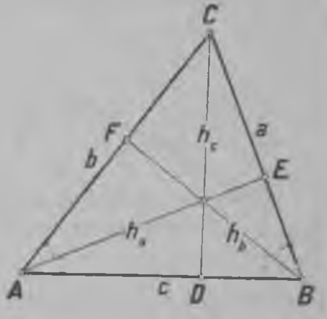
1. Серьсь. Колмужексть ширензон эзда фкя ширеть сявеньдсазь сонь основаниякс. Колмужексти основаниякс ули кода сявемс кодама кельк сонь ширенц. Мзярда корхтайхть колмужексть прянц колга, арьсихть колма прятнень эзда ся прять колга, кона ащи основаниять каршеса.



53 тяш.

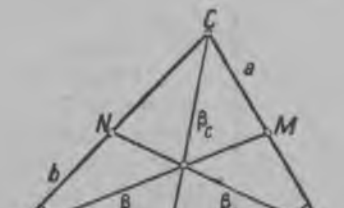
Равнобедреннай колмужексть эса основаниякс лувондсазь ся ширеть, кона аф ровна лият кафта ширетнень мархта, а пряксь лувондсазь тя основаниять каршеса ащи ужеть прянц, кона ужесь ащи ровна ширетнень ёткса.

Ся перпендикулярти, кона ётафтф колмужексть пряста каршесонза ащи ширеть лангс или сонь кувалгафтф пенц лангс, мярьгихть колмужексть серец (53 тяш.). Серьть сёрмадкшесазь h букваса. h серьть, кона ётафтф колмужексть A прянц эзда a ширенц лангс, сёрмадкшесазь h букваса $_a$ тяштеня мархта; станя, $AE = h_a$ (54 тяш.). Ся серьть, кона ётафтф B прять эзда b ширеть лангс, сёрмадкшесазь h_b букваса; станя $BF = h_b$. Колмоце серьсь $CD = h_c$.



54 тяш.

2. Биссектрисась. *Ся виде китькстиі, кона явсы колмужексть ужень кучкава, мярьгихть тя ужеть биссектрисац* и сёрмадкшесазь греческай β букваса (55 тяш.).



55 тяш.

Биссектрисать, кона ётафтф колмужексть A пряста, сёрмадкшесазь β букваса $_A$ тяштеня мархта; станя, AM биссектрисась, ровна β_A. Биссектрисать, кона ётафтф B прять эзда, сёрмадкшесазь β_B; станя, $BN = \beta_B$; колмоце биссектрисась $CL = \beta_C$. AM биссектрисась явсы $A\angle$ ровнаста кучкава, сяс:

$$CAM\angle = MAB\angle = \frac{1}{2}A\angle.$$

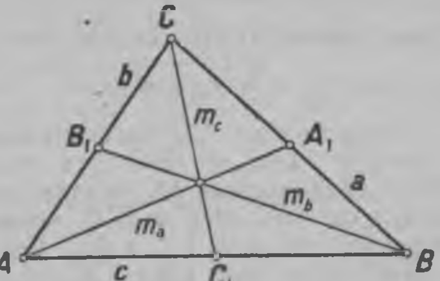
1. Медианась. AA_1 *керфксти* (56 тяш.), *кона поладсы колмужексть A прянц сонь каршесонза ащи a ширеть A_1 кучканц мархта, мярьгихть медиана* и сёрмадкшесазь m букваса $_a$ тяштеня мархта;

станя, $AA_1 = m_a$; BB_1 медианась $= m_b$ и колмоце CC_1 медианась $= m_c$.

AA_1 медианась явсы $BC = a$ ширеть кучкава, сяс:

$$A_1B = A_1C = \frac{a}{2}.$$

57-це тяштьксса ётафтф ABC колмужекст CD серец, CE биссектрисац и CF медианац. Серьсь, биссектрисась и медианась—колмужексса колма разнай китькст.

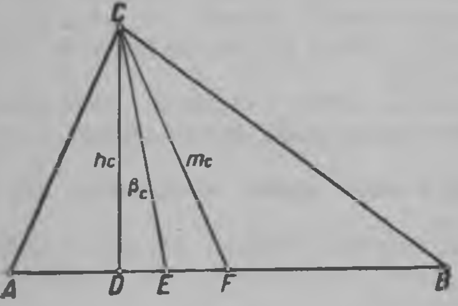


56 тяш.

4 §. Колмужекст ширензон фкя-фкянь эзда ащемасна.

57-це тяштьксса максф $ABC\triangle$. A и B прятне ащихть AB керфксти и ABC синнеф китькст пекс.

Виде китьксонь аксиомать коряс AB керфкссь ули A и B точкатнень ёткса сембеда нюрьхкяня расстояниясь, сяс $AB < AC + CB$,. $BC < BA + AC$, $CA < CB + BA$, а сяс **кодама кельк колмужексса сонь кодамовок кафта ширензон суммасна сяда оцю колмоце ширенц коряс.**



57 тяш.

Кда $AB < AC + CB$ афравенствать кафцьке пялксонзон эзда сяфтяма ровна величинат, эста ули: $AB - AC < CB$, или $CB > AB - AC$; станя жа $BC - BA < AC$, $CB - CA < AB$, лиякс мярьгемс, **колмужекст эрь ширец сяда оцю сонь лият кафта ширензон разностьснон коряс** Тя выводсь няфнесы, што аф всякай колма керфксста ули кода тиемс колмужекс; колма керфксста ули кода тиемс колмужекс аньцек эста, кда кафта любовай керфкснень суммасна сяда оцю колмоце керфкст коряс.

5 §. Равнобедреннай колмужекссь. Сонь свойстванза.

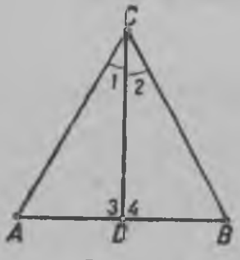
Теорема. 1. **Равнобедреннай колмужексса прять ваксста ужеть биссектрисац арси сяка пингста и медианакс и серькс.**

2. Равнобедреннай колмужексса основаниять ваксса ащи ужетне эсь ётковаст ровнат.

Максф: $ABC\triangle$ эса $AC = CB$; CD — биссектриса. $1\angle = 2\angle = \frac{C\angle}{2}$ (58 тяш).

Эряви няфтемс: 1) CD — медиана, лиякс мярьгемс $DA = DB$,
2) CD — серьсь, лиякс мярьгемс $CD \perp AB$,
3) $A\angle = B\angle$.

Няфтемац. CD биссектрисась явсы $C\angle$ кафта ровна ужева, 1-це$\angle$ и 2-це$\angle$, и $ABC\triangle$-ть явсы кафта колмужексова: ADC и BDC. Мяньдсаськ 58 тяштькстъ CD виде китькстъ кувалмос и няйсаськ, што ADC и BDC колмужексне фкя-фкянь вельхтяйхть. Афкукс, сяс мес $1\angle$ и $2\angle$ ровнат, CA ширесь туй CB ширеть ланга, и сяс мес $CA = CB$, то A точкась вельхтясы B точкать; сяка пингста фкя-фкянь вельхтяйхть DA и DB ширетневок, сяс мес фкя-фкянь вельхтясть синь пестонь A и B точкасна и синь марстонь D точкасна лядсь сяка вастозонза; станя жа фкя-фкянь вельхтясть $3\angle$-сь $4\angle$-ть мархта, $A\angle$-сь $B\angle$-ть мархта. $ACD\triangle$ и $BCD\triangle$ сембе элементснон фкя-фкянь вельхтямаснон эзда лисеньди, што:
1) $DA = DB$, а тя няфни, што D арси AB основанияти кучкакс и CD керфкссь ули медиана;
2) $3\angle = 4\angle$; а сяс мес нят ужетне смежнайхть и эсь ётковаст ровнат, сяс синь виде ужет, то $CD \perp AB$ и CD керфкссь ули колмужекстъ серец;
3) $A\angle = B\angle$, лиякс мярьгемс равнобедреннай колмужекстъ основаниянц ваксса ащи ужетне ровнат. Теорематъ видец няфтьф.



58 тяш.

Следствият. **1. фкя колмужексса ровна ширетнень каршеса ащихть ровна ужет.**

Афкукс, кда $ABC\triangle$ кафта ширенза ровнат, $AC = CB$, эста сон — равнобедреннай, и сонь ровна ширензон каршеса ащихть ровна ужет, лиякс мярьгемс $A\angle = B\angle$.

2. Равнобедреннай колмужексса прять эзда основанията лангс ётафтф перпендикулярсь явсы кучкава: 1) основанията и 2) прять тейста ужеть.

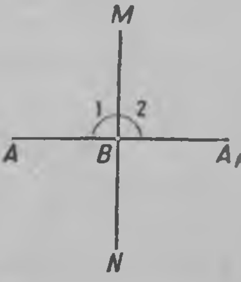
3. Равнобедреннай колмужексса ся керфкссь, кона поладсынь основанията кучканц колмужекстъ прянц мархта, ули перпендикулярнай основанияти и прять тейста ужеть явсы кучкава.

4. Равнобедреннай колмужексса основанияти перпендикулярсь, кона ётафтф основанията кучканц ланга, ётай колмужекстъ прянц ланга и прять тейста ужеть явсы кучкава.

6 §. Осевай симметриясь.

1. Симметричнай точкатне. Кда тяштемс MN виде китькс, сявемс коса-коса эздонза кержи ширеса A точка и тяда меле мяньдемс кагод лопать MN виде китькстъ кувалмос станя, штоба лопать кержи ширень пяльксоц араль види ширень пяльксонц лангс, эста A точкась арай A_1 точкать лангс (59 тяш.). Тяфтама кафта точкатнень колга корхтайхть, што синь MN китьксть колга ащихть симметричнайста, а MN китьксти мярьгихть симметриянь ось.

Штоба шарьхкедемс, кодамот симметричнай A и A_1 точкатнень свойствасна, поладсайнек синь AA_1 виде китьксса; сон ётай симметриянь MN осьть туркс B точкаса.



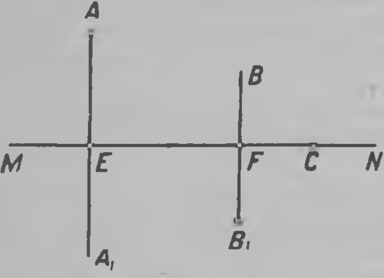
59 тяш.

MN осьть колга тяштьксть мяньдемста (59 тяш.) A точкась вельхтясы A_1 точкать и $1\angle$ вельхтясы $2\angle$; сяс:

1) $1\angle = 2\angle$; но нят ужетне смежнайхть, а сас мес синь эсь ётковаст ровнат, то $1\angle$ и $2\angle$ — виде ужет, лисеньди $MN \perp AA_1$, лиякс мярьгемс симметриянь MN осьсь перпендикулярнай AA_1 керфксти, кона поладсынь симметричнай A и A_1 точкатнень.

2) $BA = BA_1$; лисеньди, B точкась AA_1 керфксть кучкац, и A и A_1 точкатне ащихть симметриянь MN осьть эзда ровна расстоянияса.

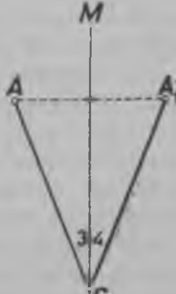
Тяфтаня: осьти симметричнай точкатне ащихть симметриянь осьти перпендикулярть лангса, и эздонза ровна расстоянияса и разнай шири, или кафта точкатнень симметриянь осьсна перпендикулярнай ся керфксти, кона поладсынь синь, и ётай сонь (тя керфксть) кучкаванза.



60 тяш.

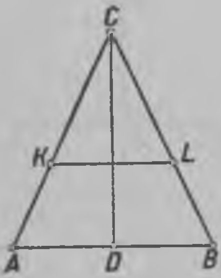
Задача. *Максфт A, B и C точкат и MN ось; тиемс точкат, конат улельхть симметричнайхть MN осьть колга A, B и C точкатненьди.*

Тиемац. A и B точкатнень эзда (60 тяш.) ётафттама MN виде китьксти перпендикулярхт и синь кувалгафтф песнон лангс ункстатама керфкст $EA_1 = EA$ и $FB_1 = FB$; лисихть A_1 и B_1 точкат, конат симметричнайхть A и B точкатненьди. C точкати, кона ащи симметриянь осьть лангса, соньць C точкась ули эсьтейнза симметричнай.



61 тяш.

2. Симметричнай виде китьксне. A и A_1 точкатне — NM осьть колга симметричнай точкат (61 тяш.). Кда симметриянь MN осьть лангса кодамовок вастс сявемс C точка и поладомс сонь симметричнай A и A_1 точкатнень мархта, эста лисихть CA и CA_1 виде китькст, конат симметриянь MN осьть колга мяньдемста фкя-фкянь вельхтяйхть. Тяфтама виде китьксненьди мярьгихть симметричнай виде китькст. 61 тяштьксть MN осьть колга мяньдемста минь няйсаськ, што фкя-фкянь вельхтяйхть 3 и 4 ужетневок, конат тиевсть симметричнай CA и CA_1 виде китькснень и осьть мархта, сяс, $3\angle=4\angle$, а тянь коряс лисеньди, што кафта симметричнай CA и CA_1 виде китькснень симметриянь MN осьсна явсы кучкава ужеть, кона тиевсь тят симметричнай кафта виде китькснень ёткса и арси (MN-сь) тя ужеть биссектрисакс. Тянь коряс лисеньди, *кафта фкя-фкянь туркс ётай симметричнай виде китьксонь ёткста ужеть биссектрисац арси синь симметриянь осекс.*



62 тяш.

Кафта фкя-фкянь туркс ётай симметричнай виде китьксонь симметриянь осьть колга тя арсемать азондсазь станявок:

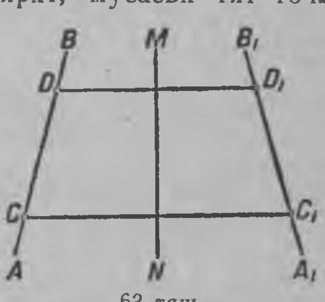
ужеть биссектрисац арси сонь ширензон симметриянь осекс.

Равнобедреннай колмужексса прять тейста ужеть биссектрисац арси сонь ширензонды симметриянь осекс.

Кда равнобедреннай ABC колмужексть прянц тейста C ужеть CD биссектрисанц кодамовок точканц ланга ётафтомс (62 тяш.) виде китькс, кона ули перпендикулярнай биссектрисати, эста тя виде китькссь колмужексть боконь CA и CB ширензон туркс ётай кафта симметричнай K и L точкава; нят точкатне ащихть ужеть прянц эзда фкяньшка расстоянияса, сяс мес 62-це тяштьксть осьть колга мяньдемста K и L точкатне и CK и CL керфксне фкя-фкянь вельхтяйхть.

Задача. *Тиемс виде китькс, кона улель симметричнай максф AB виде китьксти максф симметриянь MN осьть колга* (63 тяш.).

Тиемац. AB виде китькстъ кодамовок кафта C и D точкаста ётафттама MN осьти перпендикулярхт, мусаськ тят точкатненьди симметричнай C_1 и D_1 точкатнень (63 тяш.) и тяда меле нят точкатнень ланга тяштемс A_1B_1 виде китькс, кона ули симметричнай максф AB виде китьксти.



63 тяш.

3. **Симметричнай фигуратне.** Кафта фигуратньди мярьгихть осьть колга симметричнайхть, кда фкя фигурать эрь точканцты ули омбоце фигурать лангса тейнза симметричнай точка.

Фигурати мярьгихть симметричнай, кда ланганза ули кода ётафтомс стама виде китькс што сонь колганза мяньдемста фигурать фкя пялькоц вельхтяльхце марнек омбоце пяльксонц. Равнобедреннай колмужекссь — симметричнай фигура (62 тяш.); сонь серец, кона сяка пингста арси прять тейста ужеть биссектрисакс, ули сонь симметриянь осец.

Окружностьсь — симметричнай фигура; сонь кодама кельк диаметрац ули сонь симметриянь осец.

Кизефкст упражненият.

1. Мес ровнаширень колмужексса сонь кодама кельк серец сяка пингста ули и биссектрисац и медианац?
2. Кругса кодама китькссь ули диаметрать симетриянь осец?
3. Равнобедреннай колмужексса боконь ширети ётафтф медианась явондсы сонь периметранц пяльксова, конатнень эзда фкя пяльксть кувалмоц 7,5 *см*, омбоцеть — 6,5 *см*. Лувомс ширензон.
4. Тяштемс видеужень колмужекс, кона ули симметричнай максф колмужексти, симметриянь осекс сявемс: а) фкя катетонц, б) гипотенузанц. Азомс, кодама лиси фигурась, кда симметриянь осекс сявемс катетонц.
5. Няфтемс, што кафта фкя-фкянь туркс ётай виде китькснень симметриянь осьсна улихть фкя-фкяньди перпендикулярнайхть.

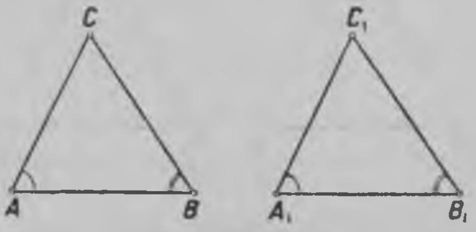
IV. КОЛМУЖЕКСНЕНЬ РАВЕНСТВАСНА.

1 §. Колмужексонь равенствань колма признакне.

Кафта фигуратненьди мярьгихть ровнат, кда синь фкя-фкянь лангс путомстост сембе синь элементсна: ширесна и ужесна фкя-фкянь вельхтяйхть.

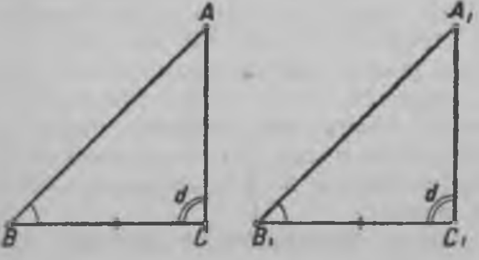
1. Васеньце признакс.

Теорема. **Кафта колмужексне ровнат, кда фкя колмужексть фкя ширец и тейнза прилежащай кафта ужетне соответственно ровнат омбоце колмужексть ширенцты и тейнза прилежащай кафта ужензонды.**



64 тяш.

Нафтемац. $A_1B_1C_1\triangle$ путсаськ $ABC\triangle$ лангс станя, штоба A_1 прясь вельхтяльхце A прять и A_1B_1 ширесь туль AB ширеть кувалмова (64 тяш.); эста, сяс мес A_1B_1 и AB ширетне ровнат, сяс B_1 точкась арай B точкати, а мес $A_1\angle = A\angle$ и $B_1\angle = B\angle$, сяс A_1C_1 ширесь туй AC ширеть кувалмова и B_1C_1 ширесь туй BC ширеть кувалмова. Колмоце C_1 прясь арай C точкати, сяс мес C и C_1 точкатне ащихть сяка же виде китькснень фкя-фкянь туркс ётама вастса, конат (виде китьксне) фкя-фкянь вельхтяйхть. Лисеньди, $A_1B_1C_1\triangle$ и $ABC\triangle$ фкя-фкянь вельхтясть; сяс синь ровнат, $A_1B_1C_1\triangle = ABC\triangle$. Мес ровнат колмужексне, сяс ровнат синь лият лядыкс соответственнайста ащи элементсновок: $A_1C_1 = AC$, $B_1C_1 = BC$ и $C_1\angle = C\angle$.



65 тяш.

Тя теоремась няфтьф фкя-фкянь лангс путозь.

Следствия. **Видеужень кафта колмужексне ровнат, кда синь улихть эсь ётковаст ровна фкянь катетсна и**

ровнат фкянь оржа ужесна, кона прилежащай тя катетти.

Афкукс, кафта видеужень ABC и $A_1B_1C_1$ колмужексне (65 тяш.) ровнат сяс, мес синь улихть эсь ётковаст фкянь ровна катетсна, путсаськ $B_1C_1 = BC$, и кафтонь ровна ужесна, конат прилежащайхть тя катетти, конатнень эзда $B_1\angle = B\angle$ условиять коряс и $C_1\angle = C\angle$ кода виде ужет.

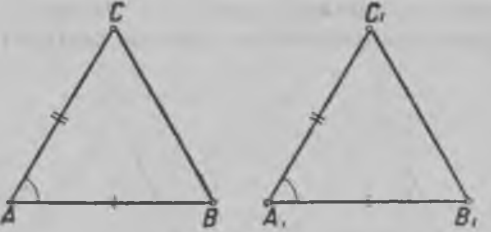
2. Омбоце признаксь.

Теорема. **Кафта колмужексне ровнат, кда фкя колмужексть кафта ширенза и ётkстост ужесь соответственно ровнат омбоце колмужексть кафта ширензонды и ёткстост ужети.**

Максф: $ABC\triangle$ и $A_1B_1C_1\triangle$ эса: 1) $A_1B_1 = AB$, 2) $A_1C_1 = AC$ и 3) $A_1\angle = A\angle$ (66 тяш.).

Эряви няфтемс: $A_1B_1C_1\triangle = ABC\triangle$.

Няфтемац. $A_1B_1C_1\triangle$ путсаськ $ABC\triangle$ лангс станя, штоба A_1 прясь вельхтяльхце A прять и A_1B_1 ширесь туль AB ширеть кувалмова; эста мес ровнат A_1B_1 и AB ширетне, сяс B_1 точкась арай B точкати, а сяс мес ровнат A_1 и A ужетне, A_1C_1 ширесь туй AC ширеть кувалмова; но $A_1C_1 = AC$, сяс C точкась вельхтясы C_1 точкать; сяка пингста фкя-фкянь вельхтяйхть C_1B_1 и CB ширетне, сяс мес фкя-фкянь вельхтясть синь пестонь C_1 и C, B_1 и B точкасна. Лисеньди, $A_1B_1C_1$ и ABC колмужексне фкя-фкянь вельхтясть, сяс синь ровнат: $A_1B_1C_1\triangle = ABC\triangle$. Колмужекснень равенстваснон эзда лисеньди, што ровнат синь сембе соответственно ащи ширесна и ужесна: 1) $C_1B_1 = CB$, 2) $B_1\angle = B\angle$ и 2) $C_1\angle = C\angle$.



66 тяш.

Тявок теорemать видец няфтьф фкя-фкянь лангс путомать вельде.

Тя няфтемась тяфтама, што ингеле фкя-фкянь вельхтяйхть точкась — фкя колмужексть пряц — точкань мархта — омбоце колмужексть прянц мархта, тяда меле фкя-фкянь вельхтяйхть керфксcь — фкя колмужексть ширец — тейнза ровна керфкс мархта — омбоце колмужексть ширенц мархта; сяс мес фкя колмужексть фкя или кафта уженза ровнат омбоце колмужексть фкя или кафта ужензон мархта, содасазь, кона шири туйхть фкя-фкянь вельхтяй колмужекснень фкянь али кафтонь ширесна.

Кда тя фкя-фкянь лангс путомста няеви, што колмужекснень колмоцевок прясна вельхтясть фкя-фкянь, эста колмужексне фкя-фкянь вельхтяйхть и сяс синь ровнат.

Следствия. **Видеужень кафта колмужексне ровнат, кда соответственно ровнат синь катетсна.**

Афкукс, видеужень колмужексне ровнат, мес синь улихть кафтонь соответственно ровна катетсна и фкянь ровна виде ужесна, конат ащихть нят катетснон ёткса.

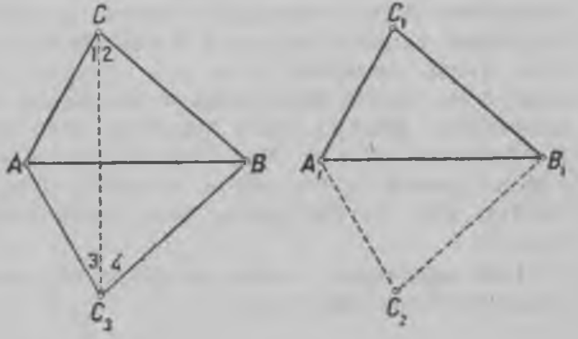
3. Колмоце признаксь.

Теорема. **Кафта колмужексне ровнат, кда фкя колмужексть колмицьке ширенза соответственно ровнат омбоце колмужексть колмицьке ширензон мархта.**

Максф: $ABC\triangle$ и $A_1B_1C_1\triangle$ эса:
1) $A_1B_1 = AB$; $A_1C_1 = AC$ и 3) $B_1C_1 = BC$ (67 тяш.).

Эряви няфтемс: $A_1B_1C_1\triangle = ABC\triangle$.

Няфтемац. Шарфтсаськ $A_1B_1C_1\triangle$ 180°-да A_1B_1 ширенц перьф, конань кирьдемс фкя вастса; эста $A_1B_1C_1\triangle$ арай $A_1B_1C_2\triangle$ вастс. Ушарды, што $A_1B_1C_1\triangle = A_1B_1C_2\triangle$. Тяда меле $A_1B_1C_2\triangle$ путсаськ $ABC\triangle$ ваксс станя, штоба A_1 точкась вельхтяльхце A точкать и A_1B_1 ширесь туль AB ширеть кувалмова; эста мес ровнат A_1B_1 и AB ширетне, сяс B_1 точкась вельхтясы B точкать и C_2 прясь арай C_3 вастс. CC_3 виде китькса поладсаськ C прять C_3 прянц мархта; ужетнень, конат тиевсть C и C_3 ужетнень эзда CC_3 виде китьксса явозь, тяштьсаськ 1, 2, 3 и 4 цифраса и ванцаськ лисьф равнобедреннай кафта ACC_3 и CBC_3 колмужекснень, конатнень CC_3 марстонь основаниясна, $AC = AC_3$ и $BC = BC_3$.



67 тяш.

Равнобедреннай колмужексса основанияснон тейста ужесна ровнат, сяс:

$$1)\ ACC_3\triangle \text{ эса } 1\angle = 3\angle$$

$$2)\ CBC_3\triangle \text{ эса } 2\angle = 4\angle.$$

Кда прибавасаськ башка членга, лиси:

$$1\angle + 2\angle = 3\angle + 4\angle;$$

но

$$1\angle + 2\angle = C\angle \text{ и } 3\angle + 4\angle = C_3\angle,$$

а сяс

$$C\angle = C_3\angle.$$

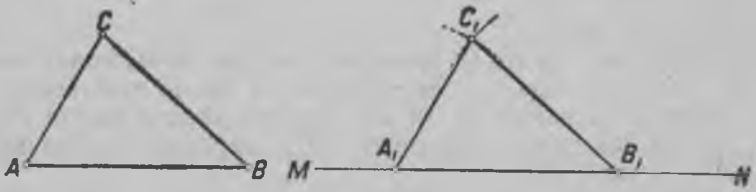
Тяни ванцаськ $ABC\triangle$ и $ABC_3\triangle$: синь $AC = AC_3$ и $BC = BC_3$ и няфтьфть коряс $C\angle = C_3\angle$, сяс нят колмужексне ровнат, $ABC\triangle = ABC_3\triangle$ кафтонь ширеснон и нят ширетнень ёткста ужетнень коряс, но $ABC_3\triangle = A_1B_1C_2\triangle = A_1B_1C_1\triangle$ и $ABC_3\triangle = ABC\triangle$, а сяс $A_1B_1C_1\triangle = ABC\triangle$. Теорематъ видец няфтьф.

2 §. Тиезь тиемс основной задачат.

Планиметрияса основной образкс арсихть точкась и китькссь. Сят китькснень эзда, конатнень тонадкшесыня планиметриясь, сембеда простойхне виде китькссь и окружностьсь. Виде китькстъ тяшнесазь линейкань вельде, а окружностьть — циркульса.

Нят кафта инструменттне, лиятнень коряс, кепетьксоньди сявемс транспортирть или ужекстъ (угольникть) коряс, пяк сяда точнайхть. Сяс элементарнай геометрияса виде китькста и окружностьта башка лия кодамовок китькст аф тонадкшихть. Сяс геометрияса нингя кунара ни ушедсть корхтама, што точнай геометрическай тяштемати эряви линейка и циркуль, лиякс мярьгемс, тяшнемс китькст и окружностьт. Тянь коряс лисеньди, што тиезь задачась ули тиф аньцек эста, кда ули няфтьф, кода сонь тиемс циркулень и линейкань вельде. Кда сави тиемс кодамовок фигура, эста арьсихть, што сонь тяштемс циркулень и линейкань вельде. Кда тятнень вельде аф тиеви (кепетьксоньди сявемс, ужесь эряви явомс колма ровна пяльксова), эста корхтайхть, што тя фигурась (тяса эряви шарьхкедемс задачась) аф тиеви.

1-це задачась. *Тиемс колмужекс, кона ровна максф ABC колмужексти* (68 тяш.).



68 тяш.

Тиемац. Кодамовок MN виде китьксонь кувалмос ункстатама A_1B_1 керфкс, кона ровна $ABC\triangle$ AB ширенцты; A_1 и B_1 точкатнень сявсаськ центраньди, тяштьтяма $ABC\triangle$ ширензон — AC и BC керфкснень, кувалмоса радиусса окружностень дугат; синь фкя-фкянь туркс ётама C_1 точкать поладсаськ A_1 и B_1 точкатнень мархта; лиси вешеньдеви $A_1B_1C_1\triangle$.

Афкукс, $A_1B_1C_1\triangle = ABC\triangle$, сяс мес синь $A_1B_1 = AB$, $A_1C_1 = AC$ и $B_1C_1 = BC$.

2-це задачась. *Тиемс колмужекс сонь колма a, b и c ширензон коряс.*

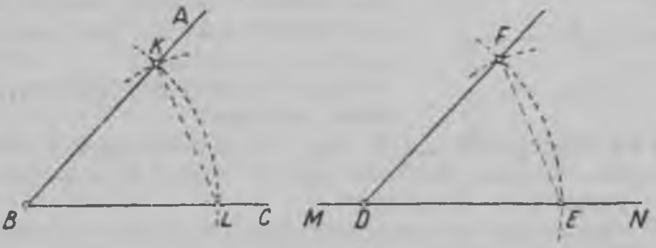
Колмужекстъ ули кода тяштемс, кда тейнек максф эрь керфкссь сяда ёмла лядыкс кафта керфкснень суммаснон коряс, кепетьксоньди сявемс $a < b + c$. Саты, кда тя условиять проверяндасаськ сяда оцю керфкстъ колга, сяс мес эрь сяда ёмла керфкссь, содаф, ули сяда ёмла лядыкс кафта керфкснень суммаснон коряс.

Проверяндасаськ, лиси или аф максф керфкснень мархта тиемста азф условиясь; кда лиси тя условиять коряс, эста ушедтама тиема.

Фигуратнень тяшнесазь станя, кода азф тяда ингельце задачаса. Задачать максф условиянц коряс ули кода тиемс мзяра кельк колмужекст, но сембе синь фкя-фкянь лангс путомста фкя-фкянь вельхтяйхть. Тянь коряс лисеньди, што задачать максф условиянзон коряс ули кода тиемс максф формаса и максф размерса аньцек фкя колмужекс.

3-це задачась. *Тиемс уже, кона улель ровна максф ужети.*

Тиемац. Максф $ABC\angle$ (69 тяш.). Ётафттам MN виде китькс и лангсонза конавок вастса тяштьтяма D точка. Тяда меле тяштьтяма кодамовок, но фкянь кувалмоса радиус вельде кафта дугат, фкя дугать центрац B пряса и сон ётай $ACB\angle$ ширензон



69 тяш.

туркс K и L точкава, а омбоце дугать центрац D точкаса. E точкась арси омбоце дугать и MN виде китькстъ фкя-фкянь туркс ётама точкакс; сявсаськ сонь центракс и ётафттама LK хордать кувалмоса радиусонь вельде дуга; тя дугась ётай васеньце дугать туркс F точкаса; поладсаськ F точкать D точкать мархта, лиси вешеньдеви $EDF\angle = ABC\angle$.

Штоба няфтемс, што тяфта тиф $EDF\angle = ABC\angle$, поладсаськ E и F точкатнень виде китьксса и ванцаськ DEF и BKL колмужекснень. $DEF\triangle = BKL\triangle$, сяс мес синь $DE = BL$, $DF = BK$ и $EF = KL$ тиемать коряс, кода ровна окружностень радиуст. Мес тят колмужексне ровнат, сяс $EDF\angle = LBK\angle$, кода ровна колмужексса ровна FE и LK ширень каршеса ащи ужет. Тянь коряс лисеньди:

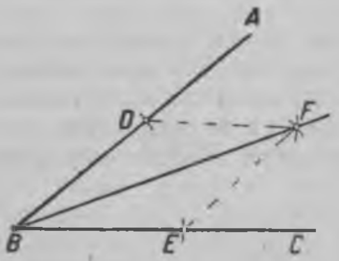
$$EDF\angle = LBK\angle = ABC\angle.$$

4-це задачась. *Тиемс колмужекс кафта b и c ширензон и ёткстост A ужеть коряс.*

Тиемац. Кодамовок MN виде китькстъ кувалмос кодамовок A точкаста ункстатама керфкс $AB = c$ и A точкать тейс тихтяма A ужеть мархта ровна уже станя, штоба сонь фкя ширец туль MN виде китькстъ кувалмова; омбоце ширенц кувалмос ункстатама керфкс $AC = b$; C точкать поладсаськ B точкать мархта, лиси вешеньдьф $ABC\triangle$, кона ули тиф задачать условиянзон коряс.

5-це задачась. *Тиемс колмужекс с ширенц и тейнза прилежащай кафта A и B ужетнень вельде.*

Тиемац. Кодамовок MN виде китьксть кувалмос ункстатама кодамовок A точкаста керфкс $AB = c$ и A точкать тейс тихтяма уже, кона ровна максф A ужети и B точкать тейс тихтяма уже, кона ровна максф B ужети станя, штоба AB керфкссь улель кафцьке ужетненьди марстонь ширекс; эста кафцьке A и B ужетнень лият кафта ширесна ётайхть фкя-фкянь туркс C точкаса и тисазь вешеньдеви ABC колмужекстъ колмоце прянц. Кафта виде китькснe ётавихть фкя-фкянь туркс аньцек фкя точкаса, сяс максф задачать условиянзон коряс ули аньцек фкя решения, лиякс мярьгемс тиемать вельде тиеви фкя определённай формаса и фкя определённай размерса колмужекс.



70 тяш.

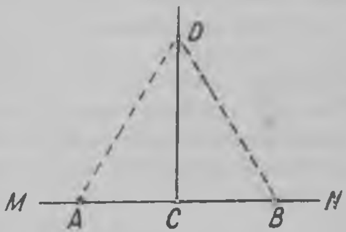
6-це задачась. *Максф ужеть явомс кучкава.*

Тиемац. Максф $ABC\angle$ (70 тяш.). Кодамовок радиусонь вельде тяштемс дуга, конань центрац ули B пряса; дугась ётай ужеть ширензон туркс D и E точкаса.

D и E точкатнень сявсаськ центракс, и ровна радиус вельде ётафттама дугат станя, штоба синь ётальхть фкя-фкянь туркс, лиси F точкась. F точкать поладсаськ виде китькcса B ужеть прянц мархта, лиси ABC ужеть BF биссектрисац.

Няфтемац. F точкать поладсаськ виде китькcса D и E точкатнень мархта, лисихть кафта колмужекст: $BDF\triangle$ и $BEF\triangle$; синь ровнат, сяс мес синь: 1) BF — марстонь ширесна; 2) $BE = BD$ кода фкя дугань радиуст; 3) $EF = FD$ кода ровна окружностень радиуст, а сяс $FBE\angle = FBD\angle$, кода стама ужет, конат ащихть ровна колмужексса ровна EF и FD ширетнень каршеса. Тянь коряс лисеньди, BF виде китькссь явсы максф $ABC\angle$ кучкава; BF арси ужети биссектрисакс.

Кда нят FBE и FBD ужетнень эзда эрь ужеть явомс кучкава, эста максф ужесь явови 4 ровна пялькcова. Тяда меле лисьф ужетнень тяфта жа явондозь ули кода максф ужеть явомс 8, 16 и ст. тов пялькcова, нюрьхкяняста мярьгемс 2^n ровна пялькcова, коса n-сь — целай положительнай лувкс.



71 тяш.

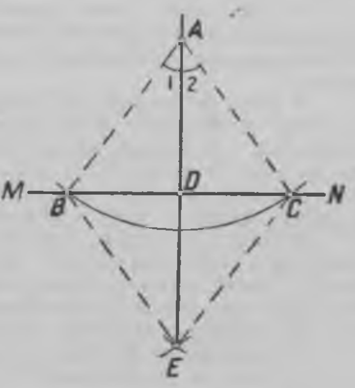
7-це задачась. *Ётафтомс виде китьксти сонь лангсонза максф точкати перпендикуляр.*

Тиемац. MN виде китьксть кувалмос максф C точкать эзда кафцьке шири ункстамс кодамовок кувалмоса ровна CA и CB керфкст (71 тяш.); A и B точкатнень сявсаськ центракс и кодамовок кувалмоса, но AC коряс сяда кувака, радиус вельде тяштьтяма дугат. Дугатнень фкя-фкянь туркс ётама D точкать поладсаськ C точкать мархта; CD виде китькссь ули вешеви перпендикулярсь.

Няфтемац. D точкать поладсаськ A и B точкатнень мархта, лисихть DCA и DCB колмужекст; синь ровнат, сяс мес синь: 1) DC — марстонь ширесна, 2) $CA = CB$ тиемань коряс, 3) $AD = BD$ кода ровна окружностень радиуст, а сяс $DCA\angle = DCB\angle$; нят ужетне смежнайхть и эрь ужесь ровна виде ужеть мархта, а сяс $CD \perp AB$, или сембе сяка $CB \perp MN$. Станя лиссь, што CD ули вешеви перпендикулярсь.

8-це задачась. *Ётафтомс максф виде китьксти тя виде китькстъ эзда башка ащи A точкаста перпендикуляр* (72 тяш.).

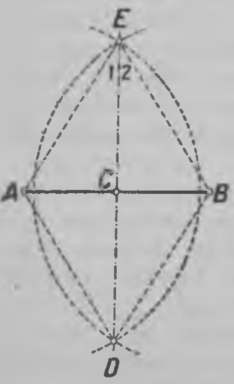
Тиемац. Максф A точкать сявсаськ центракс и тяштьтяма дуга станя, штоба сон ёталь максф MN виде китькстъ туркс B и C точкаса. B и C точкатнень сявсаськ центракс и ровна радиус вельде тяштьтяма дугат, конат ётайхть фкя-фкянь туркс максф MN виде китькстъ омбоце ширеса кодамовок E точкаса. Поладсаськ A и E точкатнень виде китькcса, лиси эрявикс AE перпендикулярсь.



72 тяш.

Няфтемац. A и E точкатнень поладсаськ B и C точкатнень мархта, лиси, што $ABE\triangle = ACE\triangle$, сяс мес синь: 1) AE — марстонь ширесна, 2) $AB = AC$ кода фкя дугань радиуст, 3) $BE = CE$ кода ровна окружностень радиуст.

Мес тят колмужексне ровнат, сяс $1\angle = 2\angle$.



73 тяш.

Тяда меле ванцаськ $ABC\triangle$; сон равнобедреннай, сяс мес $AC = AB$ и AD-сь ули $A\angle$ть биссектрисац, сяс мес $1\angle = 2\angle$. Равнобедреннай колмужексонь прять тейста ужеть биссектрисац сяка пингста ули сонь серец, а сяс $AD \perp BC$, или сембе сяка, $AD \perp MN$.

9-це задачась. *Явомс максф керфксть кучкава.*

Тиемац. Максф AB керфксть A и B пестонза, кода центраста (73 тяш.), ётафттама кодамовок кувалмоса, но AB керфксть пяленц коряс сяда кувака, радиус вельде дугат станя, штоба синь ётальхть фкя-фкянь туркс керфксть кафцьке ширьганза. ED виде китькссь, кона поладсынь дугатнень фкя-фкянь туркс ётама E и D точкатнень, ётай AB керфксть туркс точкаса, кона ули максф AB керфксть кучкац.

Няфтемац. D и E точкатнень поладсаськ A и B точкатнень рхта, лисихть лама колмужекст. Мес ADE и BDE колмужексне ровнат, сяс $1\angle = 2\angle$; равнобедреннай ABE колмужекcть эзда, конань $1\angle = 2\angle$, няйсаськ, што EC-сь арси прять тейста E ужеть биссектрисакс, сяс и AB шиветь медианакс, $CA = CB$, лиякс мярьгемс C точкась AB ули керфксть кучкац.

Кизефкст и упражнеият.

1. Мзяра и кодама условият эрявихть, штоба няфтемс, што ровнаширень кафта колмужексне ровнат?

2. Мес, штоба азомс ровнат или аф равнобедреннай кафта колмужексне саты содамс, ровнат или аф синь: 1) прять тейста ужесна и боконь ширесна, 2) основаниясна и основанинять тейста ужесна, 3) основаниясна и боконь ширесна?

3. Равнобедреннай ABC колмужексса основанинять тейста A и B ужетнень пряста тяштьфт AM и BN медианат. Няфтемс, што медианатне ровнат: $AM = BN$. Сёрмадомс: 1) кодама соответственна ровна элементт содатама задачать условиянц эзда, 2) кодама кафта колмужекснень равенствасна эряви няфтемс.

4. Няфтемс, што равнобедреннай колмужексса основанинять тейста ужетнень биссектрисасна ровнат.

5. Кафта эсь ётковаст ровна ABC и $A_1B_1C_1$ колмужексне путфт фкя-фкянь ваксс синь ширеснон мархта: $AB = A_1B_1$, кода няфтьф 67 тяштьксса. Няфтемс, што CC_3 виде китькссь, кона поладсынь синь C и C_3 пряснон перпендикулярнай синь марстонь AB ширеснонды, лиякс мярьгемс $CC_3 \perp AB$.

6. Тяштемс колмужекс кафта a и b ширензон и h_a серьнц коряс.

7. Тяштемс колмужекс кафта b и c ширензон и m_b медиананц коряс.

8. Тяштемс равнобедреннай видеужень колмужекс h_c серьнц коряс, кона ётафтф виде ужеть пряста.

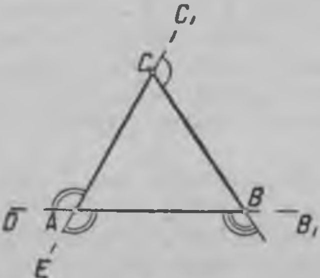
9. Тяштемс ровнаширень колмужекс сонь a ширенц коряс.

10. Циркулень и линейкань вельде тяштемс ужет: 1) 90°, 2) 45°, 3) 135°.

V. КОЛМУЖЕКСТЬ ШИРЕНЗОН И УЖЕНЗОН ЁТКСА ЗАВИСИМОСТЬСЬ.

1 §. Колмужекcть ушеста ужец; сонь свойстванза.

1. Определениясь. $CAD\angle$ или $BAE\angle$ (74 тяш.), кона тиевсь колмужекcть фкя ширенц и смежнай ширеть кувалгафтоманц вельде, мярьгихть колмужекcть ушестонь ужец, тянь пяльде сон лия колмужекcть потмостонь уженц коряс, кона тиевсь сяка жа кафта смежнай ширетнень вельде.



74 тяш.

Колмужекcть эрь прянц тейс ули кода тиемс кафта ушестонь ужет, кда кувалгафтомс фкя или омбоце ширенц. Фкя прять тейста ушестонь ужетне ровнат кода каршек ащи ужет: $CAD\angle = BAE\angle$.

Тянь пингста арьсихть, што кафта ровна ушестонь ужетнень эзда, конат ащихть эрь потмостонь ужеть тейса, сявемс аньцек фкять.

ABC колмужекcть A прянц тейс ушестонь CAD и BAE ужень тиемста минь лиси колмоце DAE уже, кона аф ули колмужекcти ушестонь ужекс, сяс мес тиевсь колмужекcть кафта ширензон кувалгафтомаснон вельде; тя колмоце ужесь ули ровна колмужексть сяка A прянц тейста потмостонь ужети, кода каршек ащи уже.

2. Колмужексть ушестонь и потмостонь ужетне, конатнень ули фкя марстонь прясна, улихть смежнайхть, и синь суммасна ровна $2d$, лиякс мярьгемс, $CAD\angle + CAB\angle = 2d$.

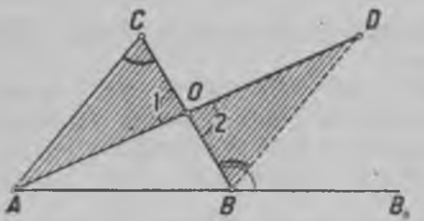
Тя равенствать эзда лисеньди: 1) кда нят ужетнень эзда фкя ужесь оржа, эста омбоцесь ношка; 2) кда кафцьке ужетне ровнат, эста эздост эрь ужесь виде уже.

3. ***Теорема.*** **Колмужексть ушестонь ужец сяда оцю потмостонь эрь ужеть коряс, кона мархтонза аф смежнай.**

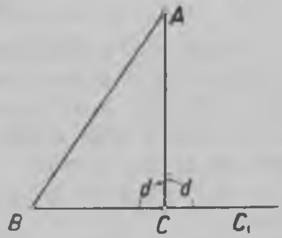
Максф: $ABC\triangle$ эса $CBB_1\angle$ — ушестонь уже (75 тяш.).

Эряви няфтемс: 1) $CBB_1\angle > C\angle$; 2) $CBB_1\angle > A\angle$.

Няфтемац. Ётафттама $AO = m_a$ медиана и сонь кувалгафтф пенц кувалмос ункстатама тейнза ровна OD керфкс. Тяда меле D точкать поладсаськ B прять мархта, минь лисихть кафта колмужекст: AOC и BOD; синь: 1) $CO = OB$;



75 тяш.

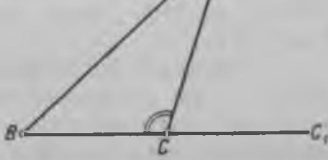


76 тяш.

2) $AO = OD$; 3) $1\angle = 2\angle$, кода каршек ащи ужет, сяс колмужексне ровнат: $AOC\triangle = BOD\triangle$. Синь равенстваснон эзда лисеньди, што $ACO\angle = OBD\angle$; но $OBD\angle$-сь ушестонь CBB_1 ужеть пяльксоц, сяс сонь корязонза сяда ёмла, $OBD\angle < OBB_1\angle$, а сяс тейнза ровна $ACO\angle < OBB_1\angle$, или сяка жа лиси $CBB_1\angle > ACB\angle$. Тяфта жа няфтеви, што $CBB_1\angle > A\angle$; штоба няфтемс, тяштьтяма m_c медиана.

Следствия. **Кда колмужексса фкя ужесь виде или ношка, эста лядыкс кафта ужетне — оржат.**

Афкукс: 1) кда $ABC\triangle$ эса (76 тяш.). $C\angle$ виде, эста тейнза смежнай ушестонь ACC_1 ужесь станя жа ули виде уже, а сяс $A\angle < d$ и $B\angle < d$, лиякс мярьгемс, синь оржат; 2) кда $ABC\triangle$ эса (77 тяш.) $C\angle$ ношка уже, эста тейнза смежнай ушестонь ACC_1 ужесь ули оржа уже, а сяс $A\angle$ и $B\angle$ — оржа ужет.



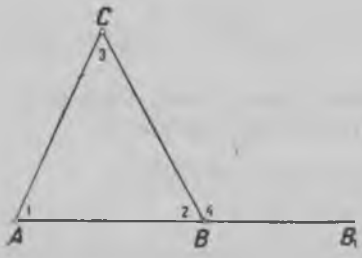
77 тяш.

4. ***Теорема.*** **Всякай колмужексса потмостонь кодама кельк кафта ужетнень суммасна сяда ёмла кафта виде ужень коряс.**

Максф: $ABC\triangle$ эса (78 тяш.) 1, 2 и 3 ужетне.

Эряви няфтемс: $A\angle + B\angle < 2d$, или $A\angle + C\angle < 2d$, или $B\angle + C\angle < 2d$.

Няфтемац. $4\angle + 2\angle = 2d$, кода смежнай ужет, но $4\angle > 1\angle$ и $4\angle > 3\angle$.



78 тяш.

Кда $4\angle + 2\angle = 2d$ равенстват кержи ширень пялькссты $4\angle$ полафтомс сяда ёмла ужеса — 1 ужеса или 3 ужеса, эста суммась сяда ёмлалгады и равенствась срады, лиси афравенства:

$$1\angle + 2\angle < 2d, \text{ или } A\angle + B\angle < 2d.$$
$$3\angle + 2\angle < 2d, \text{ или } C\angle + B\angle < 2d.$$

Тяфта жа няфнесазь, што

$$1\angle + 3\angle < 2d.$$

2 §. Колмужексть ширензон и ужензон ёткса зависимостьсь.

1. Минь ни содасаськ, што фкя колмужексса ровна ширетнень каршеса ащихть ровна ужет.

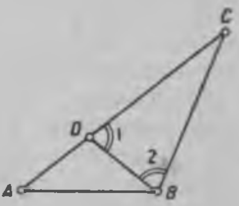
Кда $ABC\triangle$ эса ширетне $AC = AB = CB$, эста сон ровнаширень; эсонза ровна ширетнень каршеса ащихть ровна ужет; сонь сембе ширенза ровнат, а сяс ровнат сембе ужензовок. Ровнаширень колмужекссь сяка пингста ули ровнаужень.

2. ***Теорема*. Всякай колмужексса сяда оцю ширеть каршеса ащи сяда оцю ужесь.**

Максф: $ABC\triangle$ эса $AC > CB$ (79 тяш.).

Эряви няфтемс: $B\angle > A\angle$.

Няфтемац. Сяда оцю AC ширеть кувалмос ункстамс керфкс $CD = CB$ и D точкать поладсаськ B прять мархта, лиси равнобедреннай CBD колмужекс, конань эса основанинять тейста ужетне ровнат. $1\angle = 2\angle$; $1\angle$, кода ADB колмужекстъ ушестонь ужец, сяда оцю A ужеть коряс, $1\angle > A\angle$; но $1\angle = 2\angle$, а сяс $2\angle > A\angle$; но $2\angle$-сь $ABC\angle$-ть аньцек пялксоц, сяс $ABC\angle$, содаф, сяда оцю $A\angle$-ть коряс, $B\angle > A\angle$.



79 тяш.

3. Ванцаськ теорематнень, конат мекланг нят теорематненьди. Максфти мекланговь теорема мярьгихть стама теоремати, конань эса условиякс арси максф теоремать заключенияц или заключенинять пялксоц, кона лияста пяшкедьф добавочнай пялксса, а заключения мярьгихть максф теоремать условиянцты или условиять пялксонцты. Кепетьксоньди сявемс:

1) Всякай колмужексса ровна ширетнень каршеса ащихть ровна ужет.

Максф: $AC = CB$; эряви няфтемс, што $B\angle = A\angle$.

2) Всякай колмужексса ровна ужетнень каршеса ащихть ровна ширет.

Максф: $B\angle = A\angle$; эряви няфтемс, што $AC = CB$.

Кда максф теорематнень эзда омбоцеть лувсаськ меклангоннекс, эста васеньцети мярьгихть омбоцеть колга виде теорема.

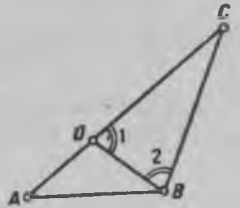
Тя кепетьксса кафцьке теорематне видет. Но тя аф сембе пингста тяфтаня. Кда няфтьф виде теоремась, эста нингя аш кода азомс, што мeклангонь теоремась виде. Станя кепетьксоньди сявемс: „кафта каршек ащи ужетне ровнат“ теоремась виде; меклангонь теоремась: „кда кафта ужетне ровнат, эста синь каршек ащи ужет“ аф сембе пингста уленьди виде.

4. *Теорема (меклангонь).* Всякай колмужексса ровна ужетнень каршеса ащихть ровна ширет.

Няфтемац (меклангоннеста сявезь). Эряви няфтемс, што $AC = BC$. Арьсесаськ тевть меклангт, а именна, што AC аф ровна BC, а BC коряс сяда оцю, $AC > BC$.

Тевть тяфта арьсемста, што $AC > BC$, лисеньди, што $B\angle > A\angle$, сяс мес колмужексса сяда оцю ширеть каршеса ащи сяда оцю ужесь. Но тя выводсь моли стама теорематъ условиянц каршес, што $A\angle = B\angle$, а сяс минь арьсеманькень коряс, што $AC > BC$, тиемс аш кода; тяконьди пачкедьтяма, кда арьсетяма, што $AC < BC$.

Станя лисеньди, кда $A\angle = B\angle$, эста аш кода, штоба AC-сь улель сяда оцю или сяда ёмла AB коряс. Кда жа AC аш кода улемс сяда оцюста или сяда ёмласта BC коряс, эста AC эряви улемс ровна BC мархта. Станя лиси, $AC = BC$.



79 bis тяш.

Тя теорематъ няфнесазь меклангонь методса; тя методсь тяфтама, што минь арьсетяма меклангт сяньди, мезе эряви няфтемс, меле, тевть мельцек-мельцек ванондозь, пачкедьтяма сяньди, што минь меклангт арьсеманькень коряс тиемс аш кода, лиякс мярьгемс, сон моли каршек сят теорематненьди, конат няфтьфт тяда ингеле; лисеньди, минь меклангт арьсеманьке аф виде, сяс сонь кадсаськ, и тяфта лиси, што теорематъ эса максф заключениясь виде.

5. *Теорема (меклангонь).* Всякай колмужексса сяда оцю ужеть каршеса ащи сяда оцю ширесь.

Максф: $ABC\triangle$ эса $B\angle > A\angle$ (79-це bis тяш.).

Эряви няфтемс: $AC > CB$.

Няфтемац (меклангоннеста сявезь). Эряви няфтемс, што $AC > CB$. Арьсесаськ тевть меклангт. Путсаськ, што AC аф сяда оцю CB коряс и ванцаськ эста возможнай кафта случайхнень: 1) $AC = CB$ или 2) $AC < CB$.

Меклангт арьсемать коряс, што $AC = CB$, лиси, што $B\angle = A\angle$, но тя выводсь моли ся теорематъ условиянц каршес, конань коряс

$B\angle > A\angle$, а сяс минь арьсеманьке, што $AC = CB$, аф виде; омбоце арьсеманькень коряс, што $AC < CB$, лисеньди, што и $B\angle < A\angle$, тявок ащи теоремать условиянц каршес, сяс мес $B\angle < A\angle$. Пачкедьтяма тяфтама выводс, што кда $B\angle > A\angle$, эста и $AC > CB$.

Следствият. **1. Видеужень колмужексса гипотенузась эрь катетть коряс сяда оцю.**

2. Ношкужень колмужексса ношка ужеть каршеса ащи сембеда оцю ширесь.

Кизефкст и упражненият.

1. Кодама колмужексса ушестонь ужесь ровна мархтонза смежнай потмостонь ужети?

2. Мес видеужень колмужексса эрь катетсь сяда ёмла гипотенузать коряс? Мес кафта катеттнень суммасна гипотенузать коряс сяда оцю? Кодама теоремат эрявихть сявемс нят кизефкснень каршес отвечамста?

3. ABC колмужексса AB ширесь $= 18$ *см*, $BC = 22$ *см* и $AC = 20$ *см*. Кона ужесь колмужекстъ эса сембеда оцюсь и кона сембеда ёмлась?

4. ABC колмужексса $A\angle = 60°$, $B\angle = 80°$, $C\angle = 40°$. Няфтемс колмужекстъ сембеда оцю и сембеда ёмла ширензон.

VI. ПЕРПЕНДИКУЛЯРСЬ И ШИРЕМФ КИТЬКСНЕ.

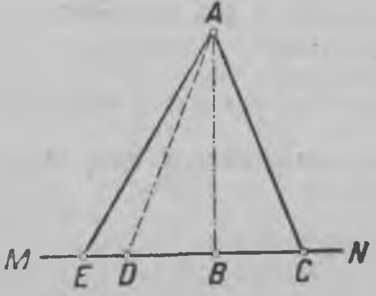
1 §. Виде китькстъ лангса точкать проекцияц.

1. ***Теорема.*** **Виде китькстъ эзда башка ащи точкаста виде китькстъ лангс ули кода ётафтомс аньцек фкя перпендикуляр.**

Максф: MN виде китькс и эздонза башка A точка и $AB \perp MN$ (80 тяш.).

Эряви няфтемс: AB — аньцек ськамонза A точкаста MN виде китькстъ лангс перпендикуляр.

Нят ф т е м а ц (меклангоннеста сявезь). Арьсетяма, што A точкаста ётафтф MN виде китькстъ лангс AB перпендикулярда башка омбоце AC перпендикуляр. Лиссь кафта виде уже мархта ABC △, мезеньди аш кода улемс, сяс мес всякай колмужекстъ кафта ужензон суммасна сяда ёмла кафта виде ужень коряс. Лисеньди минь арьсеманькень коряс, што точкать эзда ули кода MN виде китькстъ лангс, AB перпендикулярда башка, ётафтомс нингя омбоце AC перпендикуляр, аф виде; сяс лисеньди, *виде китькстъ эзда башка A точкаста ули кода виде китькстъ лангс ётафтомс аньцек фкя перпендикуляр.*



80 тяш.

2. AB перпендикулярть B основаниянцты мярьгихть *A точкать MN виде китькстъ лангс проекцияц. Виде китькс лангс точкать проекцияц ули точка.* AB перпендикулярть основанияса B точкась ули аф аньцек A точкать проекцияц, кона ащи AB

перпендикулярть лангса, но кодама кельк точканьгя, кона сявф тя перпендикулярть лангса, лувомс B точкатькя, кона ащи MN виде китькст лангса.

2 §. Перпендикулярсь и ширемф китькснe.

1. Кда $AB \perp MN$, эста AC, AD, AE виде китькснe улихть ширемф китькст (80 тяш.).

2. *Теорема.* **Кда ушестонь точкаста ётафтомс максф виде китькст лангс перпендикуляр и ширемф китькс, эста перпендикулярсь ули сяда нюрьхкяня ширемф китькст коряс.**

Максф: $AB \perp MN$ и AC — ширемф китькс (80 тяш.).

Эряви няфтемс: $AB < AC$.

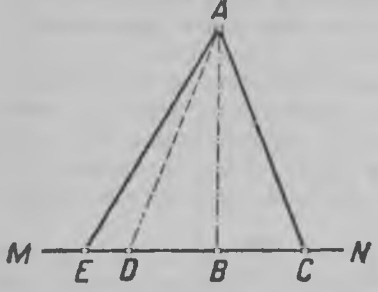
Няфтемац. AB перпендикулярсь и AC ширемф китькссь арсихть видеужень ABC колмужекстии ширекс. AB перпендикулярсь — катет, AC ширемф китькссь — гипотенуза. AC гипотенузась сяда оцю AB катетть коряс, а сяс $AB < AC$.

Перпендикулярсь — точкать и виде китькст ёткса сембеда нюрьхкяня кись.

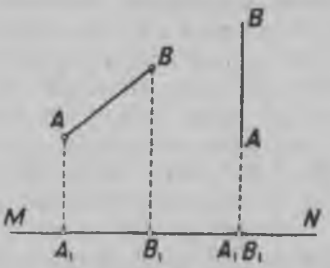
Указаниясь. Мзярда корхтайхть: „точкать и виде китькст ёткса расстояниясь“, эста мяляфтсазь сембеда нюрьхкяня расстояниять, конань ункснесазь перпендикулярть кувалмоса, кона перпендикулярсь ётафтф максф точкать эзда максф виде китькст лангс, лиякс мярьгемс стама, керфксть, конаньди пекс ащихть максф точкась и максф виде китькст лангс сонь проекцияц.

3 §. Ширемф китькснe и синь проекциясна.

1. MN виде китькст BC керфксоц (80а тяш.), конаньди пекс арсихть AB перпендикулярть и AC ширемф китькст B и C основаниясна, мярьгихть AC ширемф китькст проекциясь.



80а тяш.



80б тяш.

Кда AB керфкссь аф ётай MN виде китькст туркс (80б тяш.), эста MN виде китькст лангс сонь проекцияц ули A_1B_1 керфкссь, конаньди пекс ащихть AB керфкстъ A и B пензон проекциясна.

Кда AB керфкссь ули перпендикулярнай MN виде китькстти, эста MN виде китькст лангс сонь проекцияц ули A_1 точкась, сяс мес AB керфкстъ A и B пензон A_1 и B_1 проекциясна арайхть фкя точкас.

2. *Теоремат.* **1) Сят ширемф китьксне, конат ётафтфт виде китькcти фкя ушестонь точкаста, ровнат, кда ровнат синь проекциясна.**

2) Сят кафта ширемф китькснень эзда, конат ётафтфт виде китькcть лангс фкя ушестонь точкаста, ся сяда оцю, конань сяда оцю тя виде китькcть лангс проекцияц.

Няфтемац. 1) ABC и ABD колмужексне (80 а тяш.) — видеужень колмужекст, синь AB — марстонь ширесна и $BC = BD$ условиять коряс, сяс синь ровнат, а сяс $AC = AD$.

2) Условиять коряс $BE > BC$; BE керфкcть B точканц эзда ункстатама керфкс $BD = BC$ и D поладсаськ A-ть мархта, лиси ширемф китькс $AD = AC$. Ванцаськ $AED \triangle$; сонь $ADE \angle$ — ношка уже кода видеужень ABD колмужекcть ушестонь ужец, сяс $ADE \angle > AED \angle$, а сяс $AE > AD$, или сяка жа $AE > AC$, сяс мес $AC = AD$.

3. *Теорема (мeклангонь).* **Кда ровнат ширемф китьксне, конат ётафтфт виде китькcти фкя ушестонь точкаста, эста ровнат сяка жа виде китькcть лангс синь проекциясновок.**

Максф: $AB \perp MN$ и $AC = AD$ (80а тяш.).

Эряви няфтемс: $BC = BD$.

Няфтемац (мeклангоннеста сявезь). Арьсетяма, што $BC > BD$, эста $AC > AD$, но тя моли условиять каршес, сяс мес $AC = AD$, а сяс минь тяфта арьсеманьке аф виде; арьсетяма, што $BC < BD$, эста и $AC < AD$, но тявок моли условиять каршес, сяс мес $AC = AD$, а сяс минь тявок арьсеманьке аф виде. Лисеньди, што BC-ти аш кода улемс аф сяда оцю и аф сяда ёмла BD-ть коряс, а сяс $BC = BD$.

4. *Теорема (мeклангонь).* **Кафта аф ровна ширемф китькснень эзда, конат ётафтфт виде китькcти фкя ушестонь точкаста, сяда оцю ширемф китькcть ули сяда оцю проекцияц.**

Няфтемац (мeклангоннеста сявезь). Арьсетяма, што BE (80а тяш.) аф сяда оцю BD-ть коряс, эста улихть кафта случайхть: $BE = BD$ или $BE < BD$. Кда сявсаськ васеньцеть, эста $AE = AD$, но тя моли максф условиять каршес, конань коряс $AE > AD$, а сяс минь васеньце арьсеманьке аф виде. Кда арьсетяма, што $BE < BD$, эста $AE < AD$, кона станя жа моли условиять каршес, сяс тявок арьсемась аф виде.

Лисеньди, BE-ти аш кода улемс ровна BD мархта и аш кода улемс BD коряс сяда ёмла, а сяс BE ули BD коряс аньцек сяда оцю, $BE > BD$, тя и эрявсь няфтемс.

4 §. Видеужень колмужекснень равенствасна.

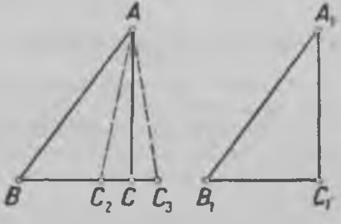
Ваттама видеужень колмужексонь равенствань нингя кафта признакт.

1. *Теорема.* **Видеужень колмужексне ровнат, кда фкя колмужекcть гипотенузац и оржа ужец соответственна ровнат омбоце колмужекcть гипотенузанцты и оржа уженцты.**

Максф: $ABC \triangle$ и $A_1B_1C_1 \triangle$ эса: 1) $A_1B_1 = AB$; 2) $B_1 \angle = B \angle$; 3) $C_1 \angle = C \angle = 90^\circ$ (81 тяш.).

Эряви няфтемс: $A_1B_1C_1 \triangle = ABC \triangle$.

Няфтемац. $A_1B_1C_1 \triangle$ путсаськ $ABC \triangle$ лангс станя, штоба A_1B_1 и AB гипотенузатне фкя-фкянь вельхтяльхть, эста сяс, мес ровнат B и B_1 ужетне, B_1C_1 ширесь туй BC ширеть кувалмова. Кодама BC виде китькстъ точкас арай C_1 точкась? Улихть колма случайхть: C_1 точкась арай C точкать эзда кержи шири или види шири или синь фкя-фкянь вельхтяйхть. Путсаськ, што C_1 точкась арась C точкать эзда кержи шири, эста A_1C_1 катетсь туль ба A_1C_2 ланга, а тянь коряс лисель ба, што A точкаста BC виде китькстъ лангс ётафтфт кафта перпендикулярхт — AC и AC_2. Тяньди улемс аш кода, сяс мес виде китькстъ лангс эздонза башка точкаста ули кода ётафтомс аньцек фкя перпендикуляр. Тяфтама жа выводсь пачкедьтяма, кда мярьгтяма, што C_1 точкась арась C точкать эзда види шири. C_1 точкати, кода няйсаськ, аш кода арамс C точкать эзда аф кержи шири, аф види шири, сяс сон арай аньцек сонь лангозонза. Станя лисеньди, што фкя-фкянь лангс путомста $A_1B_1C_1 \triangle$ вельхтясы $ABC \triangle$, сяс сон тейнза ровна.



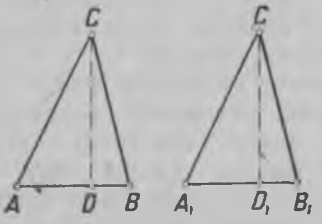
81 тяш.

Следствия. **Ровна колмужекснень улихть соответственнай ровна серьсновок.**

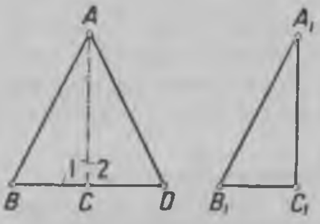
Максф: $A_1B_1C_1 \triangle = ABC \triangle$; C_1D_1 и CD — синь серьсна (82 тяш.).

Эряви няфтемс: $C_1D_1 = CD$.

Няфтемац. Ванцаськ $A_1C_1D_1 \triangle$ и $ACD \triangle$; нят колмужексне — видеужень; синь эсь ётковаст ровнат, сяс мес синь $A_1C_1 = AC$ и $A_1 \angle = A \angle$; $A_1C_1D_1$ и ACD колмужекснень равенстваснон эзда лисеньди, што $C_1D_1 = CD$, лиякс мярьгемс, $A_1B_1C_1$ и ABC колмужекснень серьсна ровнат.



82 тяш.



83 тяш.

2. ***Теорема.*** **Видеужень колмужексне ровнат, кда фкя колмужекстъ гипотенузац и катетоц соответственна ровнат омбоце колмужекстъ гипотенузанц и катетонц мархта.**

Максф: $A_1B_1C_1 \triangle$ и $ABC \triangle$ эса: 1) $A_1B_1 = AB$; 2) $A_1C_1 = AC$; 3) $C_1 \angle = C \angle = 90^\circ$ (83 тяш.).

Эряви няфтемс: $A_1B_1C_1 \triangle = ABC \triangle$.

Нятемац. $A_1B_1C_1\triangle$ путсаськ ABC колмужекстъ вакс станя, штоба ровна A_1C_1 и AC катетсна фкя-фкянь вельхтяльхть. Лиси кодамовок $ABCD$ фигура. Ванцаськ C точкать тейста 1 и 2 ужетнень. $1\angle+2\angle=2d$, мес эрь ужесь виде и, сяс, $BCD\angle$ — келептьф уже, а сяс BC и CD тиихть фкя виде китькс; няйсаськ, што лисикс фигурась — колмужекс; но тя колмужексса $AB=$ $=AD$, а сяс сон равнобедреннай, сонь AC серец явсы сонь кафта ровна колмужексова: ABC и ACD, сяс и $A_1B_1C_1\triangle=ABC\triangle$.

Кизефкст и упражнеият.

1. Равнобедреннай колмужекстъ основаниянц кувалмоц *a см*. Мзяра ули основаниять лангс боконь ширеть проекциянц кувалмоц?

2. Видеужень колмужекстъ катетонза соответственна ровнат *a см* и *b см*. Мзяра ули эрь катеттъ лангста гипотенузать проекциянц кувалмоц?

3. Ношкужень колмужексса ётафтомс серь фкя ширенцты, кона тии ношка уже.

4. ABC колмужексса ётафтф AD биссектриса. Няфтемс, што AD биссектрисать AB и AC ширетнень лангста проекциянза ровнат.

5. AD-сь ули BAC ужеть биссектрисац. Няфтемс, што биссектрисать лангста кодама кельк точкась ащи ужеть ширензон эзда ровна расстоянияса.

6. Максф MN виде китькс и эздонза башка кафта A и B точкат. Мумс MN виде китькстъ лангста стама точка, кона ровнаста ичкезе A и B точкатнень эзда.

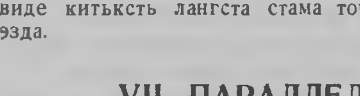
VII. ПАРАЛЛЕЛЬНАЙ ВИДЕ КИТЬКСНЕ.

1 §. Параллельнай виде китькснe.

1. Лапш лангса ащи кафта AB и CD виде китьксненьди ули кода фкя-фкянь мархта ащемс аф фкя лаца; тейст ули кода или ётамс фкя-фкянь туркс или фкя-фкянь вельхтямс, или фкя-фкянь турксa аф ётамс.

1) Эста, мзярда кафта AB и CD виде китькснe ётайхть фкя-фкянь туркс, синь ули фкя марстонь P точкасна — фкя фкянь туркс ётама точкасна; сон ащи кафцьке виде китькснень лангса, лиякс мярьгемс, ащи эрь китькстъ лангса.

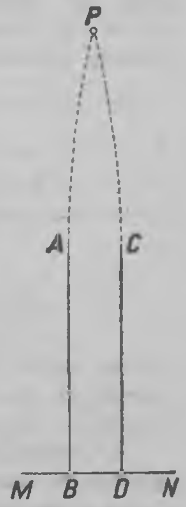
2) Эста, мзярда кафта виде китькснень улихть аф фкя, а кафта марстонь точкасна, эста синь фкя-фкянь вельхтяйхть, сяс мес кафта точкатнень ланга ули кода ётафтомс аньцек фкя виде китькс, и сяс фкя виде китькстъ всякай точкац арси омбоце виде китькстъ точканзон ёткста фкя точкакс.



84 тяш.

3) Кда фкя лапш лангса ащи кафта AB и CD виде китькснень (84 тяш.) аш фкявок марстонь точкасна, лиякс мярьгемс аф ётайхть фкянь-фкянь туркс, конань кувалмоса минь синь дялеськ кувалгафт кафцьке шири, и синь фкя-фкянь аф вельхтяйхть, тяфтама виде китьксненьди мярьгихть параллельнайхть.

Фкя лапш лангса ащи виде китьксненьди, конат кда кафцьке шири синь кувалгафтомстот аф ётайхть фкя-фкянь туркс, мярьгихть параллельнайхть.



85 тяш.

Што виде китьксне параллельнайхть, сёрмадкшесазь || тяштеняса. $AB \parallel CD$ сёрмадфть морафнесазь: AB виде китькссь параллельнай CD виде китьксти.

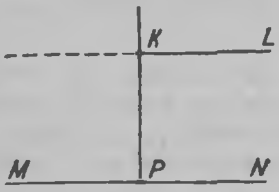
2. Што улихть параллельнай виде китькст, минь няйсаськ эрь шиня перьфканок ащи предметтнень мельгя ванондомста; но што улихть параллельнай виде китькст, ули кода няфтемс теориять вельдевок.

Теорема. **Кафта виде китькcне, конат перпендикулярнайхть фкя и сяка жа колмоце виде китьксоньди, аф ётайхть фкя-фкянь туркс — синь параллельнайхть.**

Максф: $AB \perp MN$, $CD \perp MN$ (85 тяш.).

Эряви няфтемс: $AB \parallel CD$.

Няфтемац (меклангоннеста сявезь). Арьсетяма што, AB и CD виде китькcне, конат перпендикулярнайхть MN виде китьксти, кда кувалгафтомс синь, ётайхть фкя-фкянь туркс кодамовок P точкаса; эста P точкаста MN виде китькcть лангс улихть ётафтфт кафта AB и CD перпендикулярхт, конанцты улемс аш кода, сяс мес фкя точкаста виде китькcть лангс ули кода ётафтомс аньцек фкя перпендикуляр; сяс минь арьсеманьке, што AB и DC ётайхть фкя-фкянь туркс, аф виде; AB и CD виде китькcне, конат перпендикулярнайхть MN виде китьксти, аф ётавихть фкя-фкянь туркс, сяс синь параллельнайхть; станя лиссь, $AB \parallel CD$.



86 тяш.

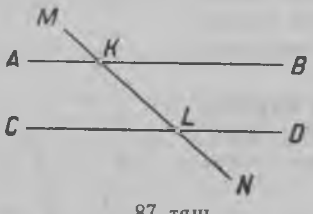
Задача. *Максф MN виде китькс и эздонза башка K точка* (86 тяш.). *Ётафтомс K точкать ланга виде китькс, кона улель параллельнай MN виде китьксти.*

Тиемац. Максф K точкать ланга ётафтомс MN виде китьксти KP перпендикуляр, а тяда меле K точкаста ётафтомс KP виде китьксти KL перпендикуляр. KL — виде китькссь, кона эрявсь вешемс. Афкукс, $KL \parallel MN$, сяс мес KL и MN кафта виде китькст, конат перпендикулярнайхть KP виде китьксти.

2 §. Параллельнайхнень колга аксиомась.

1. Минь няеськ, што MN виде китькcть эзда башка максф K точкать ланга ули кода ётафтомс виде китькс, кона параллельнай MN виде китьксти. Эряволь ба нингя няфтемс, што станя тяштьф KL виде китькссь ули аньцек сяка виде китькссь, кона ётай K точкать ланга и параллельнай MN виде китьксти.

Но тянь няфтемс аш кода, сонь эряви сявемс аксиомакс; тяфта и тисть минь эранькень коряс пяк сяда ингеле греческай геометратне. Тянь няфтемс тяряфнесть сембе пингень и народонь сембеда цебярь геометратне, но тя тяряфтомась изь удала. Аньцек ётай XIX векть пингста удалась няфтемс, што тя положениясь аф няфтеви, лиякс мярьгемс, што сонь аш кода сявемс геометриянь основакс путф лия аксиоматнень эзда кода логическай следствият. Тянь няфтеманц тяряфтомать колга цебярьста содазь ни германскай великай математик — Гауссась (1777 — 1855); но тя кизефкстъ пцтай прокс арьсезе и няфтезе 1829-це кизоня русскай геометрсь—Н. И. Лобачевскайсь (1793—1856), и соньдедонза меле 1832-це кизоня венгерскай математик — И. Больайсь (1802—1860). Синьдедост меле лама геометрат тя няфтемать пачфтезь мянь пес и тяни няеви, што Евклидть видец, мес тя положениять сон ладязе аксиомакс; сонь видец няеви тянь мельгя ванондомать, лама веконь опытонь коряс, конатнень пуроптозь ломаньтне.



87 тяш.

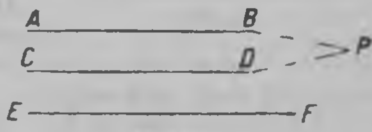
2. ***Аксиома.*** **Лапш лангса виде китькстъ эзда башка ащи максф точкать ланга ули кода ётафтомс аньцек фкя виде китькс, кона параллельнай максф виде китькстн.**

Следствият. **1. Кда виде китькссь ётай кафта параллельнайхнень эзда фкять туркс, эста сон ётай омбоцетькя туркс.**

Максф: $AB \parallel CD$; MN ётай AB туркс K точкаса (87 тяш.).

Эряви няфтемс: MN ётай CD туркс.

Няфтемац (мекланroнноста сявезь). Арьсетяма, што MN виде китькссь, кона ётай AB туркс K точкаса, аф ётай CD виде китькстъ туркс. Кда тя тяфта, эста MN виде китькссь ули параллельнай CD-ти, и эста K точкать ланга ётайхть кафта AB и MN виде китькст, конат параллельнайхть CD, но тя ащи параллельнайхнень колга аксиомать каршес; сяс минь арьсеманьке, што AB виде китькста башка K точкать ланга ётай нингя омбоце MN виде китькс, кона аф ётай CD виде китькстъ туркс, ули аф виде. Станя лисеньди, MN виде китькссь аф параллельнай CD, и сяс соньдейнза эряви ётамс CD-ть туркс.



88 тяш.

2. Кда кафта виде китьксне башка эрь китькссь параллельнайхть колмоце виде китькстн, эста синь параллельнайхть эсь ётковаст.

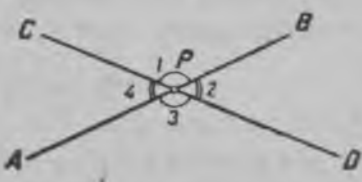
Максф: $AB \parallel EF$ и $CD \parallel EF$ (88 тяш.).

Эряви няфтемс: $AB \parallel CD$.

Няфтемац (мекланrонноста сявезь). Арьсетяма, што AB и CD виде китьксне аф параллельнайхть и фкя-фкянь туркс ётайхть кодамовок P точкаса. Тя арьсемать коряс минь пачкедьтяма тяфтама выводс, што P точкать ланга ётайхть кафта разнай AB и CD виде китькст, параллельнайхть колмоце EF виде китькксти; но тя моли параллельнайхнень колга аксиомать каршес, сяс тяфтама арьсемась аф виде. Станя лисеньди, AB и CD виде китьксненьди, конат параллельнайхть EF виде китькксти, аш кода ётамс фкя-фкянь туркс; синь параллельнайхть: $AB \parallel CD$.

3 §. Ужетне, конат тиевсть кафта параллельнай китькcса и керы китькcса.

1. Кда AB виде китькссь (89 тяш.) ётай кодамовок виде китьксонь туркс, кепетьксоньди сявемс CD, эста сон мархтонза тии 4 ужет, конатнень эзда кафттне оржат и кафттне ношкат; кафцьке оржа и кафцьке ношка ужетне эсь ётковаст ровнат, кода каршек ащи ужет: $1\angle = 3\angle$ и $2\angle = 4\angle$.



89 тяш.

Тя башка, кодама кельк фкя оржа ужеть и кодама кельк фкя ношка ужеть суммаснон эса $2d$, кода смежнай ужень:

$1\angle + 2\angle = 2d$; $2\angle + 3\angle = 2d$; $3\angle + 4\angle = 2d$; $1\angle + 4\angle = 2d$.

Кда фкя-фкянь туркс ётай AB и CD виде китьксне фкя-фкяньди перпендикулярнайхть, эста сембе эсост тиф ужетне эсь ётковаст ровнат и эздост эрь ужесь виде.

2. Кда EF виде китькссь (90 тяш.) ётай аф фкя, а кафта AB и CD виде китькснень туркс, эста EF виде китькcть AB и CD виде китькснень туркс ётама точкатнень перьф тиевихть кафкса ужет: нилетнень марстонь прясна AB виде китькcть туркс ётама M точкаса и нилетнень марстонь прясна CD виде китькcть туркс ётама N точкаса. EF виде китькксти, кона ётай AB и CD виде китькснень туркс, мярьгихть керы китькс (секущай). Штоба содамс фкя-фкянь ёткста башка паронь-пар ужетнень, конатнень эзда фкясь ащи M точкать ваксса, омбоцесь — N точкать ваксса, ужетненьди керы китькcть мархта синь ащемаснон коряс мярьгихть вов кода:

90 тяш.

1) $3\angle$ и $6\angle$, $4\angle$ и $5\angle$ мярьгихть потмостонь фкя ширень ужет.

2) $1\angle$ и $8\angle$, $2\angle$ и $7\angle$ мярьгихть ушестонь фкя ширень ужет.

3) $3\angle$ и $5\angle$, $4\angle$ и $6\angle$ мярьгихть потмостонь накрест ащи ужет.

4) $1\angle$ и $7\angle$, $2\angle$ и $8\angle$ мярьгихть ушестонь накрест ащи ужет.

5) $1\angle$ и $5\angle$, $2\angle$ и $6\angle$, $3\angle$ и $7\angle$, $4\angle$ и $8\angle$ мярьгихть соответственнай ужет.

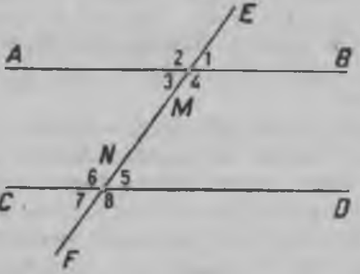
3. Тяфта кодамовок кафта ужетнень ёткса определённай зависимостьсь мельганза таргай определённай зависимость эрь лият кафта ужетнень ёткса.

Теорема. **Кда кафта виде китькснень туркс колмоце виде китькстъ ётамста тиеви соответственнай ужетне ровнат, эста: 1) потмостонь накрест ащи ужетне ровнат, 2) ушестонь накрест ащи ужетне ровнат, 3) потмостонь фкя ширень ужетне пополнительнайхть, 4) ушестонь фкя ширень ужетне пополнительнайхть, лиякс мярьгемс синь суммасна ули $2d$.**

Максф: AB и CD виде китькст и EF керы китькс; $1\angle = 5\angle$ (91 тяш.).

Эряви няфтемс:
1) $3\angle = 5\angle$ и $4\angle = 6\angle$;
2) $1\angle = 7\angle$ и $2\angle = 8\angle$;
3) $4\angle + 5\angle = 2d$ и $3\angle + 6\angle = 2d$;
4) $1\angle + 8\angle = 2d$ и $2\angle + 7\angle = 2d$.

Няфтемац. а) $1\angle = 5\angle$ — условиять коряс, $1\angle = 3\angle$ — кода каршек ащи ужет, лисеньди, $3\angle = 5\angle$, сяс мес кафта величинатне, $3\angle$ и $5\angle$, конатнень эзда эрь величинась башка ровна колмоцети, лиякс мярьгемс 1 ужети, ровнат эсь ётковаст.



91 тяш.

Станя лисеньди, кда ровнат соответственнай ужетне, $1\angle$ и $5\angle$, эста ровнат потмостонь накрест ащи ужетневок: $3\angle = 5\angle$. Станя жа няфневи, што $1\angle = 7\angle$, кда $1\angle = 5\angle$.

б) Условиять коряс $1\angle = 5\angle$; кда $1\angle$-ти прибавамс $4\angle$ и $5\angle$-ти прибавамс $6\angle$, эста $1\angle + 4\angle = 2d$ и $5\angle + 6\angle = 2d$ кода смежнай ужет. Станя лисеньди, кда эрь ровна ужети, $1\angle$ и $5\angle$, прибавамс фкяньшка ужет, лиси фкянькодямшка сумма, а именна $2d$, а тяфта лиссь аньцек эста, кда $4\angle = 6\angle$, а тянь коряс няеви, што потмостонь накрест ащи ужетне ровнат. Тяфта жа няфневи, што $2\angle = 8\angle$, кда $1\angle = 5\angle$.

в) Условиять коряс $1\angle = 5\angle$; $1\angle + 4\angle = 2d$ кода смежнай ужет. Кда мекпяльдень равенстваса $1\angle$ полафтсаськ тейнза ровна $5\angle$, эста лиси, што $5\angle + 4\angle = 2d$, лиякс мярьгемс, потмостонь фкяширень ужетнень суммасна ровна $2d$. Станя жа няфнесазь, што $3\angle + 6\angle = 2d$, кда $1\angle = 5\angle$.

г) Условиять коряс $1\angle = 5\angle$, $5\angle + 8\angle = 2d$ кода смежнай ужет. Кда мекпяльдень равенстваса $5\angle$ полафтсаськ тейнза ровна $1\angle$, лиси, што $1\angle + 8\angle = 2d$, лиякс мярьгемс, ушестонь фкяширень ужетнень суммасна ровна $2d$. Станя жа няфнесазь, што $2\angle + 7\angle = 2d$, кда $1\angle = 5\angle$.

4 §. Мезень коряс содавихть, што виде китьксне параллельнайхть.

1. Што кафта виде китьксне параллельнайхть, васенда содавихть вов кода, кда кафта розна виде китьксне перпендикулярнайхть фкя виде китьксоньди, эста синь параллельнайхть. Ваттама лия признакт, конат ащихть кафта виде китьксонь туркс колмоце китькстъ ётаманц вельде тиеви ужетнень свойстваснон коряс.

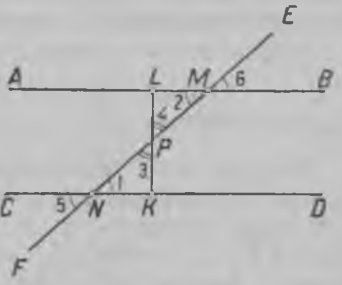
Теорема. **Кафта виде китьксне, конатнень туркс ётай колмоцесь, параллельнайхть: 1) кда потмостонь накрест ащи ужетне ровнат; 2) кда ушестонь накрест ащи ужетне ровнат; 3) кда соответственнай ужетне ровнат; 4) кда потмостонь фкя ширень ужетне пополнительнайхть и 5) кда ушестонь фкя ширень ужетне пополнительнайхть, лиякс мярьгемс, синь суммасна ули $2d$.**

Няфтьсаськ тя теоремать васеньце пяльксонц.

Максф: AB и CD — виде китькст и EF — керы китькс; $1\angle = 2\angle$ (92 тяш.).

Эряви няфтемс: $AB \parallel CD$.

Нафтемац. EF керы китькссь ётай AB и CD виде китьксонь туркс M и N точкаса. Явсаськ MN керфкстъ кучкава и сонь P кучканц ланга ётафттама CD виде китьксти PK перпендикуляр и кувалгафтсаськ сонь мянь AB виде китькстъ туркс L точкаса ётамс; лисихть кафта колмужекст: $PLM\triangle$ и $PKN\triangle$. Нят колмужекснень эса: 1) $PM = PN$ тиемать коряс, 2) $1\angle = 2\angle$ условиять коряс, 3) $3\angle = 4\angle$ кода каршек ащи ужет, лисеньди, $PLM\triangle = PKN\triangle$. Синь равенстваснон эзда лисеньди, што $K\angle = L\angle$; условиять коряс $K\angle = d$, сяс мес $PK \perp CD$, сяс и $L\angle = d$, а тя няфтьсы, што $PL \perp AB$. Станя лисеньди, што AB и CD виде китьксне перпендикулярнайхть фкя KL виде китьксти, сяс синь параллельнайхть: $AB \parallel CD$.



92 тяш.

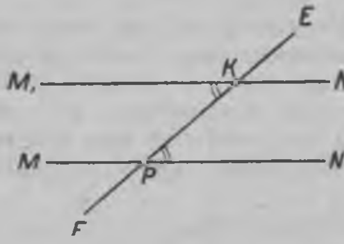
Тяфтама случайста, мзярда ровнат ушестонь накрест ащи ужетне, кепетьксоньди сявемс, $5\angle = 6\angle$, теоремать няфнесазь тяфтаня жа, кода ингельце теоремать.

Максф, што $5\angle = 6\angle$. Сяс мес $5\angle = 1\angle$ и $6\angle = 2\angle$ кода каршек ащи ужет, эста $1\angle = 2\angle$; но нят ужетне ушестонь накрест ащихть и ровнат эсь ётковаст, а сяс $AB \parallel CD$.

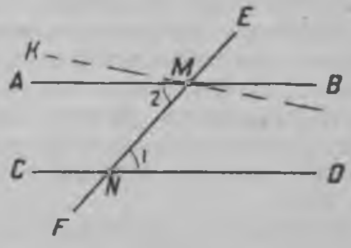
Тяфтама жа нафтемац теоремать, мзярда максф, што ровнат соответственнай ужетне, или мзярда максф, што ушестонь или потмостонь фкя ширень ужетнень суммасна $2d$.

Задача. *Ётафтомс виде китькс, кона ётай K точкать ланга и параллельнай максф MN виде китьксти* (93 тяш.).

Тиемац. Максф MN виде китькс и эздонза башка K точка. K точкать ланга таштьтяма кодамовок EF керы китькс: сон MN виде китькстьмархта тии KPN уже. Тяда меле K точкать тейс EF керы китькстьомбоце ширес тяштьтяма $M_1KP\angle = KPN\angle$, эста тя ужеть M_1K ширец ули вешеньдьф виде китькссь, кона параллельнай MN-ти, $M_1K \parallel MN$. Афкукс, тяштемать коряс лиси $M_1KP\angle = KPN\angle$, а нят ужетне потмостонь накрест ащихть, сяс $M_1N_1 \parallel MN$.



93 тяш.



94 тяш.

2. ***Теорема (мекланговь).*** **Кда кафта параллельнай виде китьксвень туркс ётай колмоцесь, эста 1) потмостонь накрест ащи ужетне ровнат, 2) ушестонь накрест ащи ужетне ровнат, 3) соответственнай ужетне ровнат, 4) потмостонь фкя ширень ужетне пополнительнайхть, 5) ушестонь фкя ширень ужетне пополнительнайхть, лиякс мярьгемс синь суммасна ули $2d$.**

Няфтьсаськ теоремать васеньце пяльксонц.

Максф: $AB \parallel CD$; EF — керы китькс (94 тяш.).
Эряви няфтемс: $1\angle = 2\angle$.

Няфтемац (мекланговнеста сявезь). Арьсетяма, што $1\angle$ аф ровна $2\angle$ мархта, мярьгтяма, сяда оцю сонь корязонза, $1\angle > 2\angle$. EF керы китькстьи M точкать ваксса тихтяма $KMN\angle = 1\angle$. Кда $KMN\angle = MND\angle$, эста $KM \parallel CD$, и M точкать ланга станя ётайхть кафта KM и AB виде китькст, конат параллельнайхть CD-ти; но тя моли параллельнайхнень колга аксиомать каршес, а сяс минь арьсеманьке, што $1\angle > 2\angle$, аф виде.

Кда арьсетяма, што $1\angle < 2\angle$, эста кда EF керы китькстьи M точкать тейс тихтяма уже, кона ровна $1\angle$ мархта, тага няйсаськ што, M точкать ланга ётайхть CD-ти кафта параллельнай виде китькст, конаньди аш кода улемс, сяс мес тя моли параллельнайхнень колга аксиомать каршес. Станя лисеньди, што $1\angle$ аш кода улемс $2\angle$ коряс аф сяда оцюста, аф сяда ёмласта, а сяс $1\angle = 2\angle$; тянь коряс лисеньди, што потмостонь накрест ащи ужетне, конат тиевсть кафта параллельнай виде китьксвень туркс колмоце виде китькстьётаманц вельде, улихть ровнат.

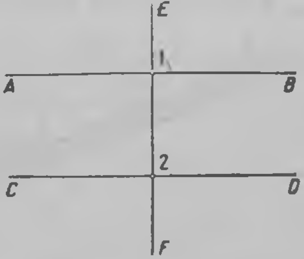
Теоремать лядыкс пяльксонзон видесна лисеньди няфтьфтьэзда, сяс мес кда потмостонь накрест ащи ужетне ровнат, эста ровнат ушестонь накрест ащи ужетневок, соответственнай ужетнень и фкяширень ужетнень кода потмостоннетнень, станя и ушестоннетнень, суммасна ровна $2d$.

Следствия. **Кда виде китькссь перпендикулярнай кафта параллельнай виде китькснень эзда фкяти, эста сои перпендикулярнай омбоцетивок.**

Максф: $\underline{AB \parallel CD;\ EF \perp AB}$ (95 тяш.).
Эряви няфтемс: $EF \perp CD$.

Няфтемац. Кда $AB \parallel CD$, эста $1\angle = 2\angle$ кода соответственнай ужет, но $1\angle = d$, сяс $2\angle = d$, лиякс мярьгемс $EF \perp CD$.

3. *AB* перпендикулярсь и *CD* шнремф китькссь, конат ётафтфт фкя *MN* виде китькости, ётайхть фкя-фкянь туркс (95а тяш.).

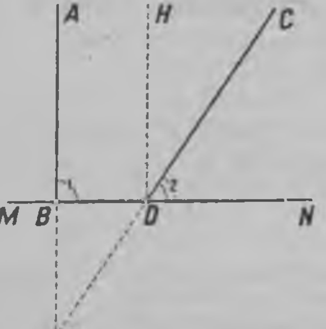


95 тяш.

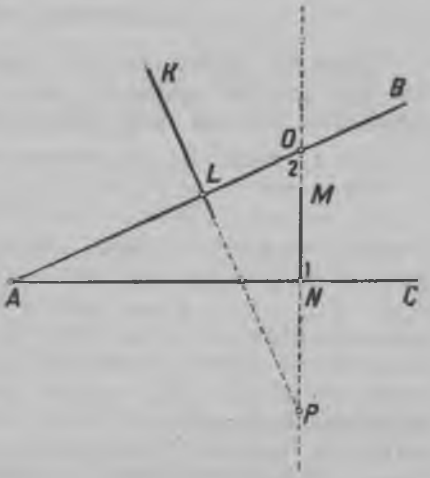
D точкать эзда (95а тяш.) ётафттама *MN* виде китькости *DH* перпендикуляр; сон параллельнай *AB*-ти (кафта виде китькснень, конат перпендикулярнайхть фкя колмоце виде китькости, параллельностьснон теоремать коряс), а сяс мес *D* точкать ланга ули кода ётафтомс аф фкяда лама стама виде китькс, кона параллельнай *AB*-ти, сяс *DC* виде китькссь аф параллельнай *AB*-ти, лиякс мярьгемс, ётай сонь туркссканза.

4. Фкя-фкянь туркс ётай кафта *AB* и *AC* виде китьксненьди *KL* и *MN* перпендикулярхне ётайхть фкя-фкянь туркс (95б тяш.).

Ванцаськ ся случайть, мзярда *AB* и *AC* виде китькснe аф перпендикулярнайхть. Афкукс, *MN* и *AB*-сь кода перпендикуляр и ширемф китькс, конат ётафтфт *AC* виде китькости, ётайхть фкя-фкянь туркс; катк *O* точкась ули синь фкя-фкянь туркс ётама точкасна. Ванцаськ *AON* колмужекстъ; эсонза $1\angle$ — ушестонь и виде уже, $2\angle$ — потмостонь и оржа уже, сяс $1\angle > 2\angle$; тянь коряс лисеньди, што *MN* виде китькссь ули *AB*-ти ширемф китькссокс.



95а тяш.



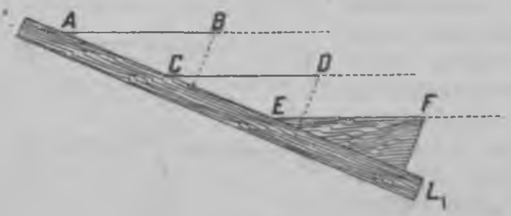
95б тяш.

Тяда меле ванцаськ AB виде китьксти ётафтф MN ширемф китькстъ и KL перпендикулярть, няйсаськ, што KL и MN кода фкя AB види китькстн перпендикуляр и ширемф китькс ётайхть фкя-фкянь туркс.

Ванцаськ башка стама случайхнень, мзярда AB и BC виде китьксне тиихть ношка или виде уже.

§ 5. Линейкань и чёртежнай колмужексонь вельде параллельнай виде китьксонь тяшнемась.

Сяда простой способса параллельнай виде китьксонь тяшнема маштомать пяк оцю значенияц чертёжонь тяшнемста. Сембеда простой способса тяфтама чертёшнень тяшнесазь линейкань и чертёжнай колмужексонь вельде и тя тевсь тиеньдеви соответственнай ужень равенствать коряс, конат ужетне тиевихть кафта параллельнай виде китьксонь туркс колмоце виде китькстъ ётаманц вельде (96 тяш.).



96 тяш.

§ 6. Соответственна параллельнай шире мархта ужетнень свойствасна.

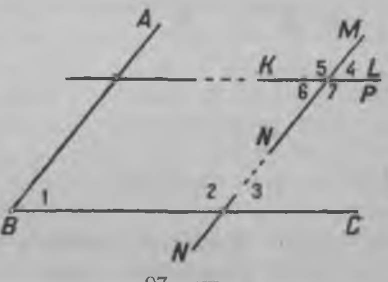
Теорема. **Параллельнай шире мархта ужетне или ровнат, кда нят ужетне кафцьке оржат или кафцьке ношкат, или синь суммасна $2d$, кда фкя ужесь оржа, а омбоцесь — ношка.**

Максф: $B\angle$ — оржа уже, $MN \| AB$ и $KL \| BC$ (97 тяш.).

Эряви няфтемс: 1) $B\angle = 6\angle = 4\angle$;

2) $B\angle + 7\angle = 2d$; $B\angle + 5\angle = 2d$.

Няфтемац. 1) Кувалгафтсаськ P точкать вакссста ужеть фкя ширенц, мярьгтям MN ширеть, мянь BC ширеть туркс ётамс, эста $B\angle = 3\angle$, кода AB и MN параллельнайхнень и BC керы китькстъ вакссга соответственнай ужет, но и $4\angle = 3\angle$ кода BC и KL параллельнайхнень и MN керы китькстъ вакссга соответственнай ужет. Станя лисеньди, эрь $B\angle$ и $4\angle$ башка ровнат $3\angle$, сяс синь ровнат эсь ётковаст: $B\angle = 4\angle$. Но $4\angle = 6\angle$ кода каршек ащихть, сяс $B\angle = 6\angle$. Станя лисеньди, $B\angle = 4\angle = 6\angle$.



97 тяш.

3) $4\angle + 7\angle = 2d$ кода смежнай ужет и $4\angle = B\angle$ кода параллельнай шире мархта оржа ужет. Кда васеньце равенстваса

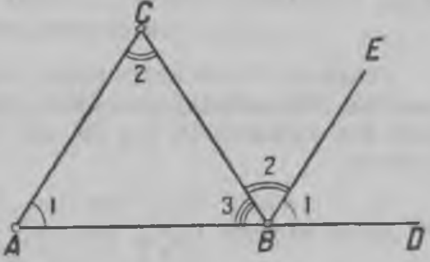
$4\angle$ полафтсаськ тейнза ровна B ужеса, лиси $B\angle + 7\angle = 2d$. Кда тяда меле полафтсаськ мекпяльдень равенстват эзда $7\angle$ тейнза ровна 5 ужеса, лиси $B\angle + 5\angle = 2d$.

7 §. Колмужекстť ужензон свойствасна.

Теорема. **Кодама кельк колмужекстť потмостонь ужензон суммасна ровна $2d$.**

Максф: $ABC\triangle$ эса A, B и C ужетне (98 тяш.).
Эряви няфтемс: $A\angle + B\angle + C\angle = 2d$.

Няфтемац. Кувалгафтсаськ ABC колмужекстť AB ширенц и сонь B прянц ланга ётафттама виде китькс $BE \parallel AC$.



98 тяш.

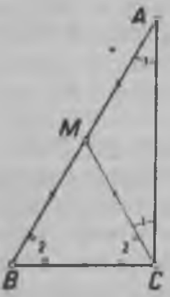
B точкать ваксста ужетнень суммасна равна $2d$, лиякс мярьгемс $1\angle + 2\angle + 3\angle = 2d$.

Тиемать коряс: 1) $1\angle = A\angle$ кода соответственнай ужет, 2) $2\angle = C\angle$ кода накрест ащи ужет, 3) $3\angle = B\angle$.

Но $1\angle + 2\angle + 3\angle = 2d$, сяс и $A\angle + B\angle + C\angle = 2d$.

Следствият. **1. Колмужексса аш кода улемс фкяда лама виде или ношка уже.**

Афкукс, колмужекстť сембе ужензон суммасна ровна $2d$ и кда эздост фкясь ровна d или d коряс сяда оцю, эста кафта лядыкс ужетнень суммасна ули соответственно ровна d или d коряс сяда ёмла, и сяс, лядыкс ужетнень эзда эрь ужесь ули d коряс сяда ёмла.



98а тяш.

2. Видеужень колмужекстť оржа ужензон суммасна ровна d.

3. Кда фкя колмужекстť кафта уженза ровнат омбоце колмужекстť кафта ужензонды, эста нят колмужекснень колмоцень ужесновок улихть фкя-фкянь мархта ровнат.

4. Колмужекстť ушестонь ужец ровна потмостонь ужетнень суммасонды, конат аф смежнайхть мархтонза (98 тяш.), а сяс сон сяда оцю потмостонь эрь ужеть коряс, кона аф смежнай сонь мархтонза.

5. Колмужекстť ушестонь ужензон суммасна ровна $4d$.

Афкукс, колмужекстť эрь прянц ваксса ушестонь и потмостонь ужетнень суммасна ровна $2d$; лисеньди, што колмужекстť сембе ушестонь и потмостонь ужетнень суммаснон эса $6d$, а сяс мес аньцек потмостонь ужетнень суммаснон эса $2d$, эста сембе ушестонь ужетнень суммаснон эса $6d - 2d = 4d$.

6. Ровнаширень колмужекстť эрь уженц эса 60°, или $\frac{2}{3}d$.

7. Видеужень колмужексса ся катетсь, кона ащи 30° ужеть каршеса, ровна гипотенузать пяленцты.

Афкукс, видеужень ABC колмужексса (98а тяш.) A ужеть эса 30°, а сяс B ужеть эса 60°. BA гипотенузать кувалмос ункстатама керфкс $BM=BC$ и C-ть поладсаськ виде китькса M-ть мархта. Эста $MBC\,\triangle$ — равнобедреннай и $BMC\angle=BCM\angle=60°$, тянь коряс лисеньди, сон ровнаширень, лиякс мярьгемс $BC=BM=MC$.

$ACM\angle=90°-60°=30°$, и сяс $CMA\,\triangle$ — равнобедреннай, сяс мес $ACM\angle=MAC\angle$; лисеньди, што $MC=MA$. Лисеньди $BC=BM=MC=MA$ и $BC=\frac{1}{2}AB$.

8 §. Соответственно перпендикулярнай шире мархта ужетнень свойствасна.

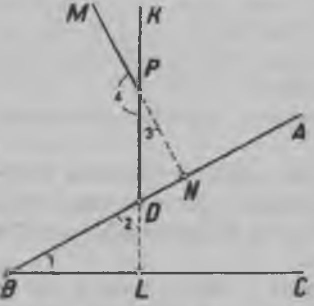
***Теорема.* Соответственно перпендикулярнай шире мархта ужетие или ровнат, кда синь кафцьке оржат или кафцьке ношкат, или суммаснон эса $2d$, кда эздост фкясь оржа, омбоцесь — ношка.**

Максф: $B\angle$ — оржа уже; $MN\perp AB$ и $KL\perp BC$ (99 тяш.).

Эряви няфтемс: 1) $B\angle$ ровна $3\angle$ или $MPK\angle$;

2) $B\angle+4\angle=2d$ или $B\angle+KPN\angle=2d$.

Няфтемац. 1) Ванцаськ BDL и PDN виде ужень колмужекснень; синь $BDL\angle=PDN\angle$, сяс, $1\angle=3\angle=MPK\angle$, станя лиси нят ужетне оржат и ровнат.



99 тяш.

Ваномс башка эрь случайть, мзярда ужеть P пряц ащи: 1) максф B ужеть потмоса, 2) максф B ужеть ушеса тяфтаня, што сонь ширенза ётайхть максф ужеть ширензон кувалгафтф песнон туркс.

2) Штоба няфтемс, што оржа $B\angle+4\angle=2d$, ванцаськ P точкать ваксса ащи 3 и 4 ужетнень. $3\angle+4\angle=2d$, но $3\angle=B\angle$; кда васеньце равенствать эса $3\angle$ полафтсаськ тейнза ровна $B\angle$. лиси: $B\angle+4\angle=2d$, лиякс мярьгемс, максф $B\angle$ и сяка жа P точкать ваксса ащи ношка ужеть, конань, ширенза перпендикулярнайхть $B\angle$ ширензонды, суммаснон эса $2d$.

9 §. Параллельнай виде китьксонь керфкснень свойствасна, конат китькснень туркс ётайхть параллельнай виде китькст.

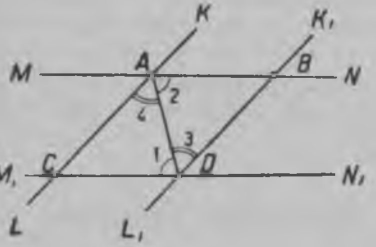
1. *Теорема.* Кафта параллельнай виде китьксонь керфксне, конат китькснень туркс ётайхть параллельнай виде китькст, ровнат.

Максф: $MN \parallel M_1N_1$ и $KL \parallel K_1L_1$ (100 тяш.).
Эряви няфтемс: $AB = CD$ и $AC = BD$.

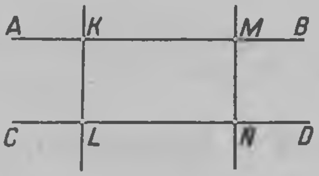
Нятемац. A и D точкатнень поладсаськ виде китькcса и варжасаськ ABD и ACD колмужекснень. Синь ровнат, сяс мес синь: 1) AD — марстонь ширесна, 2) $1\angle = 2\angle$ кода накрест ащи ужет, 3) $3\angle = 4\angle$ кода накрест ащи ужет.

Мес ровнат нят колмужексне, сяс ровнат соответственнай ширетне, а сяс: 1) $AB = CD$ кода ровна 3 и 4 ужетнень каршеса ащи ширет и 2) $AC = BD$ кода ровна 1 и 2 ужетнень каршеса ащи ширет.

2. *Ся перпендикулярть кувалмоц, кона ётафтф фкя параллельнай виде китькcть кодамавок точкастонза омбоце китькcть лангс, эсь эсонза няфтьсы кафта параллельнай виде китькснень ёткста расстояниять.*



100 тяш.



101 тяш.

Следствия. **Параллельнай виде китьксне сембе кувалмосост ащихть фкя-фкянь эзда фкяньшка расстоянияса.**

Максф: $AB \parallel CD$ (101 тяш.).
Эряви няфтемс: $KL = MN$.

Нятемац. KL и MN перпендикулярхне, конат ётафтфт CD виде китькcть лангс AB виде китькcть кафта кодамовок K и M точкаста, параллельнайхть: $KL \parallel MN$. Но кда $KL \parallel MN$, эста синь улихть параллельнай AB и CD виде китькснень ёткса параллельнай керфксокс, и, сяс, синь ровнат: $KL = MN$.

3. Кда керфкссь параллельнай виде китькcти, эста тя виде китькcть лангс сонь проекцияц ули ровна эстейнза керфксти.

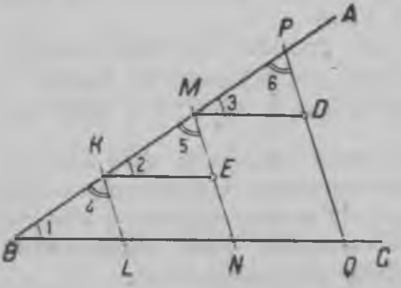
Афкукс, кда керфкссь $KM \parallel CD$ (101 тяш.), эста KM керфкссь и сонь LN проекцияц ровнат кода параллельнай стама виде китьксонь керфкст, конат виде китькснень туркс ётайхть параллельнай виде китькст.

4. ***Теорема.*** **Кда ужеть фкя ширенц кувалмос сонь прянц эзда сявемок ункстамс ровна керфкст и синь певаст ётафтомс параллельнай виде китькст мянь ужеть омбоце ширенц туркс ётамс, эста тя ширеть лангса тиевихть керфкст, конат эсь ётковаст ровнат.**

ABC ужеть BA ширенц кувалмос ункстатама ровна керфкст: $BK = KM = MP$ (102 тяш.) и K, M и P точкатнень ланга ётафттама параллельнай виде китькст: $KL \parallel MN \parallel PQ$.

Максф: $BK = KM = MP$; $KL \parallel MN \parallel PQ$.
Эряви няфтемс: $BL = LN = NQ$.

Няфтемац. K и M точкатнень ланга ётафттама виде китькст: $KE \parallel BC$ и $MD \parallel BC$ и ванцаськ лисикс BKL, KME и MPD колмужекснень. Синь ровнат фкянь ширеснон и нят ширетненьди прилежащай кафтонь ужеснон коряс, сяс мес $BK = KM = MP$ тяштемать коряс, $1\angle = 2\angle = 3\angle$ и $4\angle = 5\angle = 6\angle$ кода соответственнай ужет.



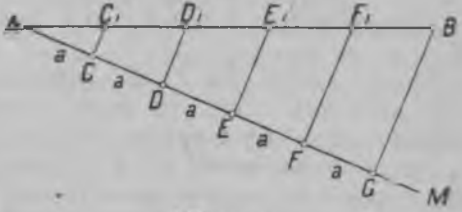
102 тяш.

Тят колмужексне ровнат, сяс ровнат сят ширетневок, конат ащихть ровна 4, 5 и 6 ужетнень каршеса, а сяс $BL = KE = MD$. Но 1) $KE = LN$ и $MD = NQ$ кода параллельнаень ёткста параллельнайхнень керфкссна и 2) няфтемань коряс $KE = MD = BL$, а сяс $LN = NQ = BL$.

10 §. Керфкснень ровна пялькскова явомасна.

Циркулень и линейкань вельде минь машттама керфкст явома 2, 4, 8, 16 и ст. тов ровна пялькскова. Тяни ванцаськ керфкст мзяра-мзяра ровна пялькскова явоманц, кепетьксоньди сявемс 3, 4, 5, 6, 7 и ст. тов пялькскова.

Задача. *AB керфкстъ явомс 5 ровна пялькскова* (103 тяш.).



103 тяш.

Тиемац. AB керфкстъ A пенц ланга тяштьтяма тейнза кодамовок ужень коряс лезды (вспомогательнай) AM виде китькс и A пряста кувалмованза ункстатама кодамовок кувалмоса $AC = a$ керфкс ветекстъ: $AC = CD = DE = EF = FG = a$. Мекпяльдень керфкстъ G пенц поладсаськ AB керфкстъ B пенц мархта и явома C, D, E, F точкатнень ланга тяштьтяма виде китькст, параллельнайхть BG, конат явсазь AB керфкстъ эсь ётковаст 5 ровна пялькскова: $AC_1 = C_1D_1 = D_1E_1 = E_1F_1 = F_1B$.

Тиемать виденц няфнесазь ингельце теоремать коряс.

Кизефкст и упражненият.

1. Кодама вывод ули кода тиемс тя сёрмадфть колга: лапш лангса максф $AB \perp MN$ и $CD \perp MN$? Тяштемс чертёж.

2. Максф, што $AB \perp KL$ и $AB \parallel CD$. Кодама вывод ули кода тиемс нят фкя лапш лангса ащи виде китькснень фкя-фкяньди ащемаснон колга? Ответть няфтемс чертёж вельде.

3. Лувомс сембе ужетнень величинаснон, конат тиевсть кафта параллельнай виде китьксненень туркс керы китьксонь ётамста, кда 1) ужетнень эзда фкясь колмокстъ сяда оцю мархтонза смежнай ужеть коряс; 2) фкя ужесь 22°30′-да сяда ёмла омбоцеть коряс; 3) фкя ужесь омбоце ужеть 0,8 пялькссоц; 4) кафта смежнай ужетнень разностьсна ровна 37°.

4. Максф: $AB \parallel CD$ и EF — керы китькс. Няфтемс, што биссектрисатне: 1) AB и CD виде китьксненъ ваксста кафта ровна ужетнень параллельнайхть; 2) кафта аф ровна ужетнень перпендикулярнайхть.

5. Няфтемс, што *равнобедреннай видеужень колмужексса h_c серьсь ровна с гипотенузать пяленцты.*

6. Видеужень колмужексса ётафтомс сонь оржа ужензон биссектрисанзон и няфтемс, што биссектрисатнень ёткста ужесь ровна 135°.

7. Лувомс колмужекстъ ушестонь и мархтонза смежнай потмостонь ужетнень величинаснон, кда содаф, што синь ащихть эсь ётковаст станя, кода: 3:2; 4:5; 11:7; 5:13, и сёрмадомс, мзяроньди ули ровна кафта потмостонь ужетнень суммасна.

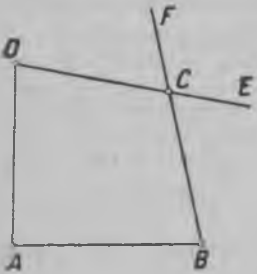
8. Лувомс колмужекстъ ужензон величинаснон, кда содаф, што синь эсь ётковаст ащихть станя, кода 1:2:3. Няфтемс, ули ли кода колмужекстъ ширензонды ащемс эсь ётковаст станя, кода 1:2:3.

VIII. НИЛЕУЖЕКСТ И ЛАМУЖЕКСТ.

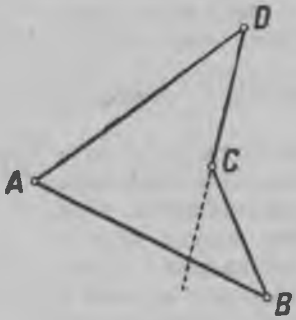
1 §. Нилеужекст.

1. *Нилеужекссь ули лапш фигура, кона перяф замкнутай синнеф стама китькссa, кона ащи ниле керфкссста.*

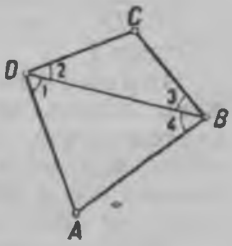
Нилеужекстъ сембе ширензон кувалмоснон суммаснонды мярьгихть нилеужекстъ периметрац. Нилеужекст улихть: ушу мяньдьфт (выпуклайхть) (104 и 106 тяш.) и аф выпуклайхть (105 тяш.).



104 тяш.



105 тяш.



106 тяш.

Тяда меле минь карматама ванондома аньцек ушу мяньдьф (выпуклай) нилеужекст.

Выпуклай нилеужекс мярьгихть стама нилеужексти, конань потмостонь эрь ужец келептьф ужеть коряс сяда ёмла, лиякс мярьгемс, $2d$ коряс сяда ёмла. Выпуклай ламужекссь ащи ламужекстъ кодама кельк фкя ширенц эзда фкя ширеса.

Нилеужекстъ, кода и колмужекстъ, эрь прянц тейса ули кода тяштемс кафтонь ушестонь ужет, $DCF\angle$ и $BCE\angle$ (104 тяш.), конат ровнат, но корхтайхть, кода и колмужексса, аньцек фкянь колга; сяс лувондсазь, што нилеужекстъ улихть аньцек ниле ушестонь уженза, тя тняра жа, мзяра сонь прядонза, ширедонза и ужедонза.

2. *Теорема.* Нилеужексть потмостонь ужензон суммасна ровна 360°, или 4*d*.

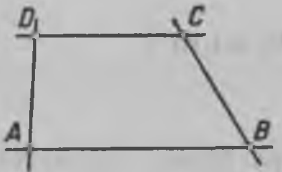
Максф: $ABCD$ нилеужексса A, B, C и D ужетне (106 тяш.).

Эряви няфтемс: $A\angle + B\angle + C\angle + D\angle = 4d$.

Няфтемац. Тяштьтяма BD диагональ; сон явсы нилеужексть кафта колмужексова. Эрь колмужексть потмостонь ужетнень суммасна ровна $2d$, сяс кафцьке колмужекснень, или $ABCD$ нилеужексть, потмостонь ужетнень суммасна ровна $2d \cdot 2 = 4d$.

3. *Теорема.* Нилеужексть сембе ушестонь ниле ужетнень суммасна ровна 360°, или 4*d*.

Афкукс, нилеужексть эрь прянц тейста ушестонь ужеть и потмостонь ужеть суммасна ровна $2d$; лисеньди, што нилеужексть ушестонь и потмостонь сембе ужензон суммассна $8d$, а нилеужексть потмостонь ужензон суммасна ровна $4d$, сяс ушестонь ужензон суммасна ровна $8d - 4d = 4d$.



107 тяш.

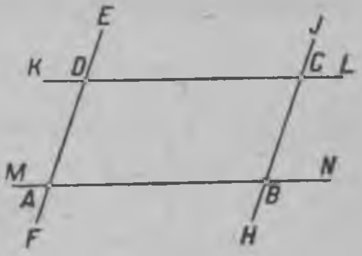
Кодама кельк нилеужексть ушестонь ужетнень суммасна, кода сонь и потмостонь ужетнень суммасна, ровна $4d$.

4. Нилеужекснень эзда синь каршек ащи ширеснон ащемаснон вельде эсь формаснон коряс сяда содафт кафта лацотне: трапециясь и параллелограммась.

Трапециясь — нилеужекс, конань эса кафта каршек ащи ширетне параллельнайхть.

$ABCD$ нилеужекссь — трапеция (107 тяш.).

Параллелограмась — нилеужекс, конань каршек ащи ширенза кафтонь-кафта параллельнайхть. Сон тиеви, кда кодамовок кафта параллельнай KL и MN китькснень туркс ётафтомс лият кафта параллельнай EF и JH китькст (108 тяш.).



108 тяш.

$ABCD$ нилеужекссь — параллелограма.

2 §. Параллелограмась и сонь свойстванза.

1. Параллелограмать основанияц и серец. Параллелограмать кафта кодамовок параллельнай ширензон сявеньдсазь тейнза основаниякс, кепетьксонди $ABCD$ параллелограмать эса (109 тяш.) AB и DC виде китькснень; синь ёткстост расстоянияти, конань унксnесазь перпендикулярса, мярьгихть параллелограмать серец; серьть ётафнесазь параллелограмать прянзон эзда фкя прянц ланга; DE и DF — $ABCD$ параллелограмать кафта разнай серьнза.

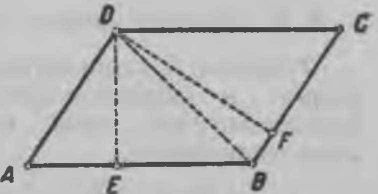
2. Параллелограмать ширензон свойствасна.

Теорема. **Параллелограммать каршек ащи ширенза кафтонь-кафта ровнат.**

Максф: $ABCD$ — параллелограмма; $AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$.

Эряви няфтемс: $AB = DC$, $AD = BC$.

Максф теоремать видец лисеньди видеста тяфтама теоремаста: параллельнайхнень ёткста параллельнай китьксонь керфксне ровнат.



109 тяш.

3. Параллелограмать ужеизон свойствасна.

Теорема. **Параллелограмать каршек ащи уженза ровнат, а фкя ширенцты прилежащай ужетнень суммасна ровна $2d$, лиякс мярьгемс, синь пополнительнай ужет.**

Тя теоремать видец лисеньди соответственно параллельнай шире мархта ужетнень свойствaснон колга теоремать эзда.

Следствия. **Кда параллелограмать ужензон эзда фкясь виде уже, эста сонь сембе уженза видет.**

Параллелограмать ужензон азондф свойствaснон коряс сонь башка ужензон величинаснон лувомаснон инкса саты содамс аньцек фкя ужеть величинанц.

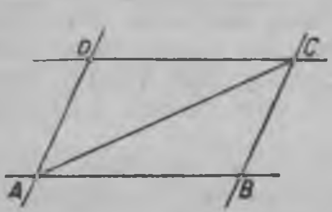
4. Параллелограмать диагоналензон свойствасна.

Теорема. **Диагональсь явсы параллелограмать кафта ровна колмужексова.**

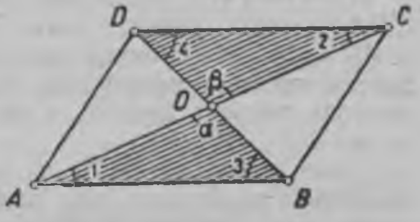
Максф: $ABCD$ — параллелограма; AC — сонь диагоналец (110 тяш.)

Эряви няфтемс: $ABC\triangle = CDA\triangle$.

Няфтемац. ABC и CDA колмужекснень эса улихть колмонь соответственно ровна ширесна: $AB = DC$ и $BC = AD$, кода параллелограмань каршек аши ширет, а AC диагональсь ули синь марстонь ширесна, сяс $ABC\triangle = CDA\triangle$.



110 тяш.



111 тяш.

Теорема. **Параллелограмаса диагональхне фкя-фкянь туркс ётама точкасост явовихть кучкава.**

Максф: $ABCD$ — параллелограма; AC и BD — диагональхть (111 тяш.).

Эряви няфтемс: $AO = OC$ и $BO = OD$.

Няфтемац. Ванцаськ AOB и DOC колмужекснень; $AB = DC$ кода параллелограмать каршек ащи ширенза, $1\angle = 2\angle$ и $3\angle = 4\angle$

кода потмостонь накрест ащи ужет. Лисеньди, колмужексне ровнат фкянь ширень и тейнза прилежащай кафта соответственно ровна ужень коряс: $AOB\triangle = DOC\triangle$. Колмужексне ровнат, сяс ровнат синь соответственна ащи элементсновок, а сяс $AO = OC$ кода ровна колмужексса ровна ужень, $3\angle$ и $4\angle$, каршеса ащи ширет; $OD = BO$ кода ровна ужень, $1\angle$ и $2\angle$, каршеса ащи ширет.

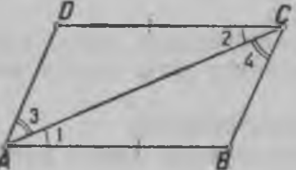
3 §. Мезень коряс содавихть параллелограматне.

Теорема. **Кда нилеужекстъ эса кафта каршек ащи ширетне ровнат и параллельнайхть, эста тяфтама нилеужекссь — ули параллелограма, лиякс мярьгемс сонь лиятка кафта ширенза параллельнайхть.**

Максф: $ABCD$ — нилеужекс; $AB = DC$ и $AB \parallel DC$ (112 тяш.).

Эряви няфтемс: $AD \parallel BC$.

Няфтемац. Тяштьтяма AC диагональ и ванцаськ $ABC\triangle$ и $CDA\triangle$. Нят колмужекснень эса: 1) AC — марстонь ширесна; 2) $AB = DC$ — условиfive коряс; 3) $1\angle = 2\angle$, а сяс $ABC\triangle = CDA\triangle$. Мес ровнат колмужексне, сяс лисеньди, што $3\angle = 4\angle$; нят AD и BC виде китьксне нь и AC керы китькстъ ваксса ащи потмостонь накрест ащи ужет, а сяс $AD \parallel BC$.



112 тяш.

2. ***Теорема.*** **Кда нилеужекстъ эса каршек ащи ширетне кафтонь-кафтонь ровнат, эста тя нилеужекссь арси параллелограмакс, лиякс мярьгемс сонь ширенза кафтонь-кафта параллельнайхть**

Максф: $ABCD$ — нилеужекс; $AB = DC$ и $AB = DC$ (112 тяш.).

Эряви няфтемс: $AB \parallel DC$ и $AD \parallel BC$.

Няфтемац. Тяштьтяма AC диагональ и ванцаськ $ABC\triangle$ и $CDA\triangle$; синь ровнат: синь AC — марстонь ширесна; $AB = DC$ и $AD = BC$. Мес ровнат нят колмужексне, сяс ровнат синь соответственна ащи ужесновок, именно: $1\angle = 2\angle$; нят ужетне потмостонь накрест ащихть, а сяс $AB \parallel DC$; тяда башка, $3\angle = 4\angle$, а сяс $AD \parallel BC$.

Станя лисеньди, $AD \parallel BC$ и $AB \parallel CD$, лиякс мярьгемс, $ABCD$ нилеужекстъ каршек ащи ширенза кафтонь-кафтонь параллельнайхть; сяс тяфтама нилеужекссь — параллелограма.

3. ***Теорема.*** **Кда нилеужексса диагональхне фкя-фкянь явихть кучкава, эста тяфтама нилеужекссь ули параллелограма, лиякс мярьгемс, сонь каршек ащи ширенза кафтонь-кафтонь параллельнайхть** (111 тяш.).

Максф: $ABCD$ — нилеужекс; AC и BD — диагональхть;
$AO = OC$ и $BO = OD$.

Эряви няфтемс: $AD \parallel BC$ и $AB \parallel CD$, лиякс мярьгемс, $ABCD$ — параллелограма.

Няфтемац. Ванцаськ AOB и DOC колмужекснень, конатнень эса улихть диагональхнень AO и OC, BO и OD керфкссна и AB и DC ширетне. Нят колмужекснень эса: $AO = OC$ и $BO = OD$ условиять коряс и $\alpha\angle = \beta\angle$ кода каршек ащи ужет; сяс $AOB\triangle = DOC\triangle$; мес ровнат нят колмужексне, сяс ровнат ровна ширень каршеса ащи ужетне, а именна: $1\angle = 2\angle$ и $3\angle = 4\angle$; но нят ужетне накрест ащихть, а сяс $AB \parallel DC$. Кда ванцаськ AOD и COB колмужекснень, няйсаськ, што синь ровнат и $AD \parallel CB$.

Тяфта лисеньди, што $AD \parallel BC$ и $AB \parallel CD$ арсихть $ABCD$ нилеужексса каршек ащи ширекс, синь кафтонь-кафтонь параллельнайхть, $ABCD$ — параллелограма.

Няфтьф признакть коряс тиеньдсазь параллелограмать, мзярда максфт сонь кафта m и n диагоналенза и синь ёткcост ащи $\alpha\angle$. Тя свойствать коряс циркулень и линейкань вельде, параллельнай китьксонь аф тяшнезь, тиеньдихть параллелограмат.

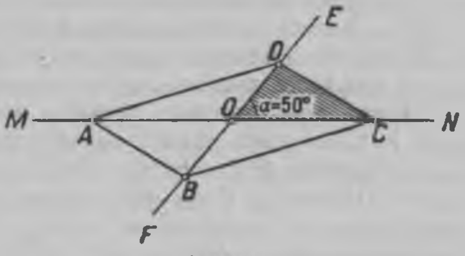
4 §. Кода тиеньдсазь параллелограмать.

1. 1-це задачась. *Тиемс параллелограма, кда максфт сонь $m = 10$ см кувалмоса диагоналец и сонь ширенза: $a=6$ см и $b=7$см.*

Тиемац. Тиемс колмужекс сонь колма a, b и m ширензон коряс, а тяда меле пяшкедемс сонь мянь параллелограмас молемс.

2-це задачась. *Тиемс параллелограма сонь $a=5$ см, $b=4$ см кувалмоса ширензон коряс и $C\angle = 40^0$ коряс.*

Тиемац. Васенда тиемс колмужекс сонь кафта a и b ширензон и ёткcост ащи C уженц коряс, а тяда меле пяшкедемс колмужекcть мянь параллелограмати молемс.



113 тяш.

3-це задачась. *Тиемс параллелограма сонь кафта $m = 6$ см и $n = 10$ см диагоналензон и ёткcост ащи $\alpha = 50^\circ$ ужеть коряс.*

Тиемац. Ётафтомс (113 тяш.) фкя-фкянь туркс ётай кафта MN и EF виде китькст, конатне тиихть 50° уже, и фкя-фкянь туркс ётама O точкать эзда кафцьке шири эрь виде китькcть лангс ункстатама керфкст, конат соответственно ровнат максф диагональхнень пялеснонды, и тяда меле лисикс керфкснень песнон поладсаськ виде китькcа: лисикс $ABCD$ нилеужекссь — параллелограма.

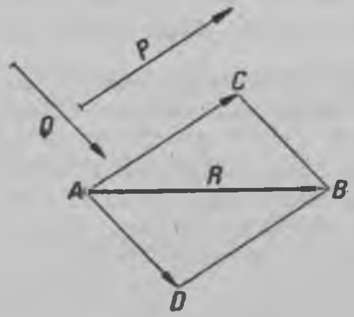
4-це задачась. *Тиемс параллелограма сонь m и n диагоналензон и a ширенц коряс.*

Тиемац. Задачать решандамац арси колма a, $\frac{m}{2}$ и $\frac{n}{2}$ ширензон коряс колмужекcть тяштеманц лаца (113 тяш.).

Задачась тиеви, кда $\frac{m}{2}-\frac{n}{2}<a<\frac{m}{2}+\frac{n}{2}$.

5-це задачась. *Тиемс параллелограма сонь R диагоналенц коряс, конань максф кувалмоц и направленияц и сонь P и Q ширензон максф направленияснон коряс* (114 тяш.).

Тиемац. $AB=R$ диагональть, конань максфт кувалмоц и направленияц, A пезонза тяштьтяма виде китькст, конат параллельнайхть ширензон максф направленияснонды. Тяда меле диагональть омбоце пенц — B точкать — ланга тяштьтяма виде китькст, конат параллельнайхть нят жа кафта направleниятненьди. Тяштьф виде китьксть фкя-фкянь туркс ётама точкатне няфтьсазь параллелограмать лият кафта прянзон вастснон.



114 тяш.

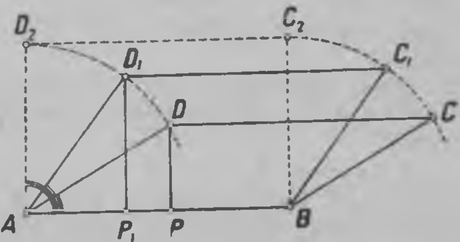
2. Нят случайхне параллелограмань тиемс сембеда эрявихне. Сяс колмужекснень эзда, конатне тиевихть параллелограмать фкя диагональса или кафцьке диагональхнень эса явомста, фкя колмужексть тиеманц вельде муви марнек параллелограмась.

Тяста лисеньдихть параллелограматнень равенствань тяфтама признаксна. Параллелограматне ровнат, кда ровнат синь элементсна:

1) кафта смежнай ширетне и ётксост ужесь,
2) кафцьке диагональхне и ётксост ужесь,
3) кафта смежнай ширетне и диагональсь,
4) кафцьке диагональхне и ширесь.

Эряви аф юкстамс, штоба лувомс параллелограмать ужензон, саты содамс эздост аньцек фкять величинанц.

3. Задача. Шарнирнай $ABCD$ параллелограмать вельде ванондомс (115 тяш.), кода фкя уженц, кепетьксоньди сявемс A уженц, полафнемста полафневи параллелограмать DP серец и сонь периметрац.



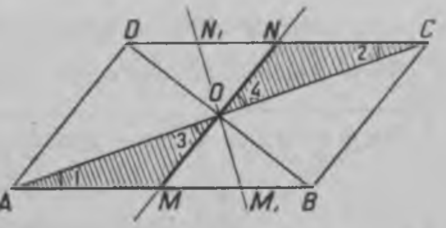
115 тяш.

Ванондомац. Мзярда полафневи параллелограмать A ужец, полафневи сонь DP серецка, эста сон оцюкстоми, кда $A\angle$ оцюкстоми 90° молемс, и ёмлалгады, кда $A\angle$ кири 0° молемс; мзярда $A\angle=0°$ параллелограмась аш ни, сонь шиKенза фкя-фкянь вельхнихть и параллелограмась арай виде китьксонь керфксокс, конань кувалмоц ровна параллелограмать кафта смежнай ширензон суммаснонды.

Мзярда $A\angle=90°$, параллелограмать сембе уженза улихть видет и сонь DP серец ули сембеда оцю. Параллелограмать периметрац сембе нят пингста аф полафневи, лиякс мярьгемс, сон ули постояннайкс.

5 §. Центральнай симметриясь.

1. $ABCD$ параллелограмать эса (116 тяш.) сонь диагонализон фкя-фкянь туркс ётама O точкать ланга ётафтф кодамовок виде китькс, кона ётай кафта параллельнай ширензон туркс M и N точкаса. Няфтемс, што MN керфкссь O точкаса янови кучкава.

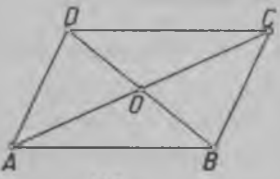


116 тяш.

Афкукс, AOM и ONC колмужексне ровнат, сяс мес $AO = OC$, $1\angle = 2\angle$ кода накрест ащихть и $3\angle = 4\angle$ кода каршек ащихть; мес колмужексне ровнат, сяс лисеньди, што $OM = ON$.

Тяфта лисеньди, кодамовок керы виде китькстъ керфксоц, кона ащи параллелограмать каршек ащи ширензон ёткса и ётай диагональхнень фкя-фкянь туркс ётама O точкать ланга, тя точкаса янови кучкава.

2. $ABCD$ параллелограмаса (117 тяш.) ётафтсаськ сонь AC и BD диагональснон; синь ётайхть фкя-фкянь туркс O точкаса; тиевихть 4 колмужекст. Чертёжть лапш лангса фкять эздост, мярьгемс $AOB\triangle$, шарфтсаськ O точкать перьф 180 градусда, эста B прясь вельхтясы D прять ($OB = OD$) и A прясь вельхтясы C прять ($OA = OC$); AOB и COD колмужекснень сембе колмицьке прясна фкя-фкянь вельхтясть; сяс синьцкя колмужексне фкя-фкянь вельхтяйхть. Тяфта жа уленьди BOC и DOA колмужекснень и ABC и CDA колмужекснень мархта, станя жа уленьди $MBCN$ и $NDAH$ нилеужекснень мархта (116 тяш.).



117 тяш.

3. Кафта A и C, B и D точкатненьди, AB и CD, BC и DA, AO и OC, OB и OD керфксненьди и кафта $AOB\triangle$ и $COD\triangle$, $ABC\triangle$ и $CDA\triangle$ фигуратненьди мярьгихть O точкать колга центрально-симметричнайхть, кда перьфканза 180°-да шарфтомста (фигуратнень ащема лапш лангть лангса) фкясь эздост вельхтясы омбоцеть.

Фигурати мярьгихть центрально-симметричнай, кда максф O точкать перьф 180°-да шарфтомста сонь эрь пяльксоц занясы ся вастть, конань тяда ингеле заньцезе омбоце пяльксоц. Омбоце O точкати, конань перьф лапш лангса шарфтсазь 180°-да фигурать, мярьгихть симметриянь центра.

4. Ся параллелограмась ули центрально-симметричнай фигура, конань симметриянь центрац сонь диагоналензон фкя-фкянь туркс ётама точкаса.

5. Параллелограмать аш симметриянь осенза.

6 §. Колмужексть кучкастонь китьксоц.

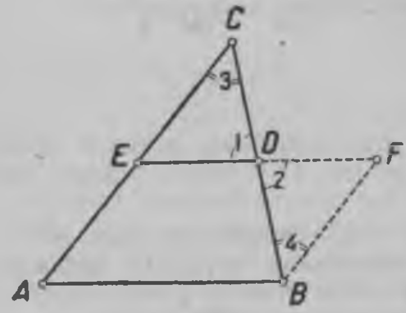
Ся керфксти, конаньди пекс арсихть колмужекстъ кафта ширензон кучкасна, мярьгихть колмужекстъ кучкастонь китьксоц.

Теорема. **Колмужекстъ кучкастонь китьксоц параллельнай колмоце ширети и ровна сонь пяленцты.**

Максф: ABC — колмужекс; $AE = EC$ и $BD = DC$ (118 тяш.).

Эряви няфтемс: $ED \parallel AB$ и $ED = \frac{1}{2} AB$.

Няфтемац. ED-ть кувалгафтф пенц кувалмос ункстатама DF керфкс, кона ровна ED-ти, и F точкать поладсаськ B точкать мархта. Лиси $BDF\triangle$, кона ровна $CED\triangle$, сяс мес $CD = BD$, $ED = DF$ и $1\angle = 2\angle$. Мес ровнат нят колмужексне, сяс лисеньди, што $3\angle = 4\angle$, а сяс $BF \parallel EC$, или $BF \parallel AC$, тяда башка $BF = EC = AE$, лисеньди, што $ABFE$ нилеужекссь — параллелограма, сяс мес сонь каршек ащи BF и AE ширенза ровнат и параллельнайхть. Сяс, $EF \parallel AB$ и $EF = AB$, но $EF = ED + DF = 2ED = AB$, а сяс $ED = \frac{1}{2} AB$.



118 тяш.

7 §. Видеужекс. Сонь свойстванза.

1. Кда ётафтомс кафта параллельнай KL и MN виде кить кст и, виде ужень тиезь ётафтомс синь туркскаст кафта параллельнай EF и HQ виде китькст (119 тяш.), эста параллельнай виде китьксненъ ёткста керфксне тиихть виде уже мархта $ABCD$ параллелограма; тяфтама параллелограмати мярьгихть видеужекс. Тяфтаня лисеньди, **видеужекссь — видеужень параллелограма.**

119 тяш.

Видеужекстъ эса, кона сяка жа пингста ули и параллелограма, улихть сембе сят свойстватне, конат улихть параллелограмать эса.

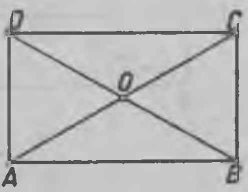
Видеужексса: 1) **каршек ащи ширетне ровнат;** 2) **каршек ащи ужетне ровнат и эздост эрь ужесь ровна виде ужети;** 3) **диагональсь явсы сонь кафта ровна видеужень колмужек-**

сова; 4) диагональхне фкя-фкянь явихть кучкава; 5) сонь диагоналензон фкя-фкянь туркс ётама точкась арси тейнза симметриянь центракс.

Видеужекссть фкя ширенцты мярьгихть сонь основанияц; ся ширенцты, кона смежнай видеужекссть основаниянц мархта, мярьгихть сонь серец.

2. ***Теорема.*** **Видеужекссть диагоналенза ровнат эсь ётковаст.**

Няфтемац. $ABD\triangle$ и $ADC\triangle$ (120 тяш.) — видеуженнет и синь ровнат кафтонь соответственно ровна катетснон коряс: синь AD катетсна марстонь и $AB=DC$ кода видеужекссть каршек ащи ширенза. Колмужекснень равенстваснон эзда лисеньди, што $AC=BD$, лиякс мярьгемс видеужекссть диагоналенза ровнат.



120 тяш.

Тя аф уленьди кичкора ужень параллелограмаса, конань уженза аф видет; сонь диагоналенза аф ровнат и сяс диагональсь, кона поладсыня сонь оржа уженzон пряснон, сяда оцю ся диагональть коряс, кона поладсыня ношка уженzон пряснон.

8 §. Кода тиемс видеужекссть.

Параллелограмать тиеманц инкса эряви содамс сонь колма элементонзон.

Видеужекссть тиемс, кона ули виде уже мархта параллелограма, эряви содамс аньцек сонь китьксонь кафта элементонзон; няфтемс видеужекссть колмоце элементонц—смежнай ширетнень ётксста уженц — аф эряви, сяс мес видеужекссa сембе ужетне видет.

Видеужекс ули кода тиемс, кда максфт:

1) кафта смежнай a и b ширетне,

2) m диагональсь и фкя ширесь,

3) фкя a или b ширесь и ужесь, кона тиевсь диагональть и, максф ширеть ёткса,

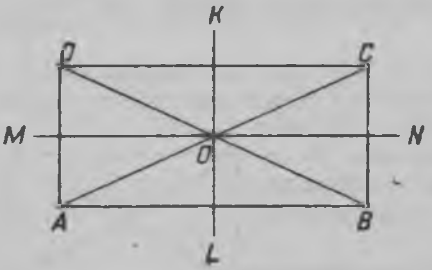
4) m диагональсь и диагональхнень ёткста α ужесь.

Задача. *Тиемс видеужекс $=8$ см диагоналенц и диагоналензон ёткста $\alpha\angle=30^\circ$ коряс.*

Тиемац. Кафта MN и KL виде китьксгнень ётафтсаськ фкя-фкянь туркс тяфтаня, што синь тиихть $\alpha=30^\circ$ уже и синь фкя-фкянь туркс ётама O точкать эзда кафцьке шири ункстатама керфкст конат ровнат $\frac{m}{2}=\frac{8}{2}=4$ *см*, а тяда меле керфкснень песнон поладсайнек эсь ётковаст виде китьксса.

Тяфта лиси нилеужекссь ули видеужекс.

9. §. Видеужекстъ симметриянь осенза.



121 тяш.

Кда $ABCD$ видеужекстъ AC и BD диагоналензон фкя-фкянь туркс ётама O точкать ланга ётафтомс KL и MN виде китькст (121 тяш.), конат соответственно перпендикулярнайхть ширензонды и тяда меле тяштькстъ мяньдьсаськ фкя — KL или MN — виде китькстъ кувалмос, эста чертёжть фкя пялькксоц вельхтясы марнек омбоце пяльксонц, лисеньди, што

1) KL и MN виде китьксне, конат перпендикулярнайхть видеужекстъ ширензонды и конат ётайхть диагональхнень фкя-фкянь туркс ётама точкать ланга, арсихть видеужексти симметриянь осекс;

2) видеужекстъ улихть симметриянь кафта осенза.

Видеужекстъ симметриянь осенц свойстванц эзда лисеньди, што осьсь явсыня сонь каршек ащи ширензон кучкава: ся керфксти, кона поладсыня видеужекстъ каршек ащи ширензон кучкаснон, мярьгихть сонь кучкастонь китьксоц; сон ровна видеужексса тейнза параллельнай ширети.

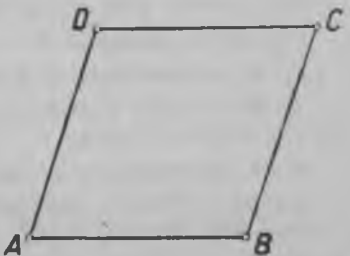
10 §. Ромбась и сонь свойстванза.

1. Ся параллелограмати, конань сембе ширенза ровнат, мярьгихть ромба. **Ромбась — ровнаширень параллелограма.**

Ромбать определениянц эзда лисеньди (122 тяш.):

1) $AB \parallel CD$ и $AD \parallel BC$; 2) $AB = BC = CD = AD$.

2. Ромбать свойстванза. Мес ромбась ровнаширень параллелограма, сяс эсонза улихть сембе сят свойстватне, конат улихть параллелограмать эса.



122 тяш.

Ромбать эса: **1) каршек ащи ужетне ровнат, синь или кафцьке оржат, или кафцьке ношкат; 2) сят ужетне, конат ащихть сонь кодамовок ширенц вакссa, улихть пополнительнай ужет лиякс мярьгемс синь суммасна ровна $2d$; 3) диагональсь явсы сонь кафта ровна и сяка жа пингста равнобедреннай колмужексова; 4) диагональхне фкя-фкянь явихть кучкава; 5) сонь диагоналензон фкя-фкянь туркс ётама точкась ули сонь симметриянь центрац.**

3. *Теорема.* **Ромбать диагоналенза: 1) фкя-фкяньди перпендикулярнайхть; 2) сонь ужензон явсазь кучкава; 3) арсихть**

тейнза симметриянь осекс; 4) явсазь сонь 4 ровна видеужень колмужексова.

Максф: $ABCD$ — ромба; AC и BD — сонъ диагоналенза (123 тяш.).

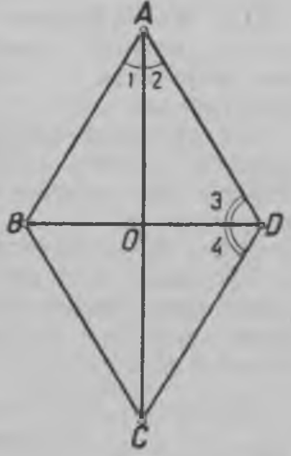
Эряви няфтемс:
1) $AC \perp BD$;
2) $1\angle = \angle 2$; $3\angle = 4\angle$;
3) AC и BD — симметриянь осьт;
4) $AOB\triangle = BOC\triangle = COD\triangle = DOA\triangle$.

Няфтемац. Ванцаськ $ABD\triangle$: сон равнобедреннай: условиять коряс $AB = AD$. Тянь эзда лисеньди, што ромбать AC диагоналец, кона ётафтф колмужексть BD ширенц кучкава, арси ADB колмужексти медианакс, $A\angle$ биссектрисакс, колмужексти серькс и тейнза симметриянь осекс и явсы $ABD\triangle$ кафта ровна видеужень колмужексова—AOB и AOD.

Тяфта лисеньди, 1) $AC \perp BD$; 2) $1\angle = 2\angle$; 3) AC — ромбать симметриянь осец; 4) $AOB\triangle = AOD\triangle$.

Равнобедреннай ADC колмужексть, конань эса $AD = DC$ и DO ётай AC ширеть кучканц ланга, ваномста няйсаськ, што 1) $OD \perp AC$; 2) $3\angle = 4\angle$; 3) DB — ромбать симметриянь осец; 4) $DOA\triangle = DOC\triangle$.

AOB и AOD, AOD и COD, COD и BOC колмужекснень равенстваснон эзда лисеньди, што $AOB\triangle = AOD\triangle = COD\triangle = BOC\triangle$.



123 тяш.

4. Ромбать тяшнесазь сонь диагоналензон свойстваснон вельде: ромбать диагоналенза фкя-фкянь явихть кучкава и фкя-фкяньди перпендикулярнайхть.

124 тяш.

11 §. Кода тиемс ромбать.

1. **1-це задачась.** *Тиемс ромбать сонь a ширенц и $A\angle$ коряс.*

Тиемац. Тихтяма $A\angle$ и сонь ширензон кувалмос прянц эзда ушедозь ункстатама ровна $AB = AD = a$ керфкст. B и D петнень виде китьксса поладозь лисикс $ABD\triangle$ пяшкедьсаськ ромбати молемс.

2-це задачась. *Тиемс ромба т и п диагоналензон коряс.*

Тиемац. Ётафттама кафта фкя-фкяньди перпендикулярнай MN и KL виде китькст (124 тяш.), синь фкя-фкянь туркс ётама O точкаснон сявсаськ ромбать диагоналензон фкя-фкянь туркс ётама точкакс, ункстатама виде китькснень кувалмос O точкать эзда кафцьке шири эсь ётковаст кафтонь-кафтонь ровна керфкст, конат соответственно ровнат эрь диагональть пяленцты: $OA = OC = \frac{m}{2}$ и $OB = OD = \frac{n}{2}$; тяда меле поладсаськ эсь ётковаст керфкснень песнон; станя тиф $ABCD$ нилеуженкссь ули ромба.

2. Штоба тиемс ромба, саты содамс сонь кафта элементонзон: 1) ширенц и уженц, 2) кафцьке диагоналензон, 3) диагоналенц и ширенц, 4) диагоналенц и уженц.

12 §. Квадратсь и сонь свойстванза.

Ся видеуженксти, конань кафта смежнай ширенза ровнат, мярьгихть **квадрат** (125 тяш.).

Видеуженксса каршек ащи ширетне ровнат; квадратса и каршек ащи и смежнай ширетне ровнат:

$AB = BC = CD = AD.$

Лисеньди, што квадратсь— ровна шире мархта видеуженкс, лиякс мярьгемс, **ровнаширень видеуженкс.**

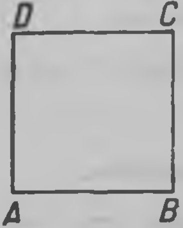
Ся ромбати, конань эса фкя ужесь виде, мярьгихть **квадрат** (125 тяш.).

Ромбаса каршек ащи ужетне ровнат, квадратса каршек ащи ужетне ровнат и видет:

$A\angle = B\angle = C\angle = D\angle = d.$

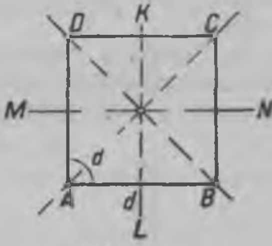
Лисеньди, што квадратсь— ровна уже мархта ромба, лиякс мярьгемс **ровнауженьромба.**

Квадратть эса улихть сембе сят свойстватне, конат улихть видеуженксть и ромбать эса.



125 тяш.

Квадратть эса (126 тяш.): **1) диагональхне фкя-фкянь явихть кучкава, 2) диагональхне эсь ётковаст ровнат, 3) кучкастонь китьксcь арси симметриянь осекс, 4) диагональхне фкя-фкяньди перпендикулярнайхть, 5) диагональхне явсазь сонь эрь уженц кучкава, 6) диагональхне арсихть симметриянь осекс, 7) симметриянь ниле осьт: *AC*, *BD*, *MN* и *KL*.**



126 тяш.

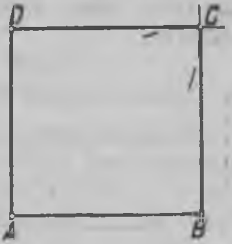
13 §. Кода тиемс квадратть.

1-це задачась. *Тиемс квадрат, конань ширец $a = 2,5$ см* (127 тяш.).

Тиемац. Тиемс виде уже и сонь прястонза сонь ширензон кувалмос ункстамс $a = 2,5$ *см* кувалмоса керфкст; кафцьке керфкснень пестост ётафттама тяфтама жа $a = 2,5$ *см* кувалмоса радиус вельде дугат и дугатнень фкя-фкянь туркс ётама точкать поладсаськ виде китьксса керфкснень песнон мархта. Тиф нилеуженкссь ули квадрат.

Штоба тиемс квадрат, саты содамс аньцек сонь фкя ширенц кувалмонц.

2-це задачась. *Тиемс квадрат сонь $m = 6$ см диагоналенц коряс.*



127 тяш.

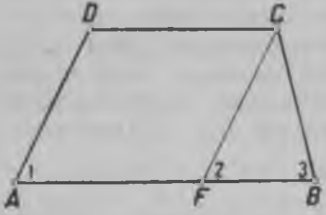
Тиемац. Ётафттама кафта MN и KL виде китькст, конат фкя-фкянь туркс ётамстост тиихть виде уже, и синь фкя-фкянь туркс ётама O точкастост ункстатама кафцьке шири ровна керфкст, а именно: $\frac{m}{2} = 3$ *см* кувалмоса, и керфкснень песнон поладсаськ. Станя тиф нилеужекссь ули квадрат.

Штоба тиемс квадрат, саты содамс аньцек сонь диагоналенц кувалмонц.

И тяфта, штоба тиемс квадрат, саты содамс аньцек сонь ширенц кувалмонц или сонь диагоналенц кувалмонц.

14 §. Трапециясь.

1. $ABCD$ нилеужекксти, конань кафта каршек ащи ширенза параллельнайхть, мярьгихть трапеция.



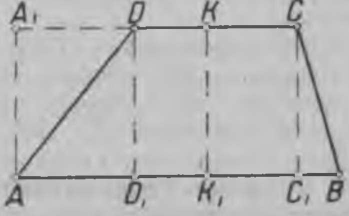
128 тяш.

2. Трапециять параллельнай ширензонды, мярьгихть сонь основаниянза, а лият кафта AD и CB ширензонды, мярьгихть трапециять боконь ширенза.

3. Ся трапецияти, конань боконь ширенза ровнат, мярьгихть равнобедреннай (128 тяш.): $AB \parallel DC$ и $AD = BC$.

4. Ся трапецияти, конань фкя ужец виде, мярьгихть видеужень (129 тяш.); тя трапециять $AB \parallel DC$ и $CB \perp AB$.

129 тяш.



130 тяш.

5. Трапециять основаниянзон ёткста сембеда нюрьхкяня расстояниясь ули ся перпендикулярть кувалмоса, кона ётафтф трапециять фкя основаниянц кодамовок точкаста омбоце основаниять лангс. Тя перпендикулярсь тяка пингста арси трапецияти серькска (130 тяш.) AA_1, DD_1, KK_1 CC_1 серьхне ровнат кода параллельнайнь ёткста параллельнайнь керфкст: $AA_1 = DD_1 = KK_1 = CC_1$.

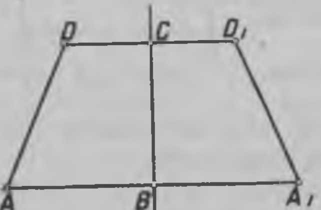
15 §. Равнобедреннай трапециfive свойстванза.

1. ***Теорема.*** **Равнобедреннай трапецияса сят ужетне, конат ащихть сонь кона-кона основаниянц ваксса, ровнат фкя-фкянь мархта.**

Максф: $ABCD$ — трапеция; $AD = BC$ (128 тяш.).

Эряви няфтемс: $A\angle = B\angle$ и $C\angle = D\angle$.

Няфтемац. Тяштьтяма $CF \parallel AD$; лиси $CFB\triangle$; сон равнобедреннай, мес $AD = CF = CB$, а сяс $2\angle = 3\angle$ кода равнобедреннай колмужексонь основаниfive ваксса ащи ужет. Но $2\angle = 1\angle$ кода AD и CF параллельнайхнень ваксса соответственнай ужет, а сяс $1\angle = 3\angle$.



131 тяш.

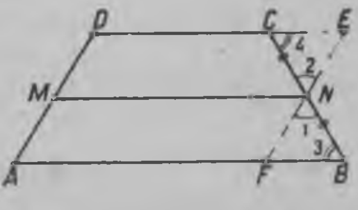
2. Кда видеужень $ABCD$ трапецияса (131 тяш.), конань эса $CB \perp AB$, сявемс CB-ть симметриянь осекс и тяштемс тейнза симметричнай CBA_1D_1 трапеция, эста тяфта тиф AA_1D_1D фигурась ули равнобедреннай трапеция. Тя трапецияса B и C точкатне ащихть AA_1 и DD_1 основаниятнень кучкаса; CB виде китькссь, кона поладсыня нят точкатнень, арси равнобедреннай AA_1D_1D трапецияти симметриянь осекс.

Равнобедреннай трапециять ули симметриянь фкя осец, сон ётай сонь основаниянзон кучкаснон ланга и тейст сон перпендикулярнай; равнобедреннай трапециять параллельнай ширензон кучкастонь китькссна арси трапецияти симметриянь осекс.

16 §. Трапециять боконь ширензон кучкаснон ланга китькссь.

1. *Трапециять боконь ширензон кучкастонь китькссь стама керфкс, конаньди пекс арсихть трапециять боконь ширензон кучкасна.*

$ABCD$ трапецияса (132 тяш.) M точкась — AD ширеть кучкац; N точкась — BC ширеть кучкац; $AM = MD$ и $BN = NC$; MN — трапециять кучкастонь китьксоц.



132 тяш.

2. ***Теорема.*** **Трапециять боконь ширензон кучкаснон ланга китькссь параллельнай сонь основаниянзонды и ровна синь пялесуммаснонды.**

Максф: $ABCD$ трапеция; MN — кучкастонь китькс (132 тяш.).

Эряви няфтемс: 1) $MN \parallel AB \parallel DC$; 2) $MN = \frac{AB + DC}{2}$.

Няфтемац. 1) Кувалгафтсаськ DC ширеть и ётафттама CB кучканц, N точкать, ланга виде китькс $EF \parallel AD$; лисихть кафта колмужекст: $CNE\triangle$ и $FNB\triangle$, синь эсост: 1) $CN = NB$ условиять коряс, 2) $1\angle = 2\angle$ кода каршек ащихть; 3) $3\angle = 4\angle$, кода параллельнайнь ваксса ащи ужет, сяс $CNE\triangle = FNB\triangle$.

Мес ровнат нят колмужексне, лисеньди, што $CE = FB$ и $EN = NF$, или $EN = \frac{EF}{2}$, но EF керфкссь ровна и параллельнай AD, а сяс $EN = \frac{AD}{2} = MD$. Станя лисеньди, што $EN = MD$ и $EN \parallel MD$, сяс $MDEN$ нилеужекссь — параллелограма, коста лисеньди, што $DE \parallel MN$.

Трапецияса $DC \parallel AB$ и няфтьфть коряс $DC \parallel MN$, а сяс $MN \parallel AB$. Станя лисеньди, што $MN \parallel AB \parallel DC$. Теоремать васеньце пяльксоц няфтьф.

2. Ванцаськ $AMNF$ и $DMNE$ параллелограматнень; синь:

$$\begin{array}{l} MN = AF = AB - FB \\ \underline{MN = DE = DC + CE} \\ 2MN = AF + DE = AB + DC - FB + CE, \end{array}$$

но $FB = CE$, а сяс $2MN = AB + DC$, или $MN = \frac{AB + DC}{2}$.

Замечания. Трапециять боконь ширензон кучкаснон ланга ётай китькссь ровна кафцьке основаниятнень средняй арифметическай лувксснонды. Станя, кда трапециять основаниянза соответственно ровнат: $a = 14$ *см* и $b = 8$ *см*, эста трапециять кучкастонь китькcоц $m = \frac{a + b}{2} = \frac{14 + 8}{2} = 11$ *см*.

17 §. Кода тиемс трапециять.

1. Трапециясь мушендови тяфтама ниле элементонзон коряс, конатнень ёткса уленьдихть трапециять фкя или кафта уженза, конат ащихть основаниять ваксса, кепетьксоньди:

1) ниле ширензон коряс,

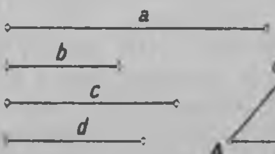
2) кафта основаниянзон, фкя боконь ширенц и фкя уженц коряс,

3) кафта основаниянзон, фкя боконь ширенц и диагоналенц коряс,

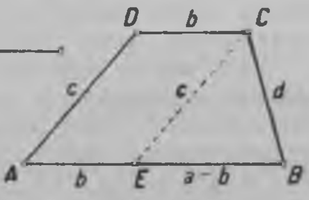
4) кафта основаниянзон, фкя боконь ширенц и серьнц коряс,

5) основаниянц, тейсонза кафта уженсон и серьнц коряс.

2. Равнобедреннай или видеужень трапециянь тиемс эрявихть содамс вяре азф элементтнень эзда аньцек колмотне, конатнень ёткс ули кода лувомс фкя ужеть, сяс мес равнобедреннай трапециять эса ровнат сонь кафта боконь ширенза и основаниять тейста ужетне, а видеужень трапециять кафта уженза видет.



133 тяш.



134 тяш.

3. Задача. *Тиемс трапеция сонь ниле* a, b, c *и* d *ширензон коряс;* a *и* b *— основаниянза,* c *и* d *— боконь ширенза* (133 и 134 тяш.).

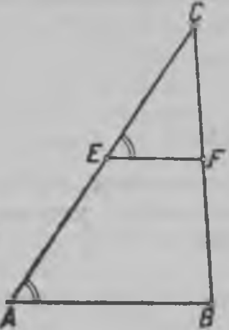
Тиемац. Арьсетяма, што $ABCD$ (134 тяш.) трапециясь тиф. Кандсаськ AD ширеть эсьтейнза параллельнайста CE положенияти, эста трапециясь явови $ADCE$ параллелограмава и BCE колмужексова, конатнень тиемс минь машттама, сяс мес минь улихть синь тиемс сембе эрявикс элементтне: колмужексти — сембе сонь ширенза, $CE=c$, $CB=d$, $BE=a-b$; параллелограмати — $AD=c$ и $AE=b$ и $AEC\,\angle$.

Тяда меле тисаськ тя тиемать. Задачаса максфнень коряс тисаськ $BCE\,\triangle$, кувалгафтсаськ BE, кувалмованза ункстатама $BA=a$ керфкс; A точкать эзда тяштьтяма $AD \parallel CE$, а C точкать эзда тяштьтяма $CD \parallel AB$ и тиевсь вешеньдеви $ABCD$ трапециясь.

Задачась тиеви, кда $c-d<a-b<c+d$.

18 §. Мзяра элементонь коряс содави нилеужекссь.

1. Колма максф элементтнень коряс ули кода тиемс пефтома лама колмужекст, конат эсь ётковаст ровнат и аф фкят аньцек синь ащемаснон колга, но формасна и размерсна фкя; синь сембе улихть фкя и сяка жа колмужексонь кодямот. Эста корхтайхть, што ули кода тяшнемс аньцек фкя колмужекс. Шарьхкедеви, што тяфтама колмужекстьэзда ули кода тяштемс пяк лама копият.



135 тяш.

Содаф, што колмужекс ули кода тяштемс, кда максфт сонь вов кодама колма основной элементонза:

1) фкя ширец и вакссонза ащи кафта ужензa (конатнень суммасна $2d$ коряс сяда ёмла);

2) кафта ширенза и ёткcост ащи ужец (180° коряс сяда ёмла);

3) колма ширенза (конатнень эзда оцюсь лият кафттнень суммаснон коряс сяда ёмла).

Кафта основной элементтнень коряс определённай формаса и размерса колмужекс аф тиеви. Кепетьксоньди сявемс, кафта максф ширензон коряс, ширенц и уженц коряс ули кода тиемс пефтома лама колмужекст, конат фкя-фкянь эзда лият эсь формаснон и эсь размерснон коряс, а кафта максф ужензон коряс ули кода тиемс пефтома лама колмужекст, конат фкя-фкянь эзда лият эсь размерснон коряс.

Катк максф, мярьгемс, ABC колмужекссь (135 тяш.). Кда AC ширеть кодамовок E точканц ланга ётафтомс AB основаниять параллельнай EF виде китькс, эста лиси $CEF\,\triangle$, конань ужензa соответственна ровнат $ABC\,\triangle$ ужензонды: C ужесь — марстонь, $E\,\angle=A\,\angle$ и $F\,\angle=B\,\angle$ кода соответственнайхть; няйф, што нят колмужексне аф ровнат, синь фкя-фкянь эзда лият эсь размерснон коряс, хоть и улихть синь соответственна ровна ужесна. Станя лисеньди, што колма ужетнень коряс аш кода тиемс определённай размерса колмужекс. Колмужекстъ ужензa эсь ётковаст сотфт определённай соотношенияса: $A\,\angle+B\,\angle+C\,\angle=180°$, сяс, штоба лувомс колмужекстъ ужензон, саты содамс сонь аньцек кафта ужензон, сяс мес синь вельдест муви колмоце ужесь, кепетьксоньди сявемс $C\angle = 180^\circ - (A\angle + B\angle)$. Тянц коряс лисеньди, што кда максфт колма ужетне, конатнень суммасна ровна 180°, эста тя условиять эса аньцек кафта независимай элементта — кафта ужет, сяс мес колмоце ужесь муви синь вельдест.

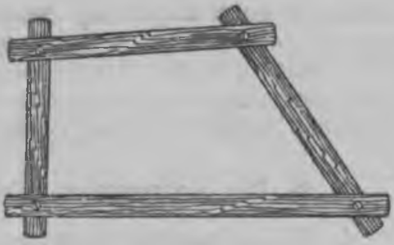
Колмужекстъ ули кода тяштемс колма независимай элементонзон коряс.

Но уленьди станявок, кода минь няйсаськ сяда меле, што колма независимай элементонь коряс ули кода тиемс аф аньцек фкя колмужекс, а разнай формаса и размерса кафта колмужекст. Станя, кепетьксоньди сявемс, кафта максф ширень и сяда ёмла ширеть каршеса ащи ужеть коряс ули кода тиемс кафта разнай колмужекст. А кда максф колма элементтнень ёткса улихть и зависимайхть, эста ули кода тиемс пефтома лама разнай колмужекст.

Сяс колмужекстъ тяштемда меле эряви ваномс, задачать условияса максф элементтнень коряс тиеви фкя или лама колмужекст, и кодама максфнень коряс задачась прокс аф тиеви, лиякс мярьгемс тиемс аш кода.

2. Параллелограмать тиемац, кода содасасть, колмужекстъ тиеманц лаца, сяс штоба тиемс параллелограмать, саты содамс сонь колма аф зависимай элементонзон.

3. Штоба тиемс видеужекс, саты содамс сонь китьксонь кафта элементонзон; макссемс колмоце элементонц — сонь уженц — аф эряви, сяс мес видеужексса сембе ужетне видет.



136 тяш.

4. Штоба тиемс ромба, станя жа саты содамс сонь аньцек кафта аф зависимай элементонзон.

5. Штоба тиемс квадрат, саты содамс сонь аньцек фкя китьксонь элементонц: ширенц или диагоналенц.

6. Штоба тиемс трапеция, эряви содамс сянь лангс ванозь, кодама сонь видоц, аф фкакс лама элементонзон:

1) равнобедреннай трапециять тиемс — 3 элементт,

2) видеужень трапециять тиемс — 3 элементт,

3) всякай трапециянь тяштемс (аф равнобедреннай и аф видеужень) — 4 элементт.

7. Штоба тиемс нилеужекс, эрявихть аф зависимай 5 элементт.

Афкукс, кда сявемс шарнирнай нилеужекстъ (136 тяш.), эста кда аф полафтсаськ ширензон кувалмоснон, а сяка пингста полафнемс ширетнень ёткста ужетнень, ули кода тиемс пефтома лама разнай нилеужекст; тяста лисеньди, што 4 ширетнень коряс аш кода тиемс определённай формаса нилеужекс; штоба нилеужекссь улель определённай, эряви максомс нингя сонь ветеце элементонц — или фкя уженц, или кафта диагоналензон эзда фкя диагональть.

Афкукс, кда ётафтомс нилеужексть эса фкя диагоналенц, кона кемекстасыня фкя-фкянь мархта сонь кафта прянзон, эста лиси определённай нилеужекс, сяс мес сон тиеви кафта колмужексонь тяштезь, конатне тиевихть нилеужексть диагоналенц и ширензон вельде.

Тяфта лисеньди, диагональсь нилеужексти максы определённай, или, кода корхтайхть, кеме форма.

Нилеужекс ули кода тиемс, кда максфт, мярьгемс, тяфтама вете элементонза: 1) 4 ширенза и диагоналец, 2) 4 ширенза и ужец, 3) 3 ширенза и кафта диагоналенза, 4) 3 ширенза и кафта уженза, 5) 2 ширенза и 3 уженза и ст. тов.

8. Нилеужекссь полафтсы эсь форманц, кда сонь ширензон кувалмоснон аф полафтозь полафтомс сонь уженэон оцюснон. Лиякс ащи тевсь колмужексть мархта. Колмужексть форманц, сонь ширензон кувалмоснон аф полафтозь, полафтомс аш кода. Тя свойстванц коряс — аф полафнесы эсь форманц — колмужексти мярьгихть кеме фигура.

Колмужексть тя свойстванц пяк оцю значенияц техникаса и строительстваса.

Колмужексть формац эряви стропилань, седень фермань, кепедема кранонь и лама лият всякай предметонь и машинань деталень тиемста. Нилеужекссь лия колмужексть коряс сянь пяльде, што сон аф кеме фигура.

Штоба нилеужексть улель кеме формац, кемекстасазь диагональса сонь кафта аф смежнай прянзон, тяфта тиихть эздонза кафта колмужекст, конатнень эзда эрь фигурась ули устойчивай, кеме фигура. Нилеужексть формац кеме эстонга, мзярда сонь ширензон кувалмоснон аф полафнезь путомс сонь кафта смежнай ширензон ёткс наглуха ужекс (угольник).

§ 19. Ламужекс. Сонь уженэон свойствасна.

1. *Лапш лангть пяльксонцты, кона перяф замкнутай синнеф китькcса, кона китькссь ащи n шиpecта, мярьгихть n-ужекс*; n-сь может улемс кодама кельк стама целай лувкс, кона колмоть коряс сяда оцю или ровна 3-ти.

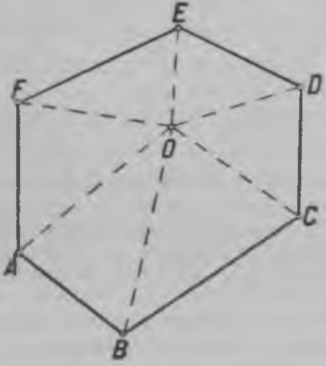
Тяда меле минь карматама ванондома аньцек выпуклай ламужекст, лиякс мярьгемс, стама ламужекст, конаса потмостонь эрь ужесь $2d$ коряс сяда ёмла.

2. *Теорема.* **n-ужексть потмостонь уженэон суммасна ровна $2d\ (n-2)$, или $180^\circ\ (n-2)$.**

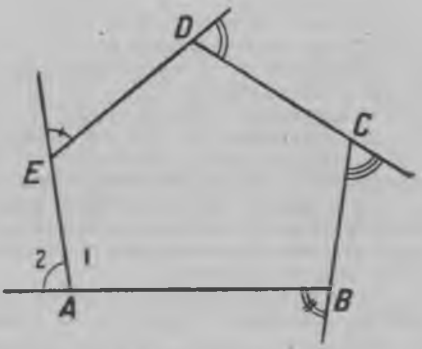
Няфтемац. Сяфтяма ламужексть потмоста кона-кона вастса O точка (137 тяш.) и поладсаськ сонь виде китькcса сембе сонь прянзон мархта; лисихть n колмужекст; синь эздост сняра, мзяра шиpeдa колмужексть эса. Сембе n колмужекснень потмостонь ужеснон суммасна ровна $2d \cdot n$, тяза лувондовихть сембе сят ужетневок, конатнень марстонь прясна O точкаса, конатнень суммасна ровна $4d$; но n-ужексть потмостонь ужетнень суммасна ровна n-колмужекснень потмостонь ужетнень суммасонды, конань эзда эряви сявемс O точкать перьф ащи ужетнень суммасна, а именна: $2dn - 4d = 2d\ (n-2)$, или $180^\circ\ (n-2)$. Станя лисеньди, **n-ужексть потмостонь ужензон суммасна ровна $2d$, сонь ширензон кафтфтома лувксснон лангс ламокстафста.**

3. Кда $ABCDE$ (138 тяш.) ламужексть эса кувалгафтомс сонь ширензон эзда фкять, мярьгемс AB ширеть, эста тя ширеть кувалгафтоманц эзда смежнай AE ширеть мархта тиеви уже, конаньди мярьгихть ламужексть ушестонь ужец.

Кда кувалгафтсаськ $ABCDE$ ламужексть сембе ширензон, кода няфтьф чертёжть лангса (138 тяш.), тиевихть сняра ушестонь ужеда, мзяра ламужексть ширедонза или ужедонза.



137 тяш.



138 тяш.

4. *Теорема.* **Кодама кельк ламужексть сембе ушестонь ужензон суммасна равна $4d$, или 360°.**

Нятфемац. Ламужексть эрь прянц тейса ащи потмостонь ужеть и ушестонь ужеть суммасна ровна $2d$; n прятнень тейса ули $2d \cdot n$; но n-ужексса сембе потмостонь ужетнень суммасна ровна $2dn - 4d$; сяс, штоба лисель n-ужексть ушестонь сембе ужензон суммасна, эряви 2 dn-ть эзда сявемс $2dn - 4d$, лиси:

$$2dn - (2dn - 4d) = 2dn - 2dn + 4d = 4d, \text{ или } 360^\circ.$$

Тянь коряс лисеньди, **кодама кельк ламужексть ушестонь сембе ужензон суммасна ровна $4d$.**

Тя суммась аф ащи сонь ширензон лувксснон эзда.

Кизефкст и упражненият:

1. Мес ламужексть потмостонь ужензон суммасонды аш кода улемс $7d$ или $11\ d$, вообще — аф чётнай d лувксокс?

2. $ABCD$ нилеужексть диагоналец ровна $AC = m = 6{,}4$ *см* и явсы нилеужексть кафта колмужексова, конатнень периметрасна соответственна ровнат 16,8 *см* и 20,2 *см*. Лувомс $ABCD$ нилеужексть P периметранц.

3. Мумс тиемать вельде кафта P и Q вийхнень R равнодействующайснон величинанц и направлениянц, кда содафт, што: 1) $P = 8$ *кг*, $Q = 6$ *кг*, $(P, Q) \angle = 60^\circ$.

4. Мумс тяштемать вельде составляющай P и Q вийхнень величинаснон и направленияснон, кда содаф, што равнодействующайсь $R = 20$ *кг* и соответствующай вийхнень мархта тии $(P, R) \angle = 30^\circ$ и $(Q, R) = 90^\circ$.

5. Тиемс параллелограма тяфтама максфонь коряс: a и b — сонь ширенза, m и n — сонь диагоналенза:

1) $a = 4{,}5$ *см*, $b = 3{,}2$ *см*, $A \angle = 40^\circ$;
2) $a = 7$ *см*, $b = 5{,}3$ *см*, $B \angle = 110^\circ$;

3) $a = 6{,}3$ *см*, $b = 4{,}7$ *см*, $m = 8$ *см*;
4) $m = 8$ *см*, $n = 6{,}4$ *см*, ёткстост ужесь $\beta = 45^\circ$;
5) $a = 7$ *см*; $A \angle = 130^\circ$ и α ужесь, кона тиевсь фкя диагональть и параллелограмать a ширенц ёткса, ровна 40°;
6) $a = 8$ *см*, $b = 6$ *см*, серец $h = 4$ *см*.

6. Тиемс видеужекс, кда максфт:
1) сонь кафта ширенза: $a = 6{,}4$ *см*, и $b = 4{,}3$ *см*;
2) ширец $a = 5{,}7$ *см* и диагоналец $m = 7{,}5$ *см*;
3) диагоналец $m = 8{,}4$ *см* и ширеть мархта диагональть ёткса ужесь $\alpha = 40^\circ$;
4) диагоналец $m = 8$ *см* и диагональхнень ёткса $\beta \angle = 60^\circ$.
5) ширец $b = 5$ *см* и диагональхнень ёткса $\beta \angle = 110^\circ$.

7. Тиемс ромба:
1) ширенц $a = 4$ *см* и уженц $\alpha = 40^\circ$ коряс;
2) ширенц $a = 5$ *см* и диагоналенц $m = 5$ *см* коряс и лувомс сонь ужензон;
3) диагоналенц $m = 6$ *см* и уженц $\alpha = 120^\circ$ коряс;
4) кафта диагоналензон $m = 5$ *см* и $n = 8$ *см* коряс;
5) ширенц $a = 5$ *см* и серьнц $h = 3$ *см* коряс.

8. Тиемс квадрат:
1) ширенц $a = 3{,}5$ *см* коряс;
2) диагоналенц $m = 4{,}5$ *см* коряс.

9. Няфтемс, што *равнобедреннай трапецияса диагональхне ровнат и основаниятнень мархта тиихть ровна ужет.*

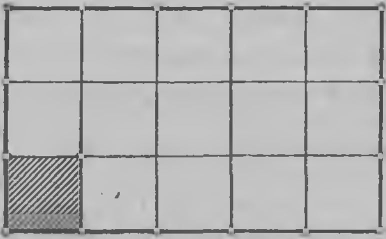
10. Няфтемс, што *равнобедреннай трапецияса диагональхне явсазь трапециять 4 колмужексова, конатнень эзда кафттне, основаниянти прилежащайхне, равнобедреннайхть, а кафттне, боконь ширетненьди прилежащайхне, эсь ётковаст ровнат.*

11. Равнобедреннай трапецияса диагональхне фкя-фкяньди перпендикулярнайхть. Трапециfive серец 10 *см*. Лувомс кучкастонь китькстъ кувалмонц.

IX. ВИДЕ КИТЬКСОНЬ ФИГУРАТНЕНЬ ПЛОЩАДЬСНА.

1. Площадьтнень ункснемасна.

1. *Ункстамс площадьть — значит мумс максф площадьть омбоце площадьти отношениянц, кона сявф единицакс.* Площадень ункстама единицакс сявеньдсазь тяфтама квадратть площаденц, конань эрь ширенц кувалмоц кодамовок линейнай единицань кувалмоса, кепетьксоньди, миллиметрань, сантиметрань, метрань и ст. тов кувалмоса; ункстамань тяфтама единицати мярьгихть квадратнай единица.



139 тяш.

2. Квадратнай единицатнень сёрмадкшесазь тяфта: 1 *кв. мм*, или 1 *мм*^{2}; 1 *кв. см*, или 1 *см*^{2}; 1 *кв. м*, или 1 *м*^{2} и ст. тов. Кочкайхть площадень ункстама единица и ункстасазь фигурать площаденц, лиякс мярьгемс, лувсазь, мзяра квадратнай единицада ся площадьть эса, конань ункстасазь.

3. Фигурать площаденц аф ункснесазь площадьть ункстамс кочкаф единицать эса непосредственна ункстазь, лиякс мярьгемс единицакс сявф площадканяса сонь аф пяшкедькшесазь, кода тя няфтьф 139 тяштьксса. Фигурать площаденц лувондсазь косвеннайста ункстазь: ункстасазь фигурать ширензон и башка вспомогательнай китьксонзон, конат улихть фигураса, и лиси лувкснень вельде лувсазь площадьть.

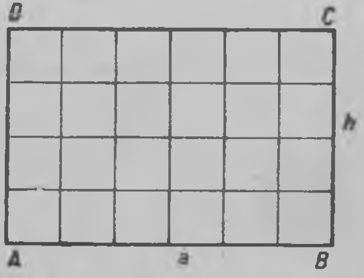
2 §. Видеужексть и квадратть площадьсна.

Теорема. **Видеужексть площадец ровна сонь основаниянц серьнц лангс произведенияти.**

Максф: $ABCD$ — видеужекс (140 тяш.).
$AB = a$ — основания; $CB = h$ серец.

Эряви няфтемс: S площаденц $= a \cdot h$.

Ванцаськ башка стама случайхнень, мзярда основаниясь и серьсь, конат ункстафт фкя единицаса, сёрмадкшевихть: 1) целай лувксса и 2) дробнай лувксса.



140 тяш.

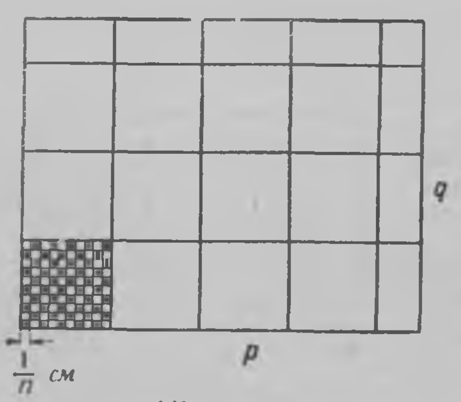
Няфтемац. 1-*це случайсь.* Катк основаниясь $AB = a$ *см* и серьсь $BC = h$ *см*, коса a и h — целай лувкст. Явсаськ AB основанинять a ровна пялькскова, 1 *см* эрь пялькстъ эса и CB серьть стама жа h пялькскова и явома точкатнень ланга ётафттама видеужекстъ ширензонды параллельнай виде китькст; видеужекссь явови квадратова, эрь квадратть площадец 1 $см^2$. Нят квадраттнень лувкссна ровна $a \cdot h$, сяс мес AB основанинять мархта параллельнай виде китьксне явсазь видеужекстъ h полосава, а AB серьть мархта параллельнай виде китьксне явсазь эрь полосать a квадратова, кона эрь квадратть площадец 1 $см^2$.

Станя лисеньди, што $ABCD$ видеужекстъ площадец явови $a \cdot h$ квадратова, эрь тяфтама квадратть площадец 1 $см^2$; формуласа тянь сёрмадкшесазь вов кода:

$$\boxed{S = a \cdot h}\ см^2,$$

лиякс азомс, *видеужекстъ площадец ровна квадратнай единицань стама кувксоньди, кона лиси сят лувкснень ламокстамста, конатне няфнесазь сонь основаниянц и серьнц фкя лемса китьксонь единицаса.*

II-це случайсь. Основаниясь $AB = a$ *см* и серьсь $CB = h$ *см*, a и h — дробнай лувкст. Катк нят дробнай лувксне, синь фкя знаменательть мархта тиемдост меле улихть ровнат: $a = \frac{p}{n}$ и $h = \frac{q}{n}$. Сявсаськ a и h керфксненьди марстонь ункстамакс ся керфкстъ, кона ровна $\frac{1}{n}$ *см*, эста тя марстонь ункстамась путови a-ть кувалмос p-кстъ, h-ть кувалмос — q-кстъ; явома точкатнень ланга ётафттама виде китькст, конат параллельнайхть видеужекстъ ширензон мархта, видеужекссь станя явови $\frac{1}{n}$ *см* шире мархта $p \cdot q$ ёмла квадратова (141 тяш.); тяфтама ёмла квадратта 1 $см^2$ эса улихть $n \cdot n = n^2$; лисеньди, кда 1 *см* кувалмоса шире мархта квадратть смежнай ширензон явомс 10 ровна пялькссова, эста тя квадратсь явови $10 \cdot 10 = 10^2 = 100$ ёмла квадратова и эздост эрь квадратсь ули 1 $см^2$ площадень квадратть $\frac{1}{100}$ пяльксоц.



141 тяш.

Станя лисеньди, кда 1 $см^2$ эса ули n^2 ёмла квадратт, эста эздост эрь квадратсь ули 1 квадратнай сантиметрать $\frac{1}{n^2}$ пяльксоц. Максф видеужексти путовсть $p \cdot q$ ёмла квадратт, конатнень эса ули $\frac{p \cdot q}{n^2}$ $см^2$, или $\frac{p}{n} \cdot \frac{q}{n}$ $см^2$; но $\frac{p}{n} = a$ и $\frac{q}{n} = h$, а сяс тейнек ули кода сёрмадомс, што $\frac{p}{n} \cdot \frac{q}{n} = a \cdot h$ $см^2$; тянь коряс лисеньди, што видеужекстъ площадец ровна сонь основаниянц серьнц лангс ламокстамать эзда лисьф произведенияти.

Теоремась ули виде эстовок, мзярда видеужекстъ смежнай ширензон эзда фкясь или кафцьке смежнай ширенза максфт иррациональнай лувкссаа.

Следствият. **1. Квадратть площадец ровна сонь ширенц квадратонцты.**

Ся квадратсь ули видеужекс, конань сембе ширенза ровнат. Квадратть ширенц сёрмадсаськ *a* букваса, эста сонь серецка $h = a$, а сяс

$$S = a \cdot a = a^2 \text{ кв. ед.}$$

2. Разнай основания и серь мархта кафта видеужекснень площадьснон отношениясна ровна синь серьснон отношенияснон лангс основанияснон отношенияснон ламокстамать эзда лисьф произведенияти.

$$S_1 = a_1 h_1 \text{ и } S_2 = a_2 h_2,$$

коста

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{a_1 h_1}{a_2 h_2} = \frac{a_1}{h_2} \cdot \frac{h_1}{h_2}.$$

3. Ровна основания мархта кафта видеужекснень площадьсна относятся кода синь серьсна; кда ровнат синь серьсна, эста площадьсна относятся кода синь основаниясна.

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{ah_1}{ah_2} = \frac{h_1}{h_2}; \quad \frac{S_1}{S_2} = \frac{a_1 h}{a_2 h} = \frac{a_1}{a_2}.$$

4. Кафта квадраттнень площадьсна относятся кода ширеснон квадратсна.

$$S_1 = a^2 \text{ и } S_2 = b^2,$$

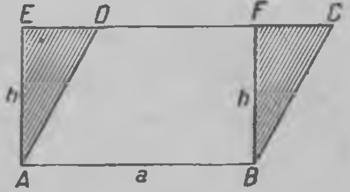
коста

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{a^2}{b^2}.$$

3 §. Ровна, ровнаста тиф и ровнаста оцю фигуратне.

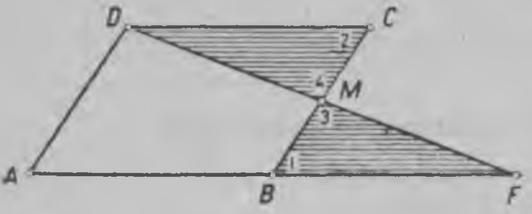
1. *ABCD* параллелограмаса (142 тяш.) ётафтсаськ сонь *A* и *B* прястонза сонь *AE* и *BF* серьнзон; лисихть кафта ровна видеужень *ADE* и *BCF* колмужекст: *AD* гипотенузась $=$ *BC* и *ED* катетсь $=$ *FC*.

Кда тяда меле *ABCD* параллелограмать эзда керемс *BFC* колмужексть и путомс сонь параллелограмать *AD* ширенц ваксс станя, штоба *AD* и *BC* ширенза фкя-фкянь вельхтяльхть, эста лиси *ABFE* видеужекс, кона тиф сяка жа пялькснень эзда, кода и *ABCD* параллелограмась: видеужень *ABFD* трапецияста и колмужексста.



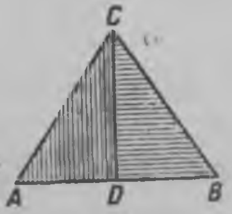
142 тяш.

2. Сявсаськ *ABCD* параллелограмать (143 тяш.). Сонь *D* прястонза *BC* ширеть *M* кучканц ланга ётафттама виде китькс и кувалгафтсаськ сонь *AB* ширеть кувалгафтф пенц туркс *F* точкаса ётамс; лисихть кафта ровна колмужекст: *DMC* △ и *BMF* △; синь *MB* $=$ *MC*, *M* точкать ваксста ужетне ровнат кода каршек ащихть, *B*∠ $=$ *C*∠ кода накрест ащихть.



143 тяш.

ABCD параллелограмать и *ADF* колмужексть ванондомста няйсаськ, што синь кафцьке тифт ровна пяльксста: *ABMD* трапецияста и колмужексста.



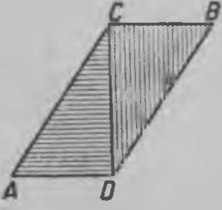
144 тяш.

3. Ванцаськ нингя равнобедрннай *ABC* колмужексть (144 тяш.); *CD* серьть эса сон якови кафта ровна колмужексова; кда нят колмужекснень путомс фкя-фкянь лангс, синь фкя-фкянь вельхтяйхть, лисеньди синь площадьсна ровнат. Нят кафта колмужекснень эзда, фкя колмужексти омбоцеть ровна ширенц путнезь, ули кода тиеньдемс разнай фигурат, конатнень площадьсна ули фкяньшкасот, хоть синь формасна аф флацот. Кепетьксоньди сявемс, *CBD* △-ть ули кода путомс *ACD* △ мархта

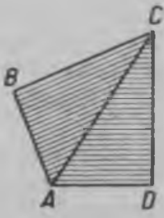
станя, што синь эздост тиеви или $ADBC$ параллелограма (145 тяш.), или $ADCB$ нилеужекс (146 тяш.), или равнобедреннай ABC колмужекс (147 тяш.).

Сембе нят фигуратнень площадьсна фкяньшкат, мес синь тифт ровна пяльксста; но синьць фигуратне эсь ётковаст аф ровнат, сяс мес фкя-фкянь лангс путомста синь фкя-фкянь аф вельхтяйхть.

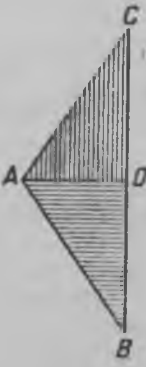
4. 1) Сят фигуратненьди, конат тифт ровна пяльксста, мярьгихть ровнастатифт.



145 тяш.



146 тящ.



147 тяш.

2) Кафта фигуратненьди, конатнень площадьсна ровнат, мярьгихть ровнашка фигурат.

3) Кафта ровна фнгуратне ровнашкат.

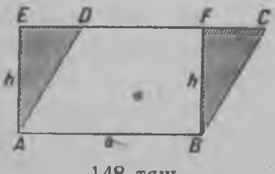
4) Кафта ровнаста тиф фигуратне ровнашкат.

5) Эряви аф юкстамс, што кафта ровнашка ламужекснень ули кода тиемс фкяньшка лама ровна пяльксста, лиякс мярьгемс синь улихть ровнаста тифт.

4 §. Параллелограмать площадец.

Теорема. **Параллелограмать площадец ровна основаниянц сонь серьнц лангс произведенияти.**

Няфтемац. Кда параллелограмать (148 тяш.) эса ётафтсаськ сонь серьнзон, лисихть кафта видеужень ровна ADE и BCF колмужекст. Максф $ABCD$ параллелограмась и $ABFE$ видеужекссь ровнашкат кода ровнаста тиф фигурат. $ABFE$ видеужексть площадец ровна ah, сяс $ABCD$ параллелограматьке площадец ровна ah;



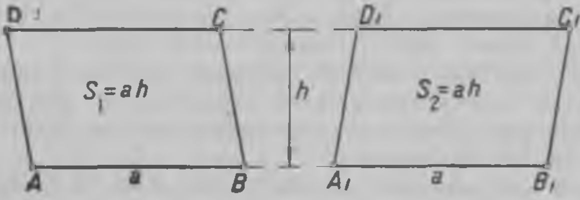
148 тяш.

$\boxed{S = ah}$ кв. ед.

Следствият. **1. Сят параллелограматне, конатнень ровнат основаниясна и ровнат серьсна, ровнашкат.**

$ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ параллелограматнень (149 тяш.) ровнат серьсна и ровнат основаниясна; $AB = A_1B_1 = a$. Синь площадьсна $S_1 = a \cdot h$ и $S_2 = a \cdot h$; сяс $S_1 = S_2 = a \cdot h$: параллелограматне ровнашкат.

$ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ параллелограматне аф ровнат; синь фкяфкянь лангс путомста фкя-фкянь аф вельхтяйхть, сяс мес синь улихть аф фкяньшка ужесна.



149 тяш.

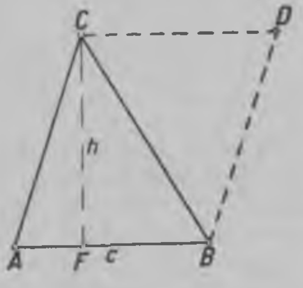
2. Ровна основания мархта параллелограматнень площадьсна относятся кода синь соответствующай серьсна; кда жа параллелограматнень улихть ровнат серьсна, эста синь площадьсна относятся кода соответствующай основаниясна.

5 §. Колмужексть площадец.

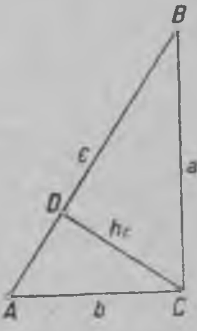
1. ***Теорема.*** **Колмужексть площадец ровна сонь серьнц лангс основаниянц ламокстамать эзда лисьф произведениfive пялеицты.**

Няфтемац. $BD \parallel AC$ и $CD \parallel AB$ ётафтозь (150 тяш.) максф ABC △ пяшкедьсаськ $ABDC$ параллелограмати молемс. $ABDC$ параллелограмать площадец ровна $c \cdot h$; ABC △ площадец ули $ABDC$ параллелограмать площаденц пялешкаса, лисеньди, што ABC△ площадец ровна $\frac{1}{2}\ c \cdot h$. Тяфта лисеньди,

$$\boxed{S=\frac{1}{2}ch}$$ кв. ед.



150 тяш.



151 тяш.

Следствия. Кда видеужень ABC колмужексть (151 тяш.) катетонзон сёрмадомс a и b букваса, гипотенузанц — c букваса и серьнц, кона ётафтф гипотенузать лангс — h_c букваса, эста видеужень колмужексть площаденц ули. кода сёрмадомс кафта лаца:

$$1)\ S=\frac{1}{2}a \cdot b \quad \text{и} \quad 2)\ S=\frac{1}{2}c \cdot h_c.$$

Тянь коряс лисеньди,

$$S=\frac{1}{2}a \cdot b=\frac{1}{2}c \cdot h_c, \quad \text{или} \quad a \cdot b=c.\ h_c.$$

Тяфта лисеньди:

1) Видеужень колмужекстъ площадец ровна катетонзон произведениянсон пяленцты.

2) Видеужень колмужекстъ катетонзон произведениясна ровна ся произведенияти, кона лиси гипотенузать тейнза соответствующай серьть лангс ламокстамать эзда.

3) Ровна основания мархта колмужекснень площадьсна относятся, кода соответствующай серьсна; кда жа ровнат синь серьсна, эста колмужекснень площадьсна относятся кода соответствующай основаниясна.

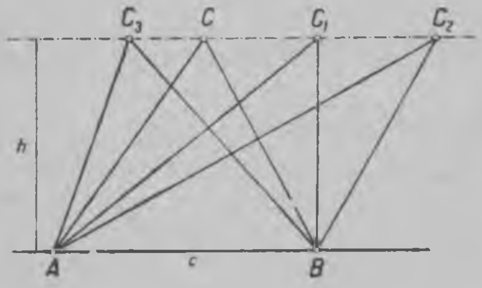
4) Разнай основания и разнай серь мархта колмужекснень площадьснон отношениясна ровна синь серьснон отношениять лангс основанияснон отношенияснон ламокстамать эзда лиси произведенияти.

$$S_1 = \frac{1}{2} a_1 \cdot h_1 \text{ и } S_2 = \frac{1}{2} a_2 \cdot h_2,$$

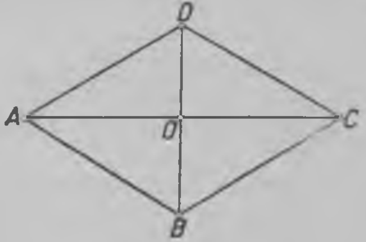
коста

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{a_1 h_1}{a_2 h_2} = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{h_1}{h_2}.$$

5) Ровна основания и ровна серь мархта колмужексне ровнашкат.



152 тяш.



153 тяш.

Максф $ABC \triangle$. Кда сонь C прянц шашфтомс виде кицькстъ кувалмова, кона параллельнай AB основанияти, а тяка пингста основаниянц аф полафтомс (152 тяш.), эста лисихть лама ABC_1, ABC_2 и ст. тов колмужекст, конатнень эзда эрь колмужекстъ площадец ровна $\frac{1}{2} c \cdot h$, лисеньди, што синь ровнашкат.

6) Ромбать, кода и всякай параллелограмать, площадец ровна сонь серьнц лангс основаниянц ламокстамать эзда лисьф произведенияти, лиякс азомс, $S = a \cdot h$. Тяда башка, ромбать площадец ровна сонь диагоналензон произведениянсон пяленцты.

Афкукс, $ABCD$ ромбать (153 тяш.) AB и BD диагоналенза фкя фкяньди перпендикулярнайхть, сяс:

$$\begin{array}{l} ADC\triangle \text{ площадец} = \frac{1}{2} AC\cdot DO \\ ABC\triangle \text{ площадец} = \frac{1}{2} AC\cdot OB \\ \hline ABCD \text{ площадец} = \frac{1}{2} AC\,(DO+OB) = \frac{1}{2} AC\cdot BD. \end{array}$$

7) Квадратть площадец ровна сонь диагоналенц квадратонц пяленцты.

Квадратть эса диагональхне фкя-фкяньди перпендикулярнайхть и ровнат (154 тяш.), сяс $ABCD$ квадратть площадец ровна $\frac{1}{2} AC\cdot BD = \frac{1}{2} AC^2$.

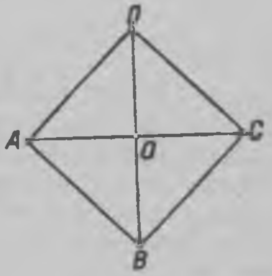
2. Колмужексть площаденц ули кода сёрмадомс кодама кельк ширенц и тейнза соответствующай серьнц вельде:

$$S\triangle = \frac{1}{2} ah_a = \frac{1}{2} bh_b = \frac{1}{2} ch_c.$$

Тянц коряс лисеньди:

$$1)\ a = \frac{2S}{h_a};\ b = \frac{2S}{h_b};\ c = \frac{2S}{h_c};$$

$$2)\ h_a = \frac{2S}{a};\ h_b = \frac{2S}{b};\ h_c = \frac{2S}{c}.$$



154 тяш.

Кда сявсаськ 1) колмужексть ширензон отношенияснон и 2) серьнзон отношенияснон, лиси:

$$1)\ a:b:c = \frac{2S}{h_a} : \frac{2S}{h_b} : \frac{2S}{h_c}, \text{ или } a:b:c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c}.$$

Тяфтаня жа ули:

$$2)\ h_a:h_b:h_c = \frac{2S}{a} : \frac{2S}{b} : \frac{2S}{c}, \text{ или } h_a:h_b:h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c},$$

лиякс азомс, *колмужексть ширенза меклангт пропорциональнайхть соответствующай серьхненьди.*

3. Тяфтама отношениясь ули параллелограматьке ширензон и серьнзон ёткса. Ромбать эса, конань ширенза ровнат, серьнза тожа ровнат, сяс мес сонь ширензон отношениясна ровна 1.

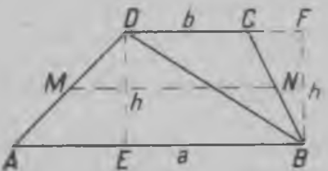
6 §. Трапециять площадец.

Теорема. **Трапециять площадец ровна ся произведенияти, кона лиси основаниятнень пялесуммаснон трапецнять серьнц лангс ламокстамать эзда, или ся произведенияти, кона лиси кучкастонь китькстъ трапециять серьнц лангс ламокстамать эзда.**

Максф: $ABCD$ — трапециясь; a и b — основаниятне; h — серец (155 тяш.).

Эряви няфтемс: $ABCD$ пл. $= S = \frac{a+b}{2}\cdot h$.

Няфтемац. $ABCD$ трапециясь DB диагональть эса явови кафта колмужексова: $ABD\triangle$ и $DBC\triangle$; трапециять S площадец ровна лисьф колмужекснень площадьснон суммасонды:



155 тяш.

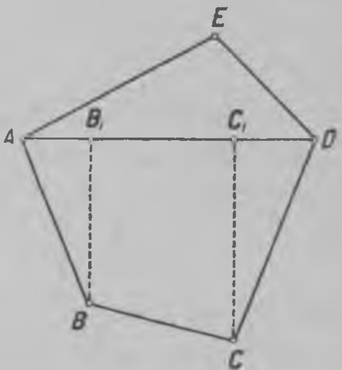
$$ABCD \text{ пл.} = ABD \text{ пл.} + BDC \text{ пл.} =$$

$$= \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}bh = \frac{a+b}{2}\cdot h.$$

$$\boxed{S=\frac{a+b}{2}\cdot h = m\cdot h} \text{ кв. ед.,}$$

коса $m=\frac{a+b}{2}$ MN—трапециять боконь ширензон кучкаснон ланга китькссь.

7 §. Ламужекстъ площадец.



156 тяш.

Ламужекстъ площаденц мушендсазь сонь колмужексова и трапециява явондозь. Васеньце случайса фкя прянц эзда ётафтсазь сембе сонь диагоналензон и лувсазь башка эрь лисикс колмужекстъ площаденц; сембе колмужекснень площадьснон суммасна ули ламужекстъ площадец.

Омбоце лаца тиемста ётафтыхть фкя диагональ и сят перпендикулярхнень эса, конат ётафтфт ламужекстъ прянц эзда диагоналенц лангс, явсазь сонь видеужень колмужексова и трапециява (156 тяш.). Лисикс колмужекснень и трапециять площадьснон суммасна ули ламужекстъ площадец.

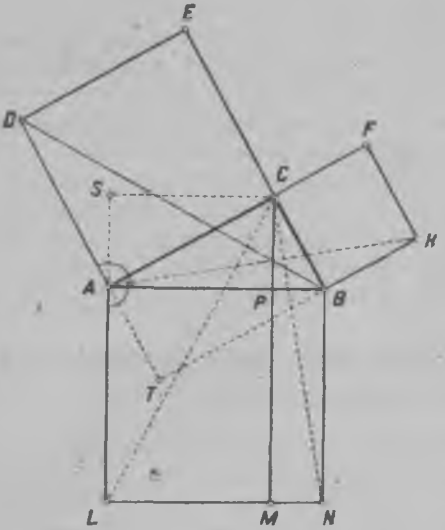
8 §. Пифагорть теоремац.

Теорема. **Видеужень колмужекстъ гипотенузанц лангс тиф квадратть площадец ровна сонь катетонзон лангс тиф квадраттнень площадьснон суммасонды.**

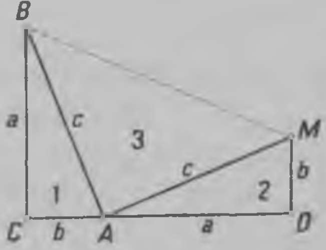
Максф: $ABC\triangle$ [эса C ужесь $= d$; $ABNL$, $ACED$, $BCFK$—квадратт (157 тяш.).

Эряви няфтемс: $ABNL$ пл. $=$ $ACED$ пл. $+$ $BCFK$ пл.

Васеньце няфтемась, конань максозе Евклидсь соньцень „Началатнень“ эса. Ётафттама $CM \perp LN$; CM-сь явсы $ABNL$ квадратть кафта видеужексова: $APML$ и $PBNM$. Няфтьсаськ, што эздост эрь видеужекссь соответственно ровнашка фкя квадратть мархта сят квадраттнень эзда, конат тифт катеттнень лангс. Станя, $APML$ видеужекссь ровнаста оцю $ACED$ квадратть мархта. Афкукс: кда виде китьксса поладсаськ D-ть B мархта и C-ть L мархта, лисихть кафта колмужекст: $ABD\triangle$ и $ACL\triangle$, конат ровнат, сяс мес $AD = AC$, $AB = AL$ и $DAB\angle = CAL\angle$ кода виде ужеса и ABC колмужексть A ужеста тиф ужет. Но $ABD\triangle$ площадец ровна $ACED$ квадратть площаденц пяленцты, сяс мес квадратть мархта марстонь AD основаниясна, и сонь BT серец ровна квадратть DE серьнцты. Прокс станя жа $ACL\triangle$ площадец ровна $APML$ площадьть пяленцты, сяс мес синь видеужексть мархта марстонь AL основаниясна, и сонь CS серец ровна видеужексть ML серьнцты. $ABD\triangle = ACL\triangle$, а сяс $APML$-ть $\frac{1}{2}$ площадец $=$ $= ACED$-ть $\frac{1}{2}$ площаденцты, или $APML$ пл.$=ACED$ площаденцты, лиякс мяргемс, $APML$ видеужексть площадец ровна $ACED$ квадратть площаденцты. Тяда меле поладсаськ A-ть K мархта и C-ть N мархта виде китьксса, минь станя жа няфтьсаськ, што $BNMP$ видеужексть площадец ровна $BCFK$ квадратть площаденцты. Тяфтаня,



157 тяш.



158 тяш.

$APML$ пл.$=ACED$ пл. и $BNMP$ пл.$=BCFK$ площадьти,
сяс, $APML$ пл.$+BNMP$ пл.$=ACED$ пл.$+BCFK$ пл.,

коста

$$ABNL \text{ пл.} = ACED \text{ пл.} + BCFK \text{ пл.}$$

Теоремась няфтьф.

Омбоце няфтемац. Максф видеужень ABC колмужекс. Тяштьсаськ кода няфтьф 158-це тяштьксса и поладсаськ B точкать M точкать мархта. Лиси a и b основания и $CD = a + b$ серь мархта видеужень $CDMB$ трапециясь. Тя трапециясь тиевсь колма видеужень колмужексста: 1, 2 и 3.

$1\triangle$ пл. $+ 2\triangle$ пл. $+ 3\triangle$ пл. $= CDMB$ пл. лиякс мярьгемс,

$$\frac{ab}{2}+\frac{ab}{2}+\frac{c^2}{2}=\frac{(a+b)\ (a+b)}{2},$$

или

$$2ab+c^2=a^2+2ab+b^2$$

или

$$\boxed{c^2=a^2+b^2,}$$

лиякс мярьгемс,

гипотенузать квадратоц ровна катеттнень квадратснон суммасонды.

1-це задачась. *Тиемс квадрат, конань площадец ровна кафта a и b шире мархта квадраттнень площадьснон суммасонды.*

Тиемац. Тяштьтяма видеужень колмужекс, конаньди катетокс арсихть a и b керфксне. Эста Пифагорть теореманц коряс $c^2=a^2+b^2$, лиякс мярьгемс ся квадратсь, кона тиф колмужекстъ c гипотенузанц лангс, ровнашка a и b шире мархта максф квадраттнень суммасонды.

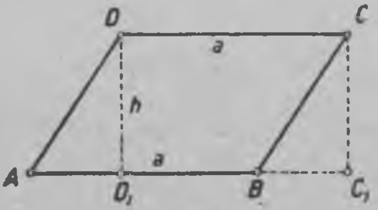
2-це задачась. *Тиемс квадрат, конань площадец улель ровна максф кафта квадраттнень площадьснон разностьснонды.*

Тиемац. Катк максф квадраттнень эзда сяда оцю квадратть ширец c и сяда ёмла квадратть ширец a; сявсаськ c-ть гипотенузакс и a-ть фкя катетокс и тихтяма видеужень колмужекс, эста омбоце b катетсь ули вешеньдеви квадратть ширец. Ся квадратсь, кона тиф b керфксть лангс, ули вешеньдеви квадратсь.

9 §. Кода тиемс виде китьксонь фигуратнень лия фигуракс, тейст ровнашкакс.

Кодамовок фигурать лия фигуракс, тейнза ровнашкакс тиемац — задачась тяштезь тиемань; сонь решандамстонза нолявихть тевс фигурань площадьтнень колга теорематне.

1-це задачась. *ABCD параллелограмать шарфтомс тейнза ровнашка видеужексокс, основанияц лядоль сякось* (159 тяш.).



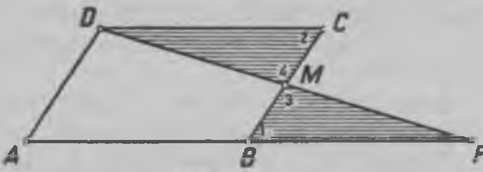
159 тяш.

Тиемац. a и h улихть $ABCD$ параллелограмать основанияц и серец; сонь S площадец $= ah$; тяфтама жа площадец ушарды улемс тейнза ровнашка видеужекстъ.

Параллелограмать максф a основаниянц лангс тяштьтяма тяфтама жа серь мархта видеужекс, лиси вешеньдеви DD_1C_1C видеужекссь; сон тяфтама, кодама эрявсь задачать условиянзон коряс, сяс мес $S=ah$.

2-це задачась. *ABDC параллелограмать тиемс тейнза ровнашка колмужексокс.*

Тиемац. Явсаськ максф $ABCD$ параллелограмать фкя, мяръгтяма BC, ширенц (160 тяш.) кучкава и D прянц эзда BC ширеть M кучканц ланга ётафттама DF виде китькс и вятьсаськ сонь мянь AB ширеть кувалгафтф пенц туркс F точкаса ётамс. Минь лиси $ADF \triangle$, кона ровнашка максф $ABCD$ параллелограмать мархта.

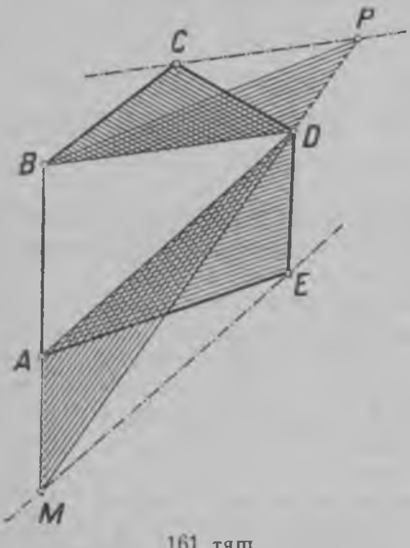


160 тяш.

Афкукс: $ABCD$ пл. $=$ $ABMD$ пл. $+$ DCM пл.; ADF пл. $=$ $ABMD$ пл. $+$ BMF пл., но $DCM \triangle = BMF \triangle$, сяс мес $CM = BM$, $1 \angle = 2 \angle$ и $3 \angle = 4 \angle$, а сяс $ABCD$ пл. $=$ ADF пл., а тянь эзда лисеньди, што $ADF \triangle$ ровнашка оцю $ABCD$ параллелограмать мархта.

3-це задачась. *$ABCDE$ ламужексть тиемс ровнашка колмужексокс* (161 тяш.).

Тиемац. Ётафттама AD диагональ; сон максф $ABCDE$ ламужекстъ эзда керы $ADE \triangle$; E прять ланга ётафттама виде китькс $ME \parallel AD$, кона ётай BA ширеть кувалгафтф пенц туркс M точкава. M точкать поладсазь D прять мархта виде китьксса, лиси $DMA \triangle$, кона ровнашка DEA колмужекстъ мархта, сяс мес синь ули марстонь AD основаниясна и синь E и M прясна ащихть основанияти параллельнай виде китькс лангса. Кда $DEA \triangle$ полафтсаськ тейнза ровнашка DMA колмужексса, лиси $MDCB$ ламужекс, кона ровнашка максф $ABCDE$ ламужекстъ мархта, но ширедонза фкяда сяда кржа максф ламужекстъ ширензон коряс. Тяфта тиеньдемс снярс, мзярс максф ламужекссь аф арай ровнашка колмужексокс. Тяштьксса ётафтфт $ABCD$ ламужекстъ DA и BD диагоналенза, кода эряви тяштезь сон тиф тейнза ровнашка MBP колмужексокс.



161 тяш.

4-це задачась. *Максф колмужекстъ виде китьксса явомс ровнашка n пяльксова, конат виде китькснв ётайхть сонь прянзон ланга.*

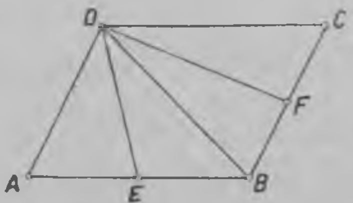
Тиемац. Колмужекстъ основаниянц явсаськ ровна n пяльксова и явома точкатнень виде китьксса поладсаськ прять мархта, лисихть n колмужекст, конатнень фкяньшкат основаниясна и марстонь прясна, тянь коряс лисеньди, што серьсновок марстонь, а сяс синь ровнастаоцюфт.

5-це задачась. *Максф параллелограмать явомс фкя пряста лиси виде китьксса ровнашка 4 пяльксова.*

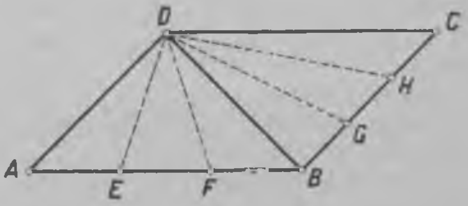
Тиемац. DB диагональса $ABCD$ параллелограмась явови кафта ровна пяльксова: $ABD \triangle = BDC \triangle$ (162 тяш.). Кда параллелограмать AB и BC ширензон E и F кучкаснон виде китьксса поладсаськ D прять мархта, лисихть ниле ровнашка колмужекст.

6-це задачась. *Максф параллелограмась явомс фкя прястонза лиси виде китьксса ровнашка колма пяльксова.*

Тиемац. DB диагональса $ABCD$ параллелограмась явови кафта ровна колмужексова (163 тяш.). Явсаськ AB и BC ширетнень ровна колма пяльксова и явома E, F, G и H точкатнень виде китьксса поладсаськ D прять мархта; лисихть 6 ровнаста оцю колмужекст. Эрь колмужексть площадец ровна параллелограмать площаденц $\frac{1}{6}$ пяльксонцты, тянь коряс лисеньди, эрь площадьсь $ADF \triangle$, $BFDG$ нилеужексть и $CDG \triangle$ ули ровна параллелограмать площаденц $\frac{1}{3}$ пяльксонцты.



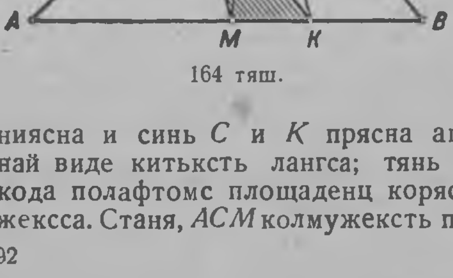
162 тяш.



163 тяш.

7-це задачась. *Колмужексть ширенц лангста кодамовок точкань ланга ётафтомс виде китькс, кона явсы колмужексть кафта ровнашка пяльксова.*

Тиемац. ABC колмужексть AB ширенц лангса максф кодамовок K точка (164 тяш.). K точкать виде китьксса поладсаськ C прять мархта и тя прять эзда ётафттама CM медиана. CM медианась явсы колмужексть ровнашка кафта колмужексова—CMA и CMB. Ётафттама $MD \parallel CK$ и D точкать виде китьксса поладсаськ K точкать мархта, лисихть ровнашка кафта колмужекст: $CMD \triangle$ и $DMK \triangle$, сяс мес синь DM—марстонь основаниясна и синь C и K прясна ащихть DM ширети параллельнай виде китькстьлангса; тянь коряс лисеньди, $CDM \triangle$ ули кода полафтомс площаденц коряс тейнза ровна DMK колмужексса. Станя, ACM колмужекстьплощадец, кона ровна максф кол-



164 тяш.

мужексть площаденц пяленцты, полафтови тейнза ровна ADK колмужексть площадьса.

Станя лисеньди, што DK виде китькссь максф ABC колмужексть явсы кафта ровнашка пялькссова: $ADK\,\triangle$ и $BCDK$ нилеужексова.

Кизефкст и упражненият.

1. Кода полафтови видеужексть площадец, кда a основаниянц кадомс апак полафтт, а h серьнц: 1) касфтомс 3-ксть, 2) ёмлалгафтомс 2-ксть?

2. Мзяроксть касы квадратть площадец, кда сонь эрь ширенц касфтомс колмоксть?

3. Уленьдихть или аф ровнашка разнай основаниянь и разнай серь мархта видеужексне?

4. Конань кувалмоса ули видеужексонь кодяма 160 *м* келеса модань участкась, кда сон полафтови 200 *м* шире мархта квадратнай формаса участкаса?

5. Видеужексть и квадратть периметрасна фкяньшкат. Видеужексть ширензон эзда фкять кувалмоц 90 *см*, квадратть ширец ровна 60 *см*. Эздост конань площадец сяда оцю и мзярода?

6. Видеужекссь и квадратсь ровнаста оцюфт. Видеужексть ширензон эзда фкясь ровна 120 *см*, а квадратть ширец ровна 60 *см*. Эздост конань периметрац сяда ёмла и мзярода?

7. Няфтемс, што *ниле колмужексне, конат тиевихть параллелограмать диагоналензон эса, ровнашкат.*

8. Параллелограмаса сяда ёмла $n = 5$ *см* диагональсь перпендикулярнай сонь ширензон эзда фкяти и ровна тейнза. Лувомс параллелограмать площаденц.

9. *Нилеужексть площадец, кононьди прякс арсихть максф параллелограмать ширензон кучкасна, ровна параллелограмать площаденц пяленцты.* Няфтемс тянь.

10. Равнобедреннай трапецияса диагональхне ётайхть фкя-фкянь туркс виде ужень тиезь. Трапециять серец h. Няфтемс, што трапециять площадец $S = h^2$.

11. Трапециять тиемс ровнашка: 1) параллелограмакс и 2) видеужексокс.

12. $a = 5$ *см* основания мархта и $h = 8$ *см* серь мархта оржужень колмужексть тиемс тяфтама жа основаниянь мархта ровнашка видеужексокс.

13. Максф $ABCD$ трапеция. Няфтемс, што *ся виде китькссь, кона поладсыня трапециять параллельнай ширензон кучкастонь K и L точкатнень, керсы трапециять кафта ровнашка трапециява.*

14. Тяштемс квадрат, конань площадец кафксть сяда оцю максф квадратть площаденц коряс.

Указания. Нолдамс тевс максф квадратть диагоналенц.

X. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЙ ВАСТТНЕ.

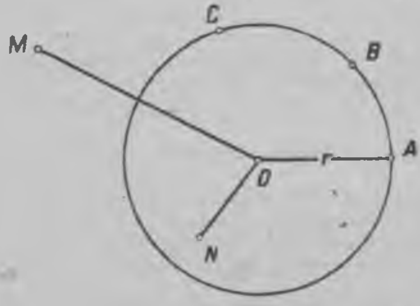
1 §. Китькссь, кода точкань геометрическай васта.

Окружностьть точканзон ули, кода содасаськ, тяфтама свойствасна: синь фкя точкаста, окружностьть центранц эзда, ащихть фкяньшка расстоянияса, кона ровна окружностьть радиусонцты.

Тяфтама свойствасна лапш лангса аньцек сят точкатнень, конат ащихть максф окружностьть лангса; сят точкатнень, конат ащихть сяка жа лапш лангса, конань лангса ащи окружностьсь, но аф ащихть окружностьть лангса, тяфтама свойствасна аш.

Афкукс, кда максф O точкаса центрань и $r = 3$ *см* радиус мархта окружность (165 тяш.), эста кодама кельк A, B или C точкась, кона ащи центрать эзда 3 *см* расстоянияса, ащи максф окружностьть лангса.

M точкась, кона ащи *O* центрать эзда *OM* расстоянияса, кона расстояниясь сяда оцю радиусть коряс, $OM > r$, ащи максф окружностьть эзда ушеса; *N* точкась, кона ащи *O* центрать эзда *ON* расстоянияса, кона расстояниясь радиусть коряс сяда ёмла, $ON < r$, ащи окружностьть потмоса. Тяфтаня: 1) максф окружностьть лангса ащи точкатнень ули определённай свойствасна: синь сембе ащихть фкяньшка расстоянияса фкя точкань эзда (центрать эзда); 2) сят точкатнень, конат аф ащихть максф окружностьть лангса, тяфтама свойствасна аш.



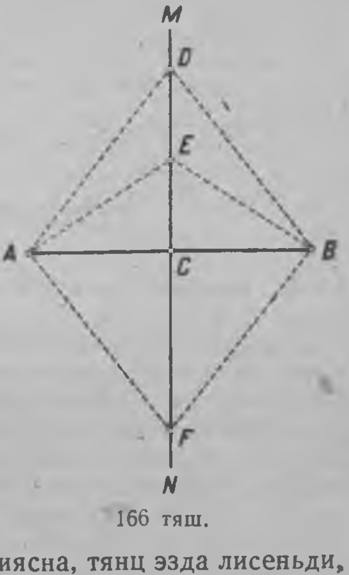
165 тяш.

Стама китьксненьди или китькснень совокупностьсонды, конатнень сембе точкаснон ули кодамовок определённай свойствасна, мзярда лия точкатнень, конат аф ащихть лангсост, тяфтама свойствасна аш, мярьгихть стама точкань геометрическай васта, конатнень ули максф свойстват кодяма свойствасна.

2 §. Геометрическай васттне.

1. *Окружностьсь — лапш лангса тяфтама точкань геометрическай васта, конат точкатне ровнаста ичкезет фкя точкаста — окружностьть центраста.*

2. *Теорема.* **Ся керфксти перпендикулярсь, кона ётафтф керфксть кучканц ланга, арси сят точкатненьди геометрическай вастокс, конат ровнаста ичкезет керфксть пензон эзда.**



166 тяш.

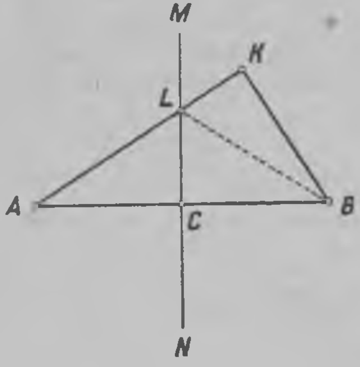
Максф: $AC = CB$, $MN \perp AB$ и *MN* перпендикулярть лангса *D*,*E*,*F*... точкат (166 тяш.).

Эряви няфтемс: $DA = DB$, $EA = EB$, $FA = FB$...

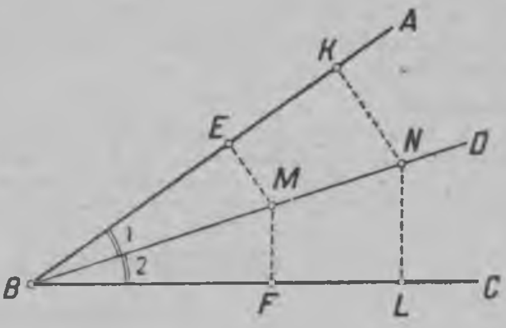
Няфтемац. *D*, *E*, *F* и ст. тов точкатнень поладсаськ виде китьксса керфксть песта *A* и *B* точкатнень мархта; лисихть *DA* и *DB*, *EA* и *EB*, *FA* и *FB* керфкст; нят керфксне кафтонь-кафта (попарно) ровнат, кода ширемф китькст, конат лисихть фкя точкаста и ровнат синь *AC* и *CB* проекциясна, тянц эзда лисеньди, $DA = DB$, $EA = EB$, $FA = FB$ и ст. тов. Станя лисеньди, што

AB керфксть кучкава ётай перпендикулярть кодама кельк точкац ащи керфксть A и B пензон эзда фкяньшка расстоянияса.

Сяфтяма кодамовок K точка, кона аф ащи максф MN перпендикулярть лангса (167 тяш.), эста KA аф ровна KB-ти. Афкукс, кда KA и MN виде китьксненъ фкя-фкянь туркс ётама L точкать виде китьксса поладсаськ B точкать мархта, эста KLB △ эзда ули, што $KB < KL + KB$. Кда LB керфксть полафтсаськ тейнза ровна AL керфксса, лиси: $KB < KL + LA$, или $KB < KA$. Лисеньди, што MN перпендикулярть лангса ащи эрь точкась ащи фкяшка ичкезе керфксть пензон эзда, MN перпендикулярть лангса аф ащи эрь точкать тяфтама свойстванза аш. Тяфтаня лисеньди, **AB керфксть C кучканц ланга ётафтф MN перпендикулярсь сят точкатненьди геометрическай васта, конат ровнаста ичкезет керфксть пензон эзда.**



167 тяш.



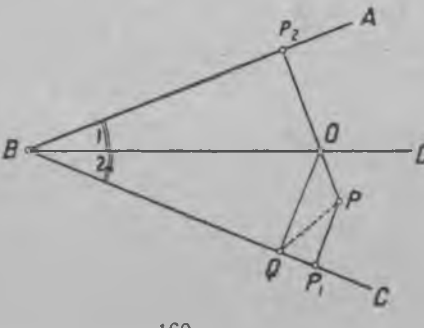
168 тяш.

3. *Теорема.* Ужеть биссектрисац арси сят точкатнень геометрическай вастокс, конат ровнаста ичкезет ужеть ширензон эзда.

Максф: BD—биссектриса; $1\angle = 2\angle$ (168 тяш.);
$ME \perp AB$ и $MF \perp BC$; $NK \perp AB$ и $NL \perp BC$ и ст. тов.

Эряви няфтемс: $ME = MF$, $NK = NL$ и ст. тов.

Няфтемац. MBE △ $=$ MBF △, сяс мес синь BM — марстонь гипотенузасна, $1\angle = 2\angle$. Тянц коряс лисеньди, $ME = MF$. Тяфта жа няфтьсазь, што $NK = NL$.



169 тяш.

Кда сявемс кодамовок P точка, кона аф ащи BO биссектрисать лангса (169 тяш.), эста сонь и B ужеть ширензон PP_1 и PP_2 ёткснa аф ровнат. Афкукс, кда ётафтомс PP_2-ть и BD биссектрисать фкя-фкянь туркс ётама O точкать эзда BC ширеть лангс OQ перпендикуляр, минь ули $OQ = OP_2$; но PP_1 перпендикулярсь сяда ёмла PQ ширемф китьксть коряс, $PP_1 < PQ$; тяда башка, OPQ колмужексть эзда лисеньди: $PQ < PO + OQ$, шарьхкедеви, што $PP_1 < PO + OQ$. Кда мекпяльдень аф равенстваса OQ полафтомс тейнза ровна OP_2 керфксса, лиси: $PP_1 < PO + OP_2$, или $PP_1 < PP_2$.

Лисеньди, што BD биссектрисать лангса ащи эрь точкась ащи фкяньшка расстоянияса B ужеть ширензон эзда; эрь точкать, кона аф ащи BD биссектрисать лангса, тяфтама свойствац аш. Тяфтаня, **ужет биссектрисац арси сят точкатненьди геометрическай вастокс, конат ровнаста ичкезет сонь ширензон эзда.**

4. Сят точкатненьди геометрическай вастокс, конат ровнаста ичкезет максф виде китькксть эзда, улихть кафта виде китькксне, конат параллельнайхть максф виде китькксти и ащихть эздонза кафцьке ширьганза фкяньшка расстоянияса.

5. Колмужекснень, конатнень фкя основаниясна и ровнат серьсна, пряснонды геометрическай вастокс улихть кафта виде китькксне, конат параллельнайхть максф основанияти и ащихть эздонза кафцьке ширьганза стама расстоянияса, кона ровна колмужекснень серьснонды.

Кезефкст.

1. Мезьсь ули сят точкатненьди геометрическай вастокс, конат ровнаста ичкезет кафта фкя-фкянь туркс ётай виде китькснень эзда?
2. Мезьсь ули сят точкатненьди геометрическай вастокс, конат ровнаста ичкезет кафта параллельнай виде китькснень эзда?

XI. ОКРУЖНОСТЬСЬ И КРУГСЬ.

1 §. Окружностьсь.

Окружностьсь прокс содаф, кда максфт сонь центрац и радиусоц; радиуссь няфнесы окружностьть размеронц, центрась — сонь вастонц (положениянц).

1. *Фкя A точкать ланга, кона аф арси центракс, ули кода лапш ланга ётафтомс аф лувомшка лама окружностьт* (170 тяш.); нят центратнень эзда эрь центрать вастонц ули кода сявемс лапш лангса коса повсь.

170 тяш.

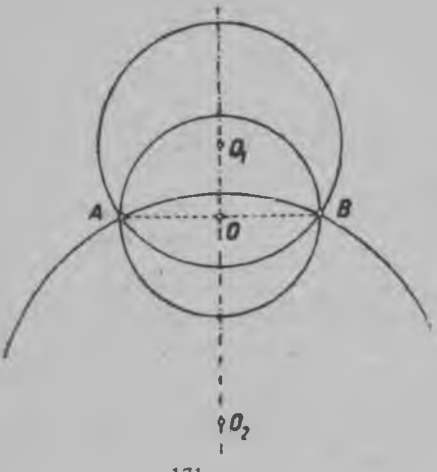
2. *Кафта A и B точкатнень ланга лапш лангса ули кода ётафтомс тяфта жа аф лувомшка лама окружностьт* (171 тяш.), конатнень центрасна аф улихть коса повсь лапш лангса, кода ульсь васеньце случайть эса; синь сембе кармайхть ащема ся перпендикулярть лангса, кона ётай AB керфксть O кучканц ланга, кона керфксть пенза A и B точкатнень эса.

Афкукс, условиять коряс A и B точкатненьди, AB керфксть пензонды, эряви ащемс окружностьть лангса, тянц коряс лисеньди, што окружностьть центрац ащи эздост ровна расстоянияса; сят точкатненьди, конат ровнаста ичкезет керфксть пензон эзда, геометрическай вастокс ули ся перпендикулярсь, кона ётай керфксть кучканц ланга.

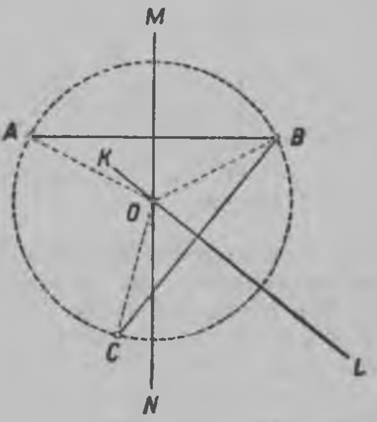
3. *Колма A, B и C точкатнень ланга* (172 тяш.), *конат аф ащихть фкя виде китькс лангса, ули кода ётафтомс окружность и аньцек фкя.* Сонь центрац, кода колма максф точкатнень эзда ровнаста ичкезеста ащи точка, ащи кафта MN и KL перпендикулярхнень фкя-фкянь туркс ётама вастса, конат перпендикулярхне ётайхть сят керфкснень кучкаснон ланга, конат поладсазь кафтонь-кафта (попарно) эрь максф кафта точкатнень:

$$MN \perp BA \text{ и } KL \perp BC.$$

MN и KL перпендикулярхне ётайхть фкя-фкянь туркс, кода кафта фкя-фкянь туркс ётай AB и BC виде китьксненьди перпендикулярхт. O точкась, нят перпендикулярхнень фкя-фкянь туркс ётама точкасна, ули окружностьть центрац, сяс мес сон ащи ровна расстоянияса A, B и C точкатнень эзда. $AO = OB = OC = r$ окружностьть радиусонцты. Кафта MN и KL виде китьксне ётайхть фкя-фкянь туркс аньцек фкя точкаса. Лисеньди, што колма A, B и C точкатнень ланга ули кода ётафтомс аньцек фкя окружность.



171 тяш.



172 тяш.

Колма точкатнень коряс, конат аф ащихть фкя виде китьксонь лангса, прокс ули кода содамс окружностьть ащема вастонц и размеронц.

4. Кда колма A, B и C точкатне ащихть фкя виде китькс лангса, эста MN и KL перпендикулярхне, конат ётафтфт AB и BC виде китькснень кучкаснон ланга, параллельнайхть кода фкя китьксоньди кафта перпендикулярхт, лиякс мярьгемс, аш синь марстонь точкасна. Тяста лисеньди, што фкя виде китькс лангса ащи колма A, B и C точкатнень ланга окружность аф тяштеви. Лисеньди, што виде китькстъ аф уленьдихть окружностьть мархта колма марстонь точкасна.

Виде китькссь ётай окружностьть туркс аньцек кафта точкава.

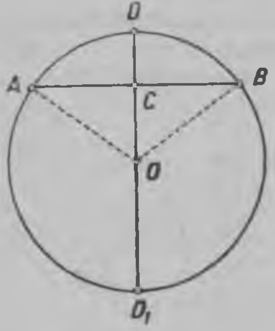
2 §. Хордати перпендикулярнай диаметрать свойствац. Кругса симметриясь

1. ***Теорема.*** **Диаметрась, кона перпендикулярнай хордати, явсыня сонь и эздонза кемекстаф дугатькя кучкава.**

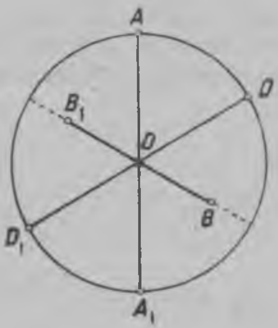
Максф: $\underline{DD_1}$ — диаметра; AB — хорда: $DD_1 \perp AB$ (173 тяш.).

Эряви няфтемс: 1) $AC = CB$, 2) $AD\smile = BD\smile$ и 3) $AD_1\smile = BD_1\smile$.

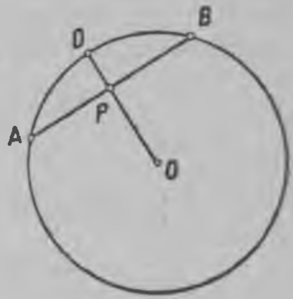
Няфтемац. A и B точкатне, AB хордать пенза, кода окружностьть лангса ащихть, фкяньшка ичкезет O центрать эзда, кона ащи AB хордати перпендикулярнай DD_1 диаметрать лангса, AOB колмужекссь равнобедреннай и OC-сь, кода перпендикулярнай AB-ти, арси сонь симметриянь осекс. Тяста лисеньди, што $CA = CB$, лиякс мярьгемс, што AB **хордась явови тейнза перпендикулярнай диаметрать эса кучкава.** Кда



173 тяш.



174 тяш.



175 тяш.

кругть мяньдемс DD_1 диаметрать колга, эста эсонза окружностьсь явови кучкава, сяс мес DAD_1 дугать точканза арайхть DBD_1 дугать точканзон лангс, лиякс мярьгемс диаметрась—кругть и окружностьть симметриянь осьсна. Тяда башка, $AD\smile$ вельхтясы $BD\smile$и $AD_1\smile$ вельхтясы $BD_1\smile$.лиякс мярьгемс дугатне, конатнень кемекстасынь хордась, явовихть хордати перпендикулярнай диаметрать эса кучкава.

2. Кругть эса ули кода ётафтомс аф лувомшка лама диаметрат; лисеньди, кругть улихть аф лувомшка лама симметриянь осенза.

Кругть или окружностьть осень симметрияда башка улихть нингя центральнай симметриясна, тя вов мезе: кругть эса и окружностьть эса улихть аф лувомшка лама кафтонь-кафта точкат, конат ащихть центрати симметричнайста. Тяфтама точкатне ащихть ся виде китькстъ лангса, кона ётай центрать ланга и ащихть центрать эзда фкяшка расстояннияса.

Эрь диаметрать пенза, A и A_1, D и D_1 точкатне (174 тяш.), симметричнайхть O центрать колга; окружностьть потмоса ащи B и B_1 точкатне симметричнайхть O центрать колга; синь ащихть центрать эзда ровна расстояннияса ся виде китькстъ лангса, кона ётай центрать ланга: $OB = OB_1$.

3. **Задача.** *Максф AB дугать явомс кучкава* (175 тяш.).

Тиемац. Центрать эзда ётафттама AB хордати перпендикуляр и кувалгафтсаськ сонь AB дугать туркс D точкаса ётамс, эста $AD\smile = BD\smile$. Кда центрать ащема вастоц апак няфтьть, ётафттама AB хордать кучкава OP перпендикуляр, кона явсы AB дугать D точкаса кучкава.

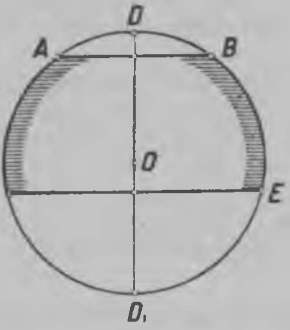
3 §. Параллельнай хордань ёткса ащи дугатнень свойствасна.

Теорема. **Параллельнай хордань ёткса ащи дугатне ровнат.**

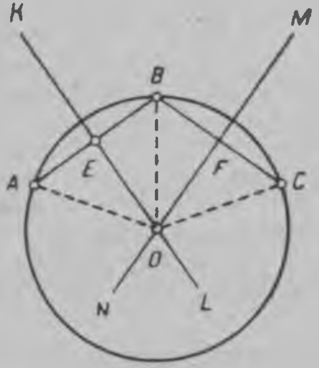
Максф: AB и CE — хордат; $AB \parallel CE$ (176 тяш.).

Эряви няфтемс: $AC\smile = BE\smile$.

Няфтемац. Ётафттама параллельнай AB и CE хордатненьди перпендикулярнайста D_1D диаметра. Кда кругть мяньдемс D_1D диаметрать колга, эста фкя-фкянь вельхтяйхть: A точкась B точкать мархта, C точкась E точкать мархта и AC дугась BE дугать мархта, сяс $AC\smile = BE\smile$.



176 тяш.



177 тяш.

4 §. Окружностьть и дугать центраснон мушендомасна.

1-це задачась. *Максф окружность, конань центрац апак тяштьть. Мумс сонь центранц.*

Тиемац. Сяфтяма максф окружностьть лангса кодамовок колма A, B и C точкат, ётафттама AB и BC хордат (177 тяш.) и тейст синь E и F кучкаснонланга KL и MN перпендикулярхт.

Кафцьке перпендикулярхне ётайхть окружностьть центранц ланга; вешеньдеви центрась фкя пингста кармай ащема и MN перпендикулярть и KL перпендикулярть лангса, а именна синь фкя-фкянь туркс ётама O точкаса. Кда O точкать виде китькссa поладсаськ A, B и C точкатнень мархта, лиси: $AO = OB = OC$, сяс A, B и C точкатне ащихть O точкать эзда ровна расстоянияса, а условиять коряс синь ащихть окружностьть лангса, сяс O точкась ули окружностьть центрац.

2-це задачась. *Максф дуга. Мумс сонь центранц.*

Тиемац. Дугать центранц мушендсазь станя жа тяштезь, кода окружностьть центранц.

5 §. Хордатнень и дугатнень ёткса зависимостьсь.

Теорема. **Фкя кругса (или ровна кругса) ровна хордатне кемекснихть ровна дугат и, меклангт, ровна дугатне кемекснevихть ровна хордаса.**

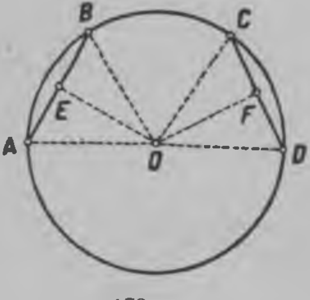
1) Максф: AB и CD хордатне ровнат (178 тяш.).

Эряви няфтемс: $AB\smile = CD\smile$.

2) Максф: $AB\smile = CD\smile$.

Эряви няфтемс: $AB = CD$:

Няфтемац. 1. AB и CD хордаснон песнон виде китьксса поладсаськ O центрать мархта, лисихть кафта ровна колмужекст: AOB и COD; синь $AB = CD$ условиять коряс, $OA = OC$ и $OB = OD$ кода фкя окружностень радиуст.



178 тяш.

Мес ровнат нят колмужексне, лисеньди, што $AOB\angle = COD\angle$; ровна центральнай ужетнень каршеса ащихть ровна дугат, а сяс $AB\smile = CD\smile$.

2. $AB\smile = CD\smile$, сяс ровнат каршесост ащи центральнай ужетневок, лиякс мярьгемс $AOB\angle = COD\angle$. AOB и COD колмужекснень эса AO и OC, OB и OD ширетне ровнат, кода фкя окружностень радиуст, ровнат синь ёткссост ужетневок, лисеньди, што $AOB\triangle = COD\triangle$, а тянь коряс лисеньди, што AB и CD хордатне ровнат: $AB = CD$.

6 §. Хордатнень и центрать эзда синь расстоянияснон ёткса зависимостьсь.

1. ***Теорема.*** **Фкя кругса или ровна кругса ровна хордатне ровнаста ичкезет центрать эзда и, меклангт, хордатне, конат ровнаста ичкезет центрать эзда, ровнат.**

1) Максф: $AB = CD$; $OE \perp AB$ и $OF \perp CD$ (178 тяш.).

Эряви няфтемс: $OE = OF$.

Няфтемац. AOB и COD колмужексонь равенствать эзда лисеньди, што синь серьсна ровнат, лиякс мярьгемс, $OE = OF$.

2) Максф: $OE \perp AB$ и $OF \perp CD$, $OE = OF$ (178 тяш.).

Эряви няфтемс: $AB = CD$.

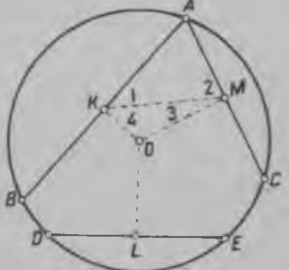
Няфтемац. Видеужень -AOE и COF колмужекснень эса $AO = OC$ кода радиуст и $OE = OF$ условиять коряс, сяс $AOE\triangle = COF\triangle$, а тяста лисеньди, што $AE = CF$; но кда $AE = CF$, лиякс мярьгемс, ровнат AB и CD хордатнень пялесна, эста ровнат синьць хордатневок; станя, $AB = CD$.

2. *Теорема.* Окружностьть кафта хорданзон эзда сяда ёмлась центрать эзда ащи сяда ичкезе и, меклангт, окружностьть сяда оцю хордац ащи центрать эзда сяда маласа.

Максф: окружностьть эса AB хордась $> DE$ хордать коряс (179 тяш.).

Эряви няфтемс: $OK < OL$.

Няфтемац. AB хордать A пестонза ётафттама хорда $AC = DE$, эста центрать эзда синь расстояниясна улихть ровнат: $OM = OL$. K поладсаськ M мархта KM виде китькса и ванцаськ KAM колмужекксть. Эсонза $AK > AM$ кода аф ровна AB и AC хордань пялет, конатнень эзда $AB > AC$, а сяс $2\angle > 1\angle$ (колмужексса сяда оцю ширеть каршеса ащи сяда оцю ужесь). KOM колмужексса ули: $3\angle = 90° - 2\angle$ и $4 = 90° - 1\angle$. Кда серьстасаськ нят равенстватнень види ширень пяльксснон, лиякс мярьгемс, $90° - 2\angle$ и $90° - 1\angle$ разностьтнень, минь няйсаськ, што сявеви $2\angle$-сь сяда оцю ёмлалгадыть $1\angle$ коряс, лисеньди, што



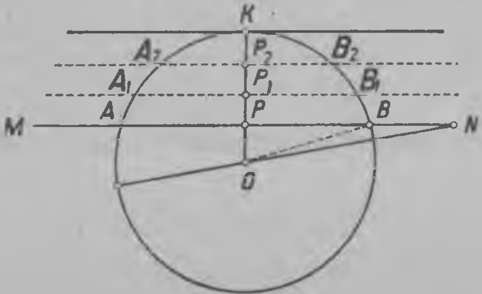
179 тяш.

$$90° - 2\angle < 90 - 1\angle,$$

а сяс и $3\angle < 4\angle$; но колмужексса сяда ёмла ужеть каршеса ащи сяда ёмла ширесь, а сяс $OK < OM$. Полафтсаськ OM тейнза ровна OL керфксса, лиси: $OK < OL$, мезе и эрявсь няфтемс.

7 §. Виде китькстъ окружностьть колга разнайста ащемац. Керы китькссь и токай китькссь.

1. Виде китькстъ окружностьть мархта эсь ащеманц коряс синь уленьдихть: 1) кафтонь марстонь точкасна, 2) аньцек фкя марстонь тачкасна и 3) фкявок марстонь точкасна аш.



180 тяш.

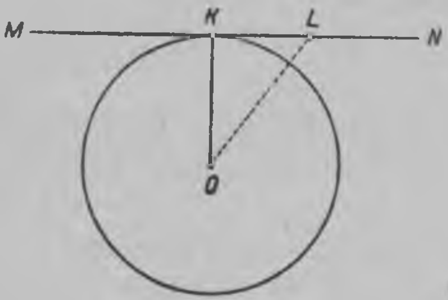
Виде китькстъ окружностьть мархта марстонь кафта точкада лама улемс аш кода, сяс мес фкя виде китькс лангса ащи колма точка ланга окружность аф ётафтови.

2. MN виде китькстъ (180 тяш.), кона ётай окружностьть туркс, мархтонза улихть марстонь кафта A и B точкасна и мярьгихть тейнза керы китькс; MN керы китькстъ AB керфксоц, конань A и B пенза ащихть окружностьть лангса, ули AB хордась. MN керы китькссь ащи центрать эзда OP расстоянияса, тяка пингста $OP \perp MN$ и $OP < r$. Центрать ланга ётай керы китькси мярьгихть центральнай керы китькс и сон арси окружностьти симметриянь осекс.

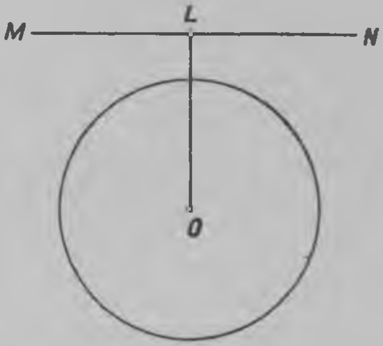
3. Кда MN керы китькcть шашфтомс эсьтейнза параллельнайста, сембе пингста улель центрать эзда сяда ичкезе, эста: 1) сонь потмостонь пялькcоц, AB хордась, сембе пингста ёмлалгады, $AB > A_1B_1 > A_2B_2 ...$; 2) центрать эзда сон кармай улема сембе сяда ичкезе, $OP < OP_1 < OP_2 ...$; 3) окружностьть мархта сонь фкя-фкянь туркс ётама A и B точкатне сяда малалгадыхть.

MN керы китькcти, сонь шашфтомстонза, ули кода арамс станя, мзярда окружностьть мархта сонь фкя-фкянь туркс ётама A и B кафцьке точканза арайхть фкя K точкас и керы китькcть потмостонь пялькcоц — AB хордась — арай точкакс.

Тяфта ащемстонза MN керы китькcти (181 тяш.), мярьгихть токай китькс, сонь окружностьть мархта марстонь K точкати, мярьгихть токама точка. Центрать эзда токай китькcть расстоянияц, кона ровна OK-ти, ули окружностьть радиусоц: $OK = r$. Станя, ся виде китькcти, конань окружностьть мархта аньцек фкя марстонь точкасна, мярьгихть токай китькс; сон ащи центрать эзда стама расстоянияса, кона ровна окружностьть радиусонцты.



181 тяш.



182 тяш.

4. MN виде китькcть (182 тяш.), кона ащи окружностьть центранц эзда радиусть коряс сяда оцю OF расстоянияса, $OL > r$, мархтонза марстонь точкасна аш и ащи окружностьть эзда башка.

Станя лисеньди, MN виде китькcть центрать колга ащемац мушендови центрать эзда сонь d расстояниянц вельде: 1) $d < r$, MN — керы китькс; 2) $d = r$, MN — токай китькс; 3) $d > r$, MN — ащи окружностьть эзда башка.

5. ***Теорема.*** **Токай китькcсь перпендикулярнай ся радиусти, кона ётафтф токама точкати.**

Максф: MN токай китькс, K — токама точка (181 тяш.).

Эряви няфтемс: $OK \perp MN$.

Няфтемац. Сяфтяма коста-коста MN токай китькcть лангса L точка и поладсаськ сонь O центрать мархта. L точкась ащи окружностьть эзда башка, а сяс тя точкать окружностьть центранц эзда расстоянияц радиусть коряс сяда оцю: $OL > OK$. Станя лисеньди, што OK сембеда нюрьхкяня расстояниясь O точкать эзда токай китькcти молемс, а точкать эзда виде китькcти молемс сембеда нюрьхкяня расстояниясь ули перпендикуляр. Станя, $OK \perp MN$.

6. *Теорема (мекланго нь).* **Всякай виде китькссь, кона перпендикулярнай радиусти сонь песонза, кона ащи окружностьть лангса, ули токай китькс.**

Максф: $MN \perp OK$ (181 тяш.).

Эряви няфтемс: MN — токай китькс.

Няфтемац. OK перпендикулярсь сяда нюрьхкяня всякай лия OL виде китькссть коряс, кона ётафтф O точкать эзда MN виде китькссть лангс, а сяс $OL > OK$ и L точкась ащи окружностьть эзда башка; K точкась — MN виде китькссть лангса тяка точкась, кона сяка жа пингста ащи окружностькя лангса; MN виде китькссь, конань окружностьть мархта ули аньцек фкя марстонь K точкасна, ули токай китькс.

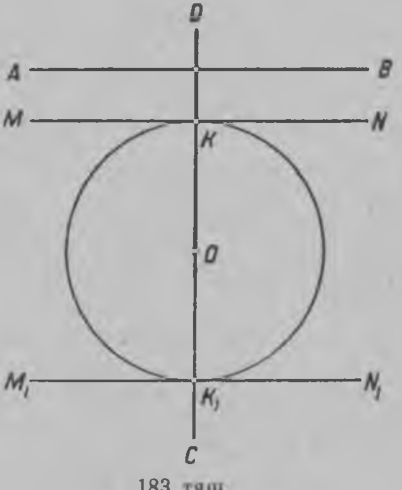
8 §. Токай китькснень ётафнемасна.

1-це задачась. *Максф окружностьть максф K точканц ланга ётафтомс тя окружностьти токай китькс* (181 тяш).

Тиемац. Ётафттама OK радиус и K точкать ланга виде китькс $MN \perp OK$. Тя MN перпендикулярсь ули вешеньдьф токай китькссь.

2-це задачась. *Ётафтомс максф окружностьти токай китькс, кона улель ба параллельнай максф AB виде китькссти* (183 тяш.).

Тиемац. Ётафттама O центрать ланга виде китькс $CD \perp AB$; тя виде китькссь ётай окружностьть туркс кафта K и K_1 точкава. Тяда меле K и K_1 точкатнень ланга ётафттама KK_1 диаметрати перпендикулярнай MN и M_1N_1 виде китькст. Кафцьке нят виде китькснe улихть вешеньдеви токай китькснe.



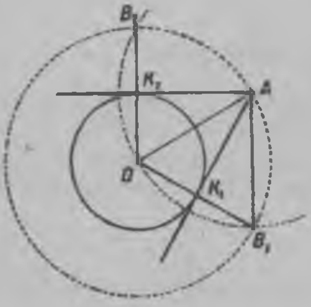
183 тяш.

3-це задачась. *Ушестонь A точкать эзда ётафтомс максф окружностьти токай китькст* (184 тяш.).

1) Арьсетяма, што задачась тиф и што максф A точкать эзда O точкаса центрань мархта максф окружностьти ётафтф AK_1 токай китькс. Кда O точкать поладсаськ K_1 точкать мархта, лиси виде ужень AOK_1 колмужекс. Кувалгафтсаськ OK_1 радиусть и тя кувалгафтфть лангс ункстатама керфкс $KB_1 = OK_1 = r$. Кда B_1-ть поладсаськ A-ть мархта, лиси равнобедреннай AOB_1 колмужекс, конань эса AK_1 ули сонь серец, а сяс и сонь медианац. Станя лисеньди, што задачась арси равнобедреннай AOB_1 колмужекстъ колмоце B_1 прянц вешемакс, кона колмужекстъ кафта прянза: A — максф точкась и O—максф окружностьть центрац—максфт; AO-сь—колмужекстъ боконь ширец, B_1 точкась ащи: 1) окружностьть

лангса, конань центрац A точкать эса и AO радиусоц ровна A точкать эзда O центрати молемс расстоянияти и 2) окружностьть лангса, конань центрац O точкать эса и OB_1 радиусоц ровна максф окружностьть диаметранцты; сяс B_1 точкась ули кафцьке окружностьтнень фкя-фкянь туркс ётама точкасна.

2) Тиемац. Максф окружностьть диаметранц кувалмоса радиусонь вельде тяштьтяма васеньце лезды окружностьть, конань центрац O, тяда меле тяштьсаськ омбоце лезды окружность, конаньди центракс сявсаськ A точкать, а радиусокс сявсаськ A точкать эзда максф окружностьть O центранцты OA расстояниять. Омбоце лезды окружностьть васеньцеть туркс ётама B_1 и B_2 точкатнень поладсаськ O центрать мархта; OB_1 и OB_2 виде китьксне ётайхть окружностьть туркс кафта K_1 и K_2 точкава, конат арсихть кафта AK_1 и AK_2 токай китьксnень токама точкакс, конат китьксне ётафтфт максф окружностьти ушеса ащи A точкаста.



184 тяш.

3) Няфтемац. B_1 точкать поладсаськ A точкать мархта, лиси равнобедреннай AB_1O колмужекс, конань $AO = AB_1$ кода A точкаса центра мархта окружностень радиуст; тяда башка, K_1 точкась OB_1-ть кучкац, сяс мес тиемать коряс $OB_1 = 2OK_1$, тяста лисеньди, што равнобедреннай AOB_1 колмужекстъ эса AK_1 виде китькссь арси и медианакс и серькс, лиякс мярьгемс сон перпендикулярнай OB_1-ти K_1 точкаса. Станя, $AK_1 \perp OK_1$, лиякс мярьгемс AK_1 виде китькссь перпендикулярнай OK_1 радиусти сонь K_1 песонза, кона ащи окружностьть лангса, сяс сон ули токай китькс максф окружностьти. Станя жа арьси AK_2 виде китькстъ — омбоце токай китькстъ колга, кона ётафтф максф окружностьти башка ащи A точкаста.

4) Кафта окружностьтне ётайхть фкя-фкянь туркс кафта B_1 и B_2 точкаса, сяс максф задачать ули кода тиемс кафта лаца, лиякс мярьгемс максф A точкаста, кона ащи окружностьть эзда башка, ули кода максф окружностьти ётафтомс кафта AK_1 и AK_2 токай китькст.

Токай китьксонь кувалмокс сявеньдсазь ся керфкстъ, конаньди пекс арсихть максф A точкась и токай K_1 или K_2 точкась.

9 §. Фкя и сяка жа точкаста ётафтф токай китьксnень свойствасна.

1. ***Теорема.*** **Токай китьксне, конат ётафтфт окружностьти окружностьть эзда башка ащи точкаста, ровнат.**

Максф: AK_1 и AK_2 токай китькст; K_1 и K_2—токама точкат (184 тяш.)

Эряви няфтемс: $AK_1 = AK_2$.

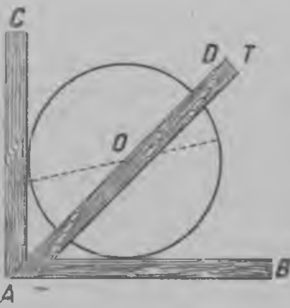
Няфтемац. Видеужень AOK_1 и AOK_2 колмужексне ровнат; синь AO ширесна — марстонь гипотенузасна, а $OK_1 = OK_2$ кода радиуст. Колмужекснень равенстваснон эзда лисеньди, што $AK_1 = AK_2$.

2. Сякот жа колмужекснень равенстваснон эзда станя жа лисеньди, што $OAK_1 \angle = OAK_2 \angle$, лиякс мярьгемс, *OA-сь A ужеть биссектрисац, кона ужесь тиевсь кафта токай китьксса, конат китьксне лисихть фкя точкаста.*

Центральнай AO керы китьксcь—A ужеть симметриянь осец, кона ужесь тиевсь сят токай китькснень эзда, конат ётафтфт башка ащи A точкать эзда максф окружностьти.

3. Центрань вешеньдемась. Кругть центранц вешеньдьсазь кой мзярда стама приборса, конаньди мярьгихть центрань вешеньдема. Кода сон тиф, няфтьф 185 тяштьксса. Сон тиф кафта *AB* и *AC* планкаста, конат кемекстафт станя, што ёткcост тиевсь виде уже и колмоце *AD* планкаста, конань фкя краенц вельхтясы виде ужеть биссектрисац. Тя приборть эса работамась стама, што кафта токай китьксста тиф ужеть биссектрисац ётай кругть центранц ланга.

Путсаськ центрань вешеньдемать кафксть кругть мархта, конань центранц эряви мумс, и эрь путомста ётафттама *T* планкать ребранц кувалмова *AD* виде китькс, тяфта мусаськ кругть ланга тяштьф кафта виде китькснень фкя-фкянь туркс ётама точкаса *O* центрать.



185 тяш.

Центрань вешемать прянц эзда токама точкати молемс расстояниясь ровна кругть радиусонцты, сяс мес радиусне, конат ётафтфт центрань вешеньдемать ширензон кругть мархта токама точкатненьди, тиихть центрань вешемать ширензон мархта квадрат.

Кизефкст и упражненият.

1. Кода мумс окружностьть *A* точканцты сонь центрально-симметричнай точканц?

2. Мезень пяльде аф фкат токай китькссь керы китькcть мархта?

3. Конашка ёткснa кафта параллельнай токай китькснень?

4. Няфтемс, што *ся токай китькссь, кона параллельнай хордати, токама точкаса явсы кучкава ся дугать, кона кемекстаф хордать вельде.*

5. Мезе ули ся окружностень центратненьди геометрическай вастокс, конат окружностьтнень радиуссна 3 *см* и ётайхть максф *A* точкать ланга? Тиемс чертёж.

6. Тиемс 4 *см* кувалмоса радиусса окружностьть эса хорда, конань кувалмоц станя жа 4 *см*, кона ётай окружностьть лангса максф *A* точкать ланга. Мзяра тяфтама хордада ули кода ётафтомс?

7. *O* центрать мархта кругть потмоса ащи *A* точкать ланга ётафтомс *MN* хорда, кона *A* точкаса явови кучкава.

8. Окружностьть *A* точканц эзда ётафтфт кафта фкя-фкяньди перпендикулярнай и ровна хордат, конат центрать эзда ащихть 3 *см* кувалмоса вастса. Лувомс синь кувалмоснон.

9. Ётафтомс окружность, кона токаль ба максф *MN* виде китькcти *P* точкасонза. Варжамс, мзяра ётафтови окружностьта и азомс, коса ащихть синь центрасна.

10. Максф $a = 5$ *см* шире мархта $ABCD$ квадрат. Тяштемс кафта окружностьт тяфта, штоба квадратть ширенза фкя пингста улельхть фкяти хордакс, а омбоцети токай китьксокс.

11. Тяштемс 3 *см* и 5 *см* кувалмоса радиусса кафта концентрическай окружностьт. Тяда меле сяда оцю окружностьти тиемс кафта параллельнай хордат, конат токальхть сяда ёмла окружностьти и няфтемс, што нят хордатне ровнат.

12. A точкась ащи окружностьть эзда башка. 1) Тиемань вельде мумс сонь сембеда нюрьхкяня и сембеда кувака расстояниянц окружностьть эзда.

Указания. Точкать эзда окружностьти молемс сембеда нюрьхкяня расстояния мярьгихть центральнай керы китькссть ся керфксонцты, коналньди пекс улихть максф точкась и окружностьть мархта керыть туркс ётама сембеда маласта точкась.

2) Мзярода A точкать эзда r радиусса окружностьти сембеда кувака расстояниясь сяда оцю сонь сембеда ёмла расстоянианц коряс?

3) Тиемс сят точкатнень геометрическай вастснон, конат ащихть максф $r = 5$ *см* радиусса тяштьф окружностьть эзда 2 *см* кувалмоса расстоянияса.

13. Мезьсь арси сембе сят окружностьтнень центраснонды геометрическай вастокс, конат токайхть кафта максф AB и CD виде китьксненьди, кда нят виде китьксне: 1) параллельнайхть и 2) ётайхть фкя-фкянь туркс?

14. $r = 5$ *см* радиусса тяштьф окружностьти тяштемс токай китькс, перпендикулярнай максф MN виде китькcти. Исследовандамс, мзяра ули кода тяштемс токай китькста и конашкава оцю синь ёткcост расстояниясь.

15. *О окружностьти тяштьф* MN *токай китькс. Кда кодамовок* AB *диаметрать* A *и* B *пестонза ётафтомс токай китькcти перпендикулярхт* $AC = a$ *и* $BD = b$*, эста нят перпендикулярхнень суммасна ули ровна диаметрати, лиякс мярьгемс* $a + b = 2r$*. Няфтемс тянь.*

16. Мезьсь арси максф окружностьти ровна хорданзон кучкаснонды геометрическай вастокс?

XII. УЖЕТНЕНЬ УНКСНЕМАСНА.

1 §. Окружностьть лангса пря мархта ужесь и сонь ункстамац.

1. Ся ужесь, конань пряц окружностьть центраса, ули центральнай уже и сонь ункснесазь ширензон ёткста дугать вельде.

Ванцаськ ужетнень, конатнень прясна ащихть аф окружностьть цантраса, а окружностьть лангса, сонь потмосонза или окружностьть эзда башка.

2. *Ужети, конань пряц ащи окружностьть лангса и конаньди ширекс арсихть хордат, мярьгихть потму тяштьф уже.*

$ABC\angle$ потмос тяштьф уже (186 тяш.), сон нежедькши окружностьть AC дуганц лангс; AC дугать каршеса ащи центральнай AOC ужесь.

3. *Теорема.* **Потму тяштьф ужесь ровна центральнай ужеть пяленцты, кона ужесь нежеди сяка жа дугать лангс, и ункснесазь тя дугать пяленц вельде.**

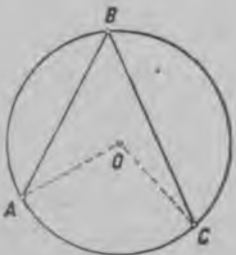
Максф: $ABC\angle$ — потму тяштьф уже, AB — хорда, BC — хорда (186 тяш.).

Эряви няфтемс: $ABC\angle = \frac{AOC\angle}{2}$; $ABC\angle$ ункснесазь $\frac{AC\smile}{2}$.

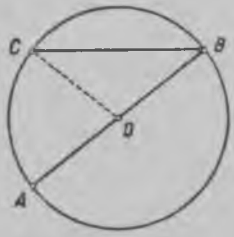
Няфтемац. Ванцаськ башка колма тиеви случайхнень.

1) Потму тяштьф ужети ширекс арсихть BA диаметрась и BC хордась (187 тяш.). C точкать поладсаськ O центрать мархта,

лиси равнобедреннай BOC колмужекс, сяс мес $OB = OC = r$; центральнай AOC ужесь ули BOC колмужекстъ ушестонь ужец, сяс $AOC\angle = B\angle + C\angle$, но $B\angle = C\angle$, сяс лисеньди $AOC\angle = 2B\angle$, а сяс $B\angle$, или $ABC\angle$ ровна $\frac{AOC\angle}{2}$.



186 тяш.

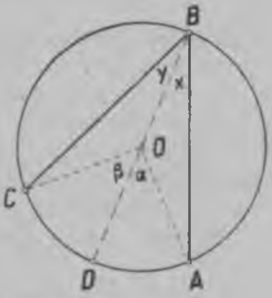


187 тяш.

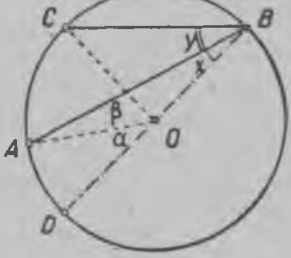
Центральнай AOC ужеть ункснесазь AC дугать вельде, но потму тяштьф ужесь ровна центральнай ужеть пяленцты, лисеньди, сонь ункснесазь ся дугать пялесонза, конань лангс сон нежедькши:

$$ABC\angle \text{ ункснесазь } \frac{AC\smile}{2} \text{ вельде.}$$

2) Потму тяштьф ABC ужети ширекс арсихть BA и BC хордатне, конатнень ёткса ащи окружностьть O центрац (188 тяш.).



188 тяш.



189 тяш.

Ётафттама BD диаметра, кона явсы потму тяштьф ужеть $x\angle$ и $y\angle$ и центральнай ужеть $\alpha\angle$ и $\beta\angle$.

$$x\angle = \frac{\alpha\angle}{2}, \text{ и } y\angle = \frac{\beta\angle}{2};$$

лисеньди,

$$x\angle + y\angle = \frac{\alpha\angle}{2} + \frac{\beta\angle}{2} = \frac{\alpha\angle + \beta\angle}{2}.$$

Тяфта лисеньди,

$$ABC\angle = \frac{AOC\angle}{2};\ ABC\angle \text{ ункснесазь } \frac{AC\smile}{2} \text{ вельде.}$$

3) Потму тяштьф ABC ужети ширекс арсихть BA и BC хордатне, конат ащихть O центрать эзда фкя ширеса (189 тяш.).

$$ABC\angle = CBD\angle - ABD\angle \text{ и } AOC\angle = COD\angle - AOD\angle,$$

но

$$CBD\angle = \frac{COD\angle}{2} \text{ и } ABD\angle = \frac{AOD\angle}{2},$$

а сяс

$$CBD\angle - ABD\angle = \frac{COD\angle}{2} - \frac{AOD\angle}{2} = \frac{COD\angle - AOD\angle}{2}.$$

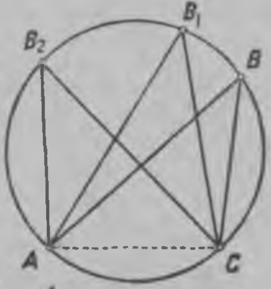
Тяфта лисеньди,

$$ABC\angle = \frac{AOC\angle}{2};$$

$$ABC\angle \text{ ункснесазь } \frac{AC\smile}{2} \text{ вельде.}$$

Потму тяштьф ужеть величинац аф полафневи сянь эзда, кода сонь тиренза ащихть окружностьть центранц колга и сембе пингста сон ровна центральнай ужеть пяленцты, конань дуганц лангс нежеди потму тяштьф ужесь.

Следствият. **1) Потму тяштьф ужетне, конат нежедькшихть фкя дуга лангс, ровнат** (190 тяш.).



190 тяш.

$B\angle, B_1\angle, B_2\angle$ и ст. тов нежедихть фкя дуга лангс; эздост эрь ужеть ункснесазь тя дугать пяленц вельде, лисеньди, што синь эсь ётковаст ровнат: $B\angle = B_1\angle = B_2\angle$ и ст. тов.

A и C точкатнень поладсаськ AC хордаса. Тя хордась, кода корхтайхть, ABC дугать эрь точкаста няеви фкяшка B ужень тиевозь.

2) Потму тяштьф ужесь, кона нежеди диаметрать пензон лангс, ули виде.

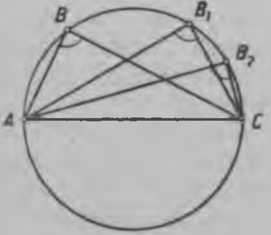
$B\angle = B_1\angle = B_2\angle = d$ (191 тяш.), сяс мес эздонза эрь ужесь нежеди 180° дуга лангс, ункснесазь сонь пяленц эса и, лисеньди, сонь эсонза 90°.

4. *Теорема.* Ся ужеть, кона тиевсь токай китькстть и токама точкать эзда ётафтф хордать ёткс, ункснесазь синь ёткстост дугать пялесонза.

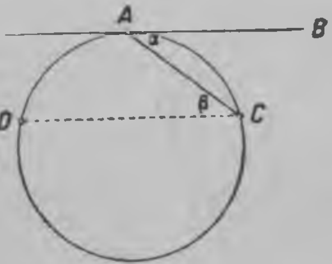
Максф: AB — токай китькс, AC — хорда (192 тяш.).

Эряви няфтемс: $BAC\angle$ ункчесазь $\frac{AC\smile}{2}$ вельде.

Нафтемац. Тяштьтяма лезды виде китькс $CD \parallel AB$. Эста $\alpha\angle = \beta\angle$ кода накрест ащи ужет и $AD\smile = AC\smile$ кода параллельнай виде китьксонь ёткса дугат — AB токай китькстъ и CD хордать ёткса. Станя, $\beta\angle$ ункснесазь $\frac{AD\smile}{2}$ вельде, но $\beta\angle = \alpha\angle$ и $AD\smile = AC\smile$, а сяс $\alpha\angle$ ункснесазь $\frac{CA\smile}{2}$ вельде.



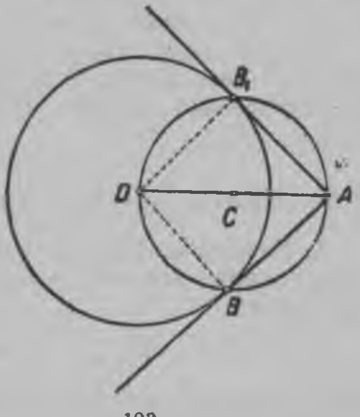
191 тяш.



192 тяш.

5. Задача. *Ётафтомс ушестонь A точкать эзда максф окружностьти токай китькст* (омбоце способсь) (193 тяш.).

Тиемац. Поладсаськ A точкать O центрать мархта и ётафттама лезды окружность, OA сявсаськ диаметракс; сон ётай максф окружностьть туркс B и B_1 точкава; кда ётафтомс A и B и A и B_1 точкатнень ланга виде китькст, лисихть вешеньдеви AB и AB_1 токай китьксне. Афкукс, $AB \perp OB$ и $AB_1 \perp OB_1$, лиякс мярьгемс, максф окружностьть радиусонцты, сяс мес $B\angle$ и $B_1\angle$ — виде ужет, кода потму тяштьф ужет, конат нежедихть C точкаса центрань мархта окружностьть OA диаметранц лангс.



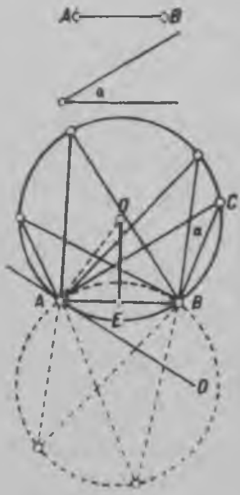
193 тяш.

6. Задача. *Максф AB керфкстъ лангс тиемс сегмент, конань потмоса ащи максф а ужесь* (194 тяш.).

1) Тиемац. Арьсетяма, што задачась лувф и максф AB керфкстъ лангс, кода хордань лангс, тяштьф ACB сегментсь, конань потмоса ащи максф $\alpha\angle$. Ётафттама A точкаса токай AB китькс, лиси $BAD\angle = ACB\angle = \alpha\angle$, сяс мес синь унксневихть фкя AB дугать пяленц вельде. Кругть, конань эса ACB сегментсь, центрац ащи AO и OE перпендикулярхнень фкя-фкянь туркс ётама точкаснон лангса.

2) Тиемац. Максф AB керфкстъ A пезонза (194 тяш.) тяштьтяма $DAB\angle = \alpha$; ётафттама $AO \perp AD$ и AB керфкстъ E кучканц ланга $EO \perp AB$. Нят AO и EO перпендикулярхнень фкя-фкянь

туркс ётама точкасна ули вешеньдеви окружностьть централ. Тяда меле ётафттама OA радиус мархта окружность, лиси вешеньдеви ACB сегментсь. ACB дугать эрь точкац ули прякс ся ужети, кона ровна максф ужети.



194 тяш.

3) ACB дугать лангса пря мархта эрь ужеть ункснесазь AB дугать пяленц эса и сяс сон ули ровна максф a ужети.

4) Кда максф a ужеть тяштемс AB керфксть пес эздонза омбоце ширес, эста тяштемать эзда лиси сегмент, кона ули AB керфксть колга симметричнай ингеле тяштьфти.

5) Максф задачать лувоманц коряс ули кода тиемс тяфтама вывод:

сят точкатнень, конатнень эзда максф AB керфкссь няеви максф a ужень тиевозь, геометрическай вастсна ули кафта симметричнай сегменттнень дугасна, конат сегменттне тифт AB керфксть лангса, кода хордань лангса и конатнень потмоса ащи максф ужесь.

6) Ся сегментсь, конань потмоса ащи оржа ужесь, ули сяда оцюсь кругть кафта сегментонзон эзда, конат тиевихть кругть AB хордаса явоманц вельде.

Кда максф β ужесь ношка, эста сонь вешеньдеви сегментоц ули сяда ёмлась кафта сят сегменттнень эзда, конат тиевихть кругть AB хордаса явоманц вельде.

Мзярда виде ужень максф AB керфкссь ули диаметракс и кафцьке сегменттне ровнат, лиякс мярьгемс тя керьфкссь ули геометрическай вастокс, эста ули стама окружность, конань диаметрац AB.

2 §. Ужеть, конань пряц кругть потмоса, ункстамац.

1. ***Теорема.*** **Кругть потмоса пря мархта ужеть ункснесазь сонь ширензон и синь кувалгафтф песнон ёткса ащи дугатнень суммасост.**

Максф: $AMC\angle$ — кругть потмоса пря мархта уже (195 тяш.).

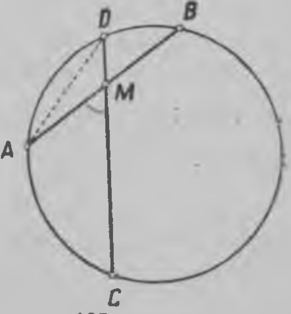
Эряви няфтемс: $AMC\angle$ ункснесазь $\frac{AC\smile + BD\smile}{2}$ вельде.

Няфтемац. Кувалгафтсаськ $AMC\angle$ ширензон мянь окружностьть туркс B и D точкаса ётамс и тяштьтяма AD хорда; лиси ADM колмужекс, коналньди $AMC\angle$ — ушестонь.

Ушестонь $AMC\angle = A\angle + D\angle$, но $A\angle$ ункснесазь $\frac{BD\smile}{2}$ вельде. $D\angle$ ункснесазь $\frac{AC\smile}{2}$ вельде, лисеньди, што $AMC\angle = A\angle + D\angle$ и ункснесазь сонь $\frac{AC\smile + BD\smile}{2}$ вельде.

2. Окружностьть потмоса пря мархта эрь ужеть ули кода шарьхкедемс стама фкя ужекс, конат тиевихть кафта хордань фкя-фкянь туркс ётамать вельде.

Эста, мзярда хордатнень фкя-фкянь туркс ётама точкасна ули центрать эса, ужесь сяка пингста ули и центральнай, лисеньди, ули кода мярьгемс, што центральнай ужеськя унксневи сонь ширензон и синь кувалгафтф песнон ёткса ащи дугатнень пяле суммасост.



195 тяш.

Кда хордатнень фкя-фкянь туркс ётама точкась шаштомстонза шашты окружностьти сяда малас, эста хордатнень ёткса ащи дугатнень эзда фкясь ёмлалгады; мзярда хордатнень фкя-фкянь туркс ётама точкась арай прокс окружностьть лангс, эста тя дугась арай точкакс, сонь кувалмоц ули ровна нульти и хордатнень эзда тиеви ужетнень колга теоремась ули виде тявок максф случайти.

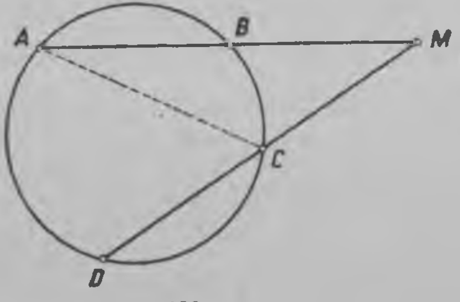
3 §. Ужеть, конань пряц ащи кругть эзда башка, ункстамац.

1. *Теорема.* **Кругть эзда башка ащи пря мархта ужеть ункснесазь сонь ширензон ёткса ащи дугатнень пяле разностьснон вельде.**

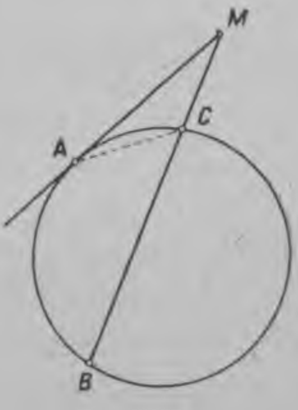
Максф: $M\angle$ — кругть эзда башка пря мархта; MA и MD — керы китькст (196 тяш.).

Эряви няфтемс: $M\angle$ ункснесазь $\frac{AD\smile - BC\smile}{2}$ вельде.

Няфтемац. Ваттама колма случайхть: 1) $M\angle$ тиеви кафта MA и MD керы китьксса. Ётафттама лезды AC хорда, лиси



196 тяш.

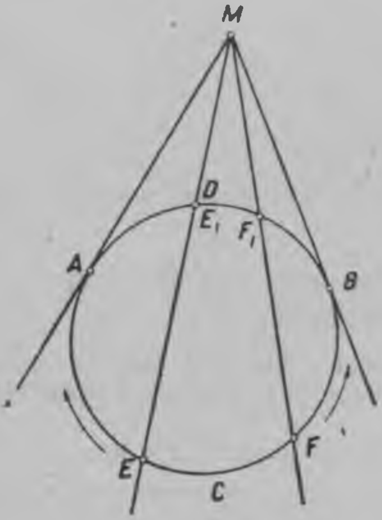


197 тяш.

AMC колмужекс, конаньди $ACD\angle$ — ушестонь уже; тяста лисеньди, што $M\angle = ACD\angle - A\angle$; но $ACD\angle$ ункснесазь $\frac{AD\smile}{2}$ вельде и

$A\angle$ и ункснесазь $\frac{BC\smile}{2}$ вельде, тяста лисеньди, $M\angle$ ункснесазь $\frac{AD\smile - BC\smile}{2}$ вельде.

2) $M\angle$ тиевсь MA токай и MB керы китькснень эзда (197 тяш.). MA токай китькcть шарьхкедьсаськ кода керы китьксонь, конань окружностьть мархта кафта марстонь точканза арасть фкя A точкас, а сяс кафта керы китьксса тиф ужетнень ункстамать колга ингеле тиф выводсь ляды видекс, и $M\angle$ ункстави $\frac{AB\smile - AC\smile}{2}$ вельде.



198 тяш.

199 тяш.

Тя случайть ули кода няфтемс скамонзовок, кда ётафтомс AC хорда (197 тяш.), и ваномс ACM колмужекстъ, конань эса

$$M\angle = ACB\angle - CAM\angle.$$

3) $M\angle$ тиевсь кафта MA и MB токай китькснень эса (198 тяш.).

4) Катк ME и MF керы китькснe M точкать перьф шаромста арайхть MA и MB токай китькснень положениякс; эста EF дугась касы мянь ACB дугати молемс, а E_1F_1 дугась касы мянь ADB дугати молемс, и эста токай китьксса тиф $M\angle$ кармай ункснeвома $\frac{ACB\smile - ADB\smile}{2}$ вельде.

Ся ужети, кона тиевсь кафта токай китьксса, мярьгихть перьф тяштьф уже.

2. Кругть эзда башка ащи M пря мархта $AMC\angle$ сяда ёмла, а кругть потмоса ащи N пря мархта $ANC\angle$ сяда оцю потму тяштьф $ABC\angle$ коряс, кона нежеди AC дугать лангс (199 тяш.).

1) $M\angle$ ункснесазь $\frac{AC\smile - KL\smile}{2}$ вельде.

2) $B\angle$ ункснесазь $\frac{AC\smile}{2}$ вельде.

3) $N\angle$ ункснесазь $\frac{AC\smile + A_1C_1\smile}{2}$ вельде.

4) $\frac{AC\smile - KL\smile}{2} < \frac{AC\smile}{2}$; $\frac{AC\smile}{2} < \frac{AC\smile + A_1C_1\smile}{2}$,

а сяс $M\angle < B\angle < N\angle$.

Кизефкст и упражнеиият.

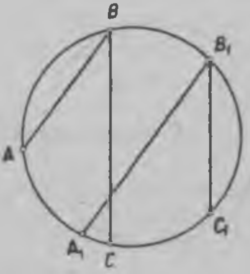
1. ABC колмужексть прянза ащихть окружностьть лангса. Мумс сонь ужензон, кда содаф, што $AB\smile = 70°$ и $BC\smile = 60°$.

2. Окружностьсь явф 5:8:11 отношениять коряс. Мумс колмужексть ужензон, конань прянза явома точкатнень эса.

3. Максф $ABC\angle = \alpha$. Тиемс окружностьть вельде стама уже, кона ровна: 1) максф ужеть пяленцты, 2) максф ужеть коряс кафксть сяда оцю уженьди.

4. Потму тяштьф кафта B и B_1 ужетнень ширесна параллельнайхть (200 тяш.).

Няфтемс, што $AC\smile = A_1C_1\smile$.



200 тяш.

5. Лувомс, кодама оржауже тиихть кругть эса AB и CD хордатне фкя-фкянь туркс ётамстост, кда A, B, C и D точкатне явсазь окружностьть стама отношенияса, кода 2:3:6:7.

6. Кафта радиуснень ёткса ужеть эса 110°. Мумс конашка ужесь, кона тиеви нят радиуснень песнон ланга тяштьф токай китьксвнень эзда.

XIII. КАФТА ОКРУЖНОСТЬТНЕНЬ ФКЯ-ФКЯНЬ МАРХТА АЩЕМАСНА.

1 §. Концентрическай и эксцентрическай окружностьтне.

1. Кафта окружностьтнень уленьди марстонь центрасна или разнай центрасна. *Окружностьтненьди, конатнень центрасна марстонь, мярьгихть концентрическайхть* и фкя-фкянь эзда содавихть синь R и r радиусснон кувалмоснон коряс (201 тяш.).

201 тяш.

Кафта концентрическай окружностьтнень ёткса ащи лапш лангть пяльксонцты мярьгихть круговой кольця; синь радиусснон разностьсна $R - r$ няфтьсы круговой кольцять келенц.

Кафта окружностьтненьди, конатнень разнайхть центрасна, мярьгихть эксцентрическайхть.

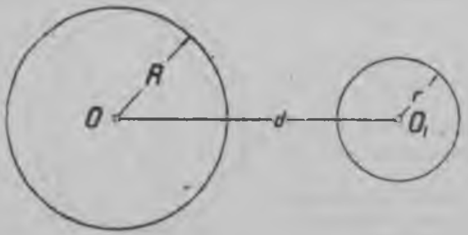
2. OO_1 виде китьксти (202 тяш.), кона ётай кафта окружностьтнень центраснон ланга, мярьгихть центратнень китькссна.

Кафта окружностень центрань китькссь ули синь симметриянь осьсна.

$OO_1 = d$ керфкссь ули O и O_1 центратнень ёткса расстояниясь и нюрьхкяняста тейнза мярьгихть центратнень китьксссна.

Концентрическай окружностьтнень эса центрань китькссь арси точкакс и кувалмоц ровна нульти.

3. Сят окружностьтненьди, конатнень ули аньцек фкя марстонь точкасна, мярьгихть токай окружностьт, синь марстонь точкаснонды мярьгихть токама точкасна. Кда кафта окружностьтне токайхть фкя-фкяньди и фкя окружностьсь ащи аф омбоцеть потмоса, эста токама точкасна ули ушестонь; кда жа фкя окружностьсь токай омбоцети и ащи сонь потмосонза, эста токама точкасна ули потмостонь.



202 тяш.

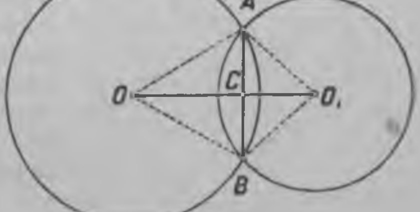
Сят окружностьтне, конатнень улихть аньцек кафта марстонь точкасна, ётайхть фкя-фкянь туркс; ся виде китькссь, кона поладсынь синь фкя-фкянь туркс, ётама точкаснон, ули синь марстонь хордасна.

Сят окружностьтне, конатнень улихть колма марстонь точкасна, фкя-фкянь вельхтяйхть.

Техникаса токай крукнень нолясазь тевс фрикционнай и пей мархта шарынь вельде движениянь ётафтомс. Уше ширьде токамста фрикционнай и пей мархта шарыхне токайхть уше ширьде и шарыхть каршек шири; кда токафт потмостонь ширьде, эста шарыхть фкя шири.

2 §. Кафта окружностьтнень фкя-фкянь мархта ащемасна.

1. *Теорема.* **Кда кафта разнай окружностьтнень ули марстонь точкасна, кона ащи синь центрань китьксснон эзда фкя ширеса, эста синь ули омбоцевок марстонь точкасна, кона ащи центрань китькст эзда омбоце ширеса, лиякс мярьгемс, нят окружностьтне ётайхть фкя-фкянь туркс** (203 тяш.).



203 тяш.

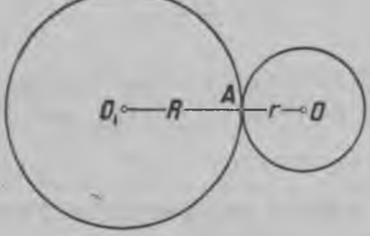
Афкукс, центрань китькссь — кафцьке окружностьтнень симметриянь осьсна. Тихтяма A точкати симметричнай B точка, и виде китькса поладсаськ сонь окружностьтнень O и O_1 центраснон мархта; эста $OA = OB$ и $O_1A = O_1B$ симметриять коряс, а сяс

B точкась ащи кафцьке окружностьтнень лангса, окружностьтне ётайхть фкя-фкянь туркс, и AB-сь — синь марстонь хордасна.

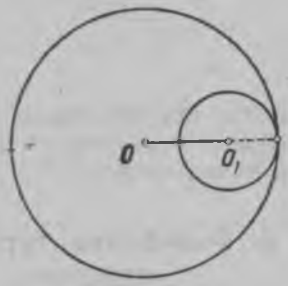
Следствия. **Кда кафта разнай окружностьтнень марстонь A точкасна ащи центратнень китьксснон лангса, эста окружностьтне токайхть фкя-фкяньди, лиякс мярьгемс синь ули аньцек фкя марстонь A точкасна, кона ащи центрань китьксть лангса.**

Афкукс, кда арьсемс меклангт, а именно, што нят окружностьтнень ули нингя омбоце марстонь точкасна, кона аф ащи центрань китькстъ лангса, эста няфтьф теорематъ коряс синь ули нингя колмоце марстонь точкасна, кона симметричнай центрань китькстъ колга омбоце точкати; эста нят окружностьтнень кармайхть улема колма марстонь точкасна, но тяньди улемс аш кода, сяс мес окружностьтне, конатнень улихть 3 марстонь точкасна, фкя-фкянь вельхтяйхть, а тя моли условиять каршес. Тянь коряс лисеньди, што

кафта окружностьтне, конатнень улихть центрань китькстъ лангса ащи кафта марстонь точкасна, токайхть фкя-фкяньди (204 и 205 тяш.).



204 тяш.



205 тяш.

2. Максфт разнай R и r радиус мархта кафта окружностьт, синь аф токайхть фкя-фкас и ащихть фкясь омбоцеть эзда башка. Кда R радиус мархта окружностьть кадомс фкя вастса, а r радиус мархта окружностьть центранц шашфнемс центрань китькстъ кувалмос, эста окружностьтненьди ули кода фкя-фкянь мархта ащемс разнай лаца.

1) Окружностьтне аф ётайхть фкя-фкянь туркс, аф токайхть фкя-фкяньди, и фкясь ащи аф омбоцеть потмоса (202 тяш.). Синь центраснон ёткса $OO_1 = d$ расстояниясь синь радиусснон суммаснон коряс сяда оцю: $d > R + r$.

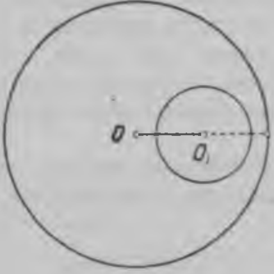
2) Окружностьтне фкя-фкяньди токайхть уше ширьде A точкаса (204 тяш.). $OO_1 = d$ расстояниясь ровна синь радиусснон суммаснонды: $d = R + r$.

3) Окружностьтне ётайхть фкя-фкянь туркс и синь улихть кафта марстонь A и B точкасна (203 тяш.). Штоба мумс $OO_1 = d$ и R и r радиуснень ёткса зависимостьть, ванцаськ AOO_1 колмужекстъ, конань эса $OO_1 = d$, $AO = R$ и $AO_1 = r$. Колмужексса кодама кельк ширесь: 1) сяда ёмла кафта лият ширетнень суммаснон коряс и 2) сяда оцю кафта лият ширетнень раз-

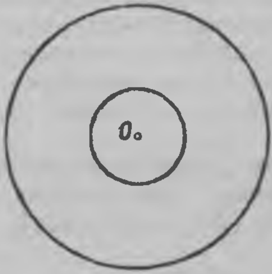
ностьснон коряс, сяс центратнень ёткса расстояниясь сяда ёмла кафцьке окружностьтнень радиусснон суммаснон коряс и сяда оцю синь разностьснон коряс: $d < R + r$ и $d > R - r$.

4) Окружностьтне токайхть потма ширьде (205 тяш.). Синь центраснон ёткса $OO_1 = d$ расстояниясь ровна радиуснень разностьсонды: $d = R - r$.

5) Фкя окружностьсь ащи омбоцеть потмоса и синь центрасна фкя-фкянь аф вельхтяйхть (206 тяш.). $OO_1 = d$ расстояниясь радиуснень разностьснон коряс сяда ёмла: $d < R - r$.



206 тяш.



207 тяш.

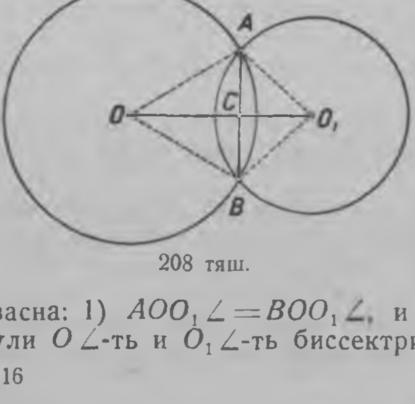
6) Фкя окружностьсь ащи омбоцеть потмоса и синь центрасна фкя-фкянь вельхтяйхть (207 тяш.). Центраснон ёткса расстояниясь ровна нульти: $d = 0$.

3 §. Фкя-фкянь туркс ётай кафта окружностьтнень марстонь хордаснон свойствац.

Теорема. **Фкя-фкянь туркс ётай кафта окружностьтнень марстонь хордасна перпендикулярнай синь центрань китьксснонды и эсонза явови кучкава.**

Максф: O окружность и O_1 окружность (203 или 208 тяш.);
AB — марстонь хордась; OO_1 — центрань китькссь.

Эряви няфтемс: 1) $AB \perp OO_1$ и $AC = CB$.



208 тяш.

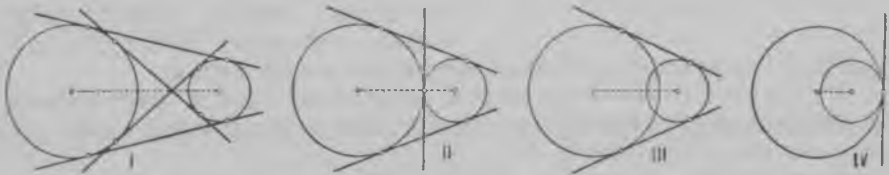
Няфтемац. Окружностьтнень фкя-фкянь туркс ётама A и B точкаснон поладсаськ O и O_1 центратнень мархта; лисихть кафта равнобедреннай AOB и AO_1B колмужекст и, тяда башка, кафта ровна AOO_1 и BOO_1 колмужекст, конатнень OO_1 — марстонь ширесна, $OA = OB = R$ и $O_1A = O_1B = r$.

Колмужекснень равенстваснон эзда лисеньди ужетнень равенствасна: 1) $AOO_1 \angle = BOO_1 \angle$, и 2) $AO_1O \angle = BO_1O \angle$, сяс OO_1-сь ули $O \angle$-ть и $O_1 \angle$-ть биссектрисасна.

Равнобедреннай AOB и AO_1B колмужекснень эса центрань OO_1 китькссь арси тейст биссектрисакс, а сяс: 1) $AB \perp OO_1$ и 2) $AC = CB$.

4 §. Кафта окружностьтненьди марстонь токай китьксне и кода синь тиемс.

1. Токай китькснень лувкссна, конат китькснень ули кода ётафтомс кафта окружностьтненьди, ащи синь фкя-фкянь мархта ащемаснон эзда. I—IV тяштьтксса (209 и 210 тяш.) няфтьфт токай китькснень всякай лаца ащемасна, кода уленьди кафта окружностьтненьди.



209 тяш.

Сяда ала таблицать эса няфтьф кафта окружностьтнень центраснон ёткса расстояниясь и тейст токси китькснень лувкстъ ёткса зависимостьсь, кона полафневи кафта окружностьтнень фкя-фкянь мархта ащемать эзла.

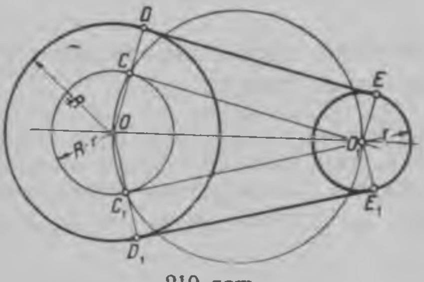
№№ мель-цек-мель-цек	d — кафта окружностьтнень центраснон ёткса расстояниясь	Кафта окружностьтнень фкя-фкянь мархта ащемасна	Мзяра токай китькста
1	$d > R + r$	Окружностьтне аф ётайхть фкя-фкянь туркс, аф токайхть фкя-фкяньди и фкясь ащи омбоцеть эзда башка	4
2	$d = R + r$	Окружностьтне токайхть уше ширьде . .	3
3	$\begin{cases} d < R + r \\ d > R - r \end{cases}$	Окружностьтне ётайхть фкя фкянь туркс	2
4	$d = R - r$	Окружностьтне токайхть потма ширьде	1
5	$d < R - r$	Фкя окружностьсь ащи омбоцеть потмоса; синь центрасна фкя-фкянь аф вельхтяйхть	0
6	$d = 0$	Фкя окружностьсь ащи омбоцеть потмоса; синь центрасна фкя-фкянь вельхтяйхть	0

2. **Задача.** *Тиемс разнай* R *и* r *радиусса кафта окружностьтненьди марстонь токай китькст, кда* $d > R + r$.

Ваттама кафта случайхть кода ащихть максф кафта окружностьтнень мархта токай китьксне.

1) Тиемац. Ётафттама $R - r$ радиусса (210 тяш.) лезды окружность, кона концентрическай максф окружностьтнень эзда сяда оцюти и тейнза O_1 центраста — O_1C токай китькс. Токама

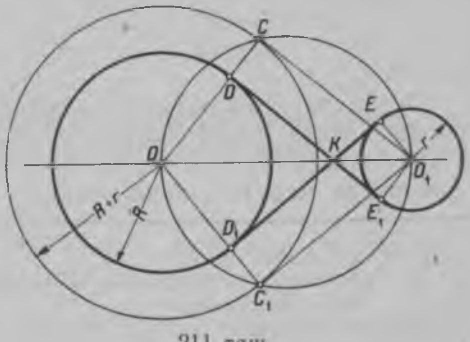
C точкать ланга тяштьтяма OC радиус и кувалгафтсаськ сонь максф окружностьть туркс D точкаса ётамс; тяда меле O_1 центрать эзда ётафттама $O_1E \parallel OD$; D и E точкатнень поладсаськ виде китькксса, лиси вешеньдеви DE токай китькссь. Тяфта жа мусаськ D_1E_1 токай китьксть.



210 тяш.

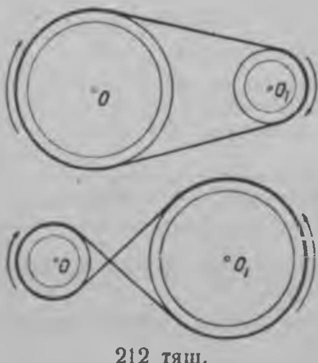
Няфтемац. Тиемать коряс, $CD = O_1E$ и $CD \parallel O_1E$; тяда башка, $C\angle = d$; сяс DEO_1C нилеужекссь — видеужень, а сяс $D\angle$ и $E\angle$ — виде ужет; станя, токама точкаста тяштьф OD и O_1E радиусне тиихть DE виде китькстть мархта виде ужет; тяста лисеньди, што DE-сь — кафцьке окружность тненьди марстонь токай китькс.

2) Тиемац. $R+r$ радиусса тяштьтяма лезды окружность, концентрическай максф окружностьтнень эзда сяда оцю окружностьти (211 тяш.); тя окружностьти тяштьтяма O_1C токай китькс; токама C точкать ланга тяштемс OC радиус, кона ётай максф окружностьть туркс D точкава; тяда меле O_1 центрать эзда тяштьтяма радиус $O_1E \parallel OC$: поладсаськ токама D и E точкатнень, лиси вешеньдеви DE токай китькссь. Тяфта жа тиезь мусаськ омбоце марстонь D_1E_1 токай китьксть.



211 тяш.

Няфтемац. Тяакштемань коряс $CD = O_1E$, и $CD \parallel O_1E$ тяда баша $C\angle = d$; тяста лисеньди, $CDEO_1$ нилеужекссь — видеужекс, $D\angle$ и $E\angle$ — виде ужет, а тя няфнесы, што E и D точкатненьди тяштьф O_1E и OD радиусне перпендикулярнайхть DE виде китькксти, коста лисеньди, што DE — кафцьке окружностьтненьди марстонь токай китькссь.



212 тяш.

Васеньце случайса токай китькксти мярьгихть уше ширьдень, омбоце случайса — потмаширьдень.

3. Ушестонь и потмостонь токай китькст токадькшихть шкивонь шнань передачаса (212 тяш.). Кда пефтома шнась моли уше ширьде токай китьксонь лаца, эста шкифне шарыхть фкя шири; кда жа шнась моли потма ширьде токай китьксонь лаца, эста шкифне шарыхть каршек шири.

Кизефкст и упражнениять.

1. Кода тяштемс марстонь токай китькс кафта фкяньшка радиус мархта окружностьтненьди?

2. Максф $R = 6$ *см* радиус мархта окружность. Мезьсь ули $r = 2$ *см* радиус мархта окружностьтнень центраснонды геометрическай вастокс, кда окружностьтне токайхть максф окружностьти? Кодамот уленьдихть случайхть?

3. Тяштемс 8 *см* и 5 *см* радиусса кафта концентрическай окружностьт, а тяда меле тиемс мзяровок окружностьт, конат токальхть ба кафцьке максф окружностьтненьди. Конашкат одс тиф окружностьтнень радиуссна? Конашка круговой кольцять келец?

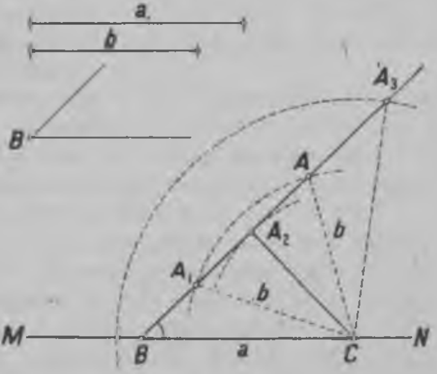
4. Няфтемс, што *кафта аф ровна окружностьтненьди ётафтф марстонь потма ширьдень (или уше ширьдень) токай китьксне ровнат и ётайхть фкя-фкянь туркс центрань китьксть лангса.*

5. Няфтемс, што *кда кафта окружностьтне фкя-фкяньди токайхть уше ширьде, синь марстонь уше ширьде токай китьксснa и марстонь потма ширьде токай китьксснон керфкссна, кона ащи уше ширьде токай китьксснень ёткса, ровнат.*

XIV. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЙ ВАСТОНЬ МЕТОДСА ТИЕЗЬ ЗАДАЧАТ.

1 §. Тиезь задачатнень ванондомасна.

1. Тиезь задачась — тя циркулень и линейкань вельде тяштемс геометрическай фигура, конань улихть определённай свойстванза, конат азфт задачать условиянц эса.



213 тяш.

Тяштезь задачать марнек лувоманц эса улихть ниле тяфтама пяльккст: 1) задачать **анализоц** или ванондомац, лисеньди, лувомать планонц тиемац; 2) соньцень тиемать тиемац; 3) **няфтемась**, што фигурась тяштьф задачать сембе условиянзон коряс; 4) сят условиятнень ванондомасна, конатнень мархта задачась ули кода тиемс, а станя жа, мзяра лаца ули кода сонь тиемс.

2. **1-це задачась.** *Максф a ширеть, тейнза прилежащай B ужеть и тя ужеть каршеса ащи b ширеть коряс тяштемс колмужекс* (213 тяш.).

Тиемац. 1) **Задачать анализоц.** Минь содасаськ, кода колмужекстъ ширенцты ровна BC керфкстъ пес тяштемс B уже, лиякс мярьгемс, минь содасаськ колмужекстъ кафта B и C прянзон и B ∠. Колмоце A прянцты эряви ащемс B ужеть BA ширенц лангса и ся окружностьть лангса, конань центрац C точкаса, а радиусоц ровна $AC = b$ ширети.

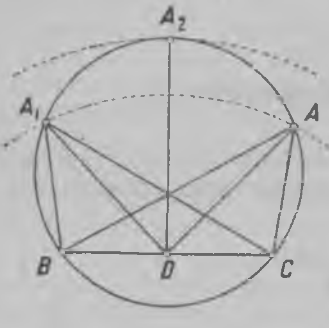
2) Тиемац. Кодамовок кувалмоса MN виде китьксть кувалмос ункстатама a-ти ровна BC керфкс и сонь B песонза тяштьтяма B уже. Тяда меле, C точкаса центра мархта, b-ти ровна радиусса тяштьтяма окружность. Сон ётай B ужеть BA ширенц туркс A и A_1 точкаса. Станя улихть A прять кафта положениянза а именна A и A_1, и кафта колмужекст: ABC и A_1BC.

3) Няфтемац. Кафцьке колмужексне улихть тифт задачаса путф условиятнень коряс.

4) Ванондомац. Тяштьтяма C точкать эзда B ужеть BA ширенцты CA_2 перпендикуляр. C точкать эса центра мархта окружностьсь токай BA ширети, кда сонь радиусоц ровна CA_2-ти, и эста ули аньцек фкя решения; эста $b < a$. Окружностьти ули кода ётамс BA ширеть туркс кафта A и A_1 точкава (кда $b < a$), и эста улихть кафта решеният:

1) a, b и $AB = c$ шире мархта и B, BAC и ACB уже мархта ABC △:

2) a, b и $A_1B = c_1$ шире мархта и B, $BA_1C = 180° - A$ уже мархта A_1BC △, мес $A\angle = AA_1C\angle$ (равнобедреннай A_1CA колмужексть основаниянц тейса ужетне); тя A_1CB колмужексть ужец ровна $A\angle - B\angle$. Кда $b = a$, эста ули аньцек фкя решения, и эста вешеньдеви колмужекссь равнобедреннай; кда $b > a$, эста окружностьсь BA ширеть туркс ётай фкя A_3 точкаса, и A_3BC колмужекссь — вешеньдеви колмужекссь.



214 тяш.

Кда $b < CA_2$, лиякс мярьгемс, C точкать эзда B ужеть BA ширенцты молемс расстояниять коряс сяда ёмла, эста окружностьсь аф токай BA ширети и аф ётай сонь турксканза, а сяс тя случайть эса аф ули фкавок решения.

2-це задачась. *Тиемс колмужекс максф a основаниять, карчшек ащи $A\angle = a$ и m_a медианать коряс* (214 тяш.).

Тиемац. Задачать анализоц. Арьсетяма, што задачась решандаф и вешеньдеви ABC △-сь тиф. BC — сонь основанияц, AD — сонь медианац. Максф $BC = a$ основаниясь няфтьсыня ABC колмужексть кафта B и C прянзон. Колмоце A прять эзда максф $BC = a$ основаниясь няеви α ужень тиевозь. Точкатнень, конатнень эзда максф BC керфкссь няеви максф α ужень тиевозь, геометрическай вастсна ули BAC сегментть дугац, кона сегментсь тиф максф $BC = a$ керфксть лангс и конань потмоса ащи максф $\alpha\angle$-сь. Лисеньди, што A точкати эряви ащемс BAC сегментть дуганц лангса. A прясь ащи BC основаниять D кучканц эзда $AD = m_a$ расстоянияса; D точкать эзда ровнаста ичкезеста ащи точкатнень геометрическай вастсна ули окружностьсь, кона тяштьф $AD = m_a$ радиусса, а центрац D точкаса. Лисеньди, што A точкати эряви ащемс тя окружностьть лангса. Станя, A точкати, ABC △ колмоце прянцты, эряви ащемс кафцьке геометрическай васттнень лангса: BAC сегментть дуганц и D точкать эса центра мархта окружностьть лангса; A прясь ули нят геометрическай васттнень фкя-фкянь туркс ётама точкасна.

Тиемац. Максф $BC = a$ керфксть лангса, кода хордань лангса, тяштемс BAC сегмент, конань потмоса ули максф $A\angle = \alpha$. Тяда меле, D точкаса BC — керфксть кучкаста — центра мархта максф m_a медианати ровна радиусса тяштьтяма окружность. BAC сегменть дуганц и m_a радиусса окружностьть фкя-фкянь туркс ётама точкасна ули колмужексть колмоце A пряц. A точкать поладсаськ B и C мархта, лиси вешеньдеви $ABC\triangle$.

Няфтемац. $ABC\triangle$ тяштьф задачать условиянц коряс: $BC = a$ — сонь основаниец, $BAC\angle = \alpha$ и $AD = m_a$.

Исследованиец. A точкась арси окружностьть и сегментть дуганц фкя-фкянь туркс ётама точкакс, сяс эряви исследовандамс, сембе пингста ли максф условиятнень коряс ётайхть фкя-фкянь туркс нят китьксне.

BAC сегментть дуганц тяштемда меле минь ётафттама D точкать эса центра мархта $DA = m_a$-ти ровна радиусса окружность (214 тяш.). Тяфта тяштемста уленьдихть стама колма случайхть: 1) окружностьсь и сегментть дугац токайхть A_2 точкать эса, синь ули аньцек фкя марстонь точкасна, лисеньди, ули кода тяштемс аньцек фкя $A_2BC\triangle$; тя колмужекссь равнобедреннай, и A_2D медианац ули сонь серец; 2) кда m_a медианась A_2D коряс сяда ёмла, но BD коряс сяда оцю, эста окружностьсь и сегментть дугац ётайхть фкя-фкянь туркс кафта A и A_1 точкаса и лисихть кафта ровна ABC и A_1BC колмужекст; 3) кда m_a медианась A_2D коряс сяда оцю или BD коряс сяда ёмла или ровна мархтонза, эста окружностьсь и сегментть дугац аф ётайхть фкя-фкянь туркс и эста колмужекссь аф тиеви, а сяс задачась аш кода тиемс.

Эряви азомс, што BC-ть омбокс ули кода тяштемс стама сегмент, конань эса улель $\alpha\angle$, и колмужекс, симметричнай максф колмужексти.

3-це задачась. *Мумс точкать, кона ровнаста ичкезе ABC колмужексть AB, AC и CB ширензон эзда* (215 тяш.).

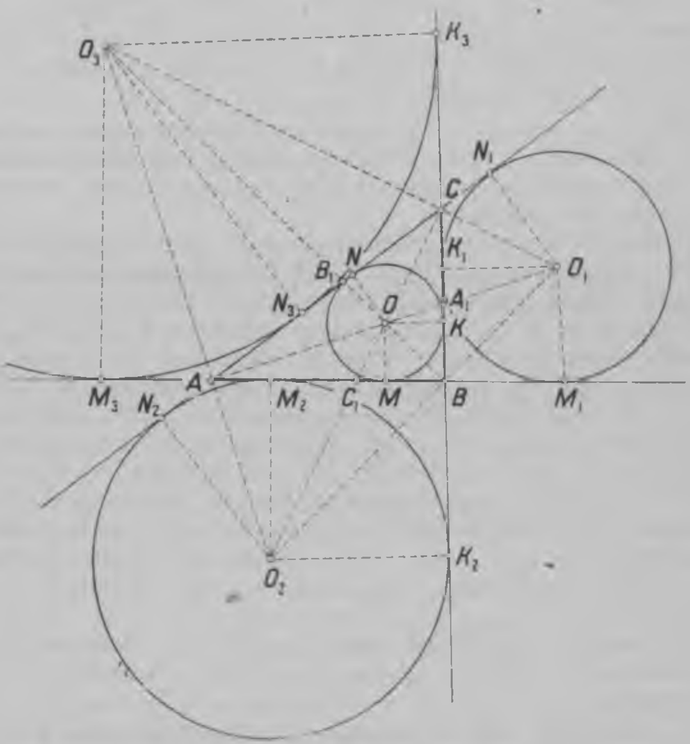
Тиемац. AB и AC виде китьксне A точкать ваксса тиихть кафта пархт каршек ащи ужет. Ся точкась, кона ащи колмужексть ширензон эзда ровнаста ичкезе, ащи либо фкя пар ужетнень марстонь биссектрисаснон лангса, либо омбоце пар ужетнень биссектрисаснон лангса. Васенда ванцаськ максф колмужексть потмоста A ужеть биссектрисанц.

Тяштьсаськ AA_1 биссектрисать, конань лангса эряви ащемс вешеньдеви точкати; тяда меле ётафтсаськ B ужеть BB_1 биссектрисанц, конань лангса эряви ащемс вешеньдеви точкати, кона BA и BC ширетнень эзда ащи ровнаста ичкезе. Вешеньдеви точкась фкя пингста ащи кафцьке биссектрисатнень лангса, лиякс мярьгемс, сон ули синь фкя-фкянь туркс ётама O точкасна.

Биссектрисать свойстванц коряс $OM = ON$ и $OM = OK$; коста лисеньди, што $ON = OK$.

Колмужекстьширензон эзда ровнаста ичкезе ащи точкась ащи сонь потмосонза и фкя-фкянь вельхтяйхть кафта кодама кельк биссектрисатнень фкя-фкянь туркс ётама точкасном мархта.

C точкать поладсаськ O точкать мархта, эста няйсаськ, што видеужень CON и COK колмужексне ровнат, сяс мес синь марс-



215 тяш.

тонь OC гипотенузасна и няфтемать коряс $ON = OK$; колмужекснень ревенстваснон эзда лисеньди, што $OCN\angle = OCK\angle$, а тянц коряс лисеньди, што $C\angle$ явови CO виде китькстьэса кучкава, лиякс мярьгемс, CO ули биссектриса. Станя, колмоцевок CO биссектрисась ётай O точкать ланга.

Колмужексть биссектрисанза фкя-фкянь туркс ётайхть фкя точкаса.

O точкада башка, кона ровнаста ичкезе ABC колмужексть ширензон эзда, улихть нингя колма стама точкат, конатнень улихть тяфтама жа свойствасна.

Афкукс, кда кувалгафтомс, мярьгтяма, B и C ужетнень ширеснон и ётафтомс колмужексть эзда лисикс уше ширьдень кафта пархт уженсзон биссектрисаснон, эста синь фкя-фкянь туркс ётама точкасна, O_1 точкась, ули ровнаста ичкезе BC ширеть эзда и AB и AC ширетнень кувалгафтф песнон эзда.

Тянь лаца мушендсазь, кода няеви 215-це тяштькcса, нингя кафта точкатнень — O_2 и O_3.

2 §. Задачат.

1. Максфт кафта точкат A и B. Мумс колмоце C точкать, кона ащель ба A точкать эзда a расстоянияса и B точкать эзда b расстоянияса.

2. Тяштемс окружность, кона ётай максф A точкать ланга и максф MN виде китькcти токаль максф B точкаса.

3. Тиемс колмужекс a ширеть и h_b и h_c серьхнень коряс.

4. Тиемс колмужекс a основаниять, h_a серьть и $A\angle$ коряс.

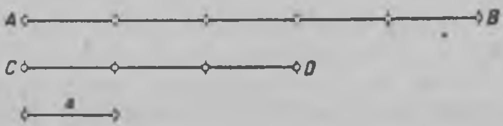
5. Мумс геометрическай вастснон: 1) максф окружностьть фкя точкаста лиси сембе хордатнень кучкаснон; 2) окружностьть потмоса фкя точкань ланга ётай сембе хордатнень кучкаснон.

XV. ПРОПОРЦИОНАЛЬНАЙ КЕРФКСНЕ.

1 §. Кафта керфксненъ марстонь ункстамасна.

Кафта керфкснень марстонь ункстама мярьгихть тяфтама керфксти, кона путови целай лувксокстъ максф керфкснень эзда эрь керфксть кувалмос

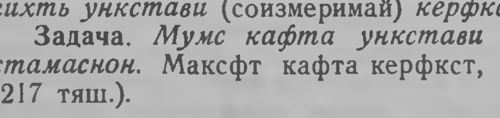
Максф кафта AB и CD керфкст (216 тяш.); a керфкссь AB керфксть кувалмос путови ветекстъ, CD керфксть кувалмос — колмокстъ:



216 тяш.

$$AB = 5a \text{ и } CD = 3a;$$

a-сь ули максф AB и CD керфкснень марстонь ункстамасна. Кафта керфксень марстонь ункстамать всякай пяльксоц, мярьгемс сонь $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$ ... пяльксоц, ули станя жа синь марстонь ункстамасна сяс, мес сон эрь керфксть кувалмос путови лядыксфтома; тяста лисеньди, што кафта керфкснень уленьдихть пяк лама марстонь ункстамасна, конатнень эзда фкясь ули сембеда оцю.



217 тяш.

Кафта керфксненьди, конатнень ули марстонь ункстамасна, кона ункстамась путови эрь керфксть кувалмос целай лувксокстъ, мярьгихть ункстави (соизмеримай) *керфкст.*

Задача. *Мумс кафта ункстави керфкснень марстонь ункстамаснон.* Максфт кафта керфкст, AB и CD, эздост $AB > CD$ (217 тяш.).

Тиемац. Мзярокстькя путсаськ сяда ёмла CD керфкстъ сяда оцю AB керфкстъ кувалмос. Катк сон путовсь колмокстъ и нингя лядсь керфкс $KB < CD$. Станя лисеньди:

$$AB = 3CD + KB. \tag{1}$$

Кда CD керфкссь путоволь AB керфкстъ кувалмос колмокстъ лядыксфтома, эста CD керфкссь улель кафцьке керфкснень марстонь ункстамасна и AB-ть эса улель колма, а CD-ть эса фкя тяфтама керфкс.

Катк тяда меле KB керфкссь, васеньце лядыкссь, путови керфкстъ кувалмос нилекстъ и, тяда башка, ули лядыкс $LD < KB$, эста.

$$CD = 4KB + LD. \tag{2}$$

Тяда меле LD керфкстъ, омбоце лядыкстъ, путнесаськ KB керфкстъ кувалмос, катк LD керфкссь путови KB керфкстъ кувалмос колмокстъ, эста

$$KB = 3LD, \qquad (3$$

и LD ули кафцьке керфкснень марстонь ункстамасна.

KB-ть значениянц (3) равенстват эзда сёрмадсаськ (2) равенстват, а тяда меле CD-ть значениянц сёрмадсаськ (1) равенстват, лиси:

$$CD = 4\cdot 3ZD + LD = 13LD,$$
$$AB = 3\cdot 13LD + 3LD = 42LD.$$

Станя, $AB = 42LD$ и $CD = 13LD$; лисеньди, што LD-сь ули AB и CD керфкснень марстонь ункстамасна.

Кда ба LD керфкссь дяль путов KB керфкстъ кувалмос целай лувксокстъ, эста марстонь ункстамать вешеньдеманц эряволь мольфтемс снярс, мзярда получандаф лядыкснень эзда мекпяльдесь путови сонь сяда ингельдень лядыкстъ кувалмос целай лувксокстъ; тяньди аш кода аф улемс, сяс мес условиять коряс AB и CD керфксне ункставихть.

Кафта керфкснень марстонь ункстамаснон вешеньдемста минь няйсаськ, што синь марстонь ункстамасна путови целай лувксокстъ кода синьцень керфкснень кувалмос, станя жа и эрь лядыкстъ кувалмос, конат лисеньдихть марстонь ункстамаснон вешеньдемста, лисеньди, марстонь ункстамасна аш кода улемс сяда оцю эрь лядыкстъ коряс.

Токадькшихть тяфтама кафта керфкст, конатнень аш марстонь ункстамасна; сят керфксненьди, конатнень аш *марстонь укстамасна, мярьгихть аф ункставихть.*

Эряви азомс, што кафта кодама повсь сявф керфксне сяда сидеста уленьдихть аф ункставихть. Аньцек пяк кржа токадькшихть синь ункставихть.

Кафта керфкснень марстонь ункстамаснон вешеньдемста синь пяк ёмла лядыкссна аф приметавихть, сяс мес аш пяк точнайста ункстай ункстама приборхт, а приборфтома минь сельменькеньди синь аф няевихть; сяс практикаса кафта керфкснень марстонь ункстамасна тейнек сатомшка точностьса сембе пингста муви; но арьсезь ули кода няфтемс, што улихть аф ункстави керфксг.

Кепетькс. *Квадратть ширец и диагоналец аф ункставихть.* Максф a шире и d диагональ мархта $ABCD$ квадрат (218 тяш.).

Равнобедреннай видеужень ABC колмужекcть эзда лисеньди, што:

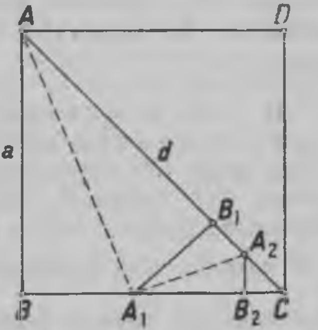
$$a < d < 2a.$$

$AB = a$ путови $AC = d$ кувалмос весть и нингя ляды $B_1C = a_1$, станя лисеньди,

$$d = a + a_1.$$

Ёгафттама $B_1A_1 \perp AC$ и кда поладсаськ A и A_1 точкатнень виде китьксса, лиси, што $A_1B_1 = A_1B$; A_1B_1C колмужекссь — видеужень и равнобедреннай, сяс мес $A_1CB_1\angle = 45°$. A_1B_1C колмужекcть эзда лисеньди, што

$$B_1C = a_1 = B_1A_1 = BA_1.$$



218 тяш.

$B_1C = a_1$ лядыкссь $BC = a$ кувалмос путови кафксть, сяс мес $BA_1 = a_1$ и $a_1 < A_1C < 2a_1$, и тяда башка, лиси лядыкс $B_2C = a_2$. Станя лисеньди, $a = 2a_1 + a_2$.

A_2B_2C колмужекссь — станя жа видеужень и равнобедреннай, а сяс, кда сонь колганза арьсетяма станя жа, кода ингеле, минь лиси:

$$a_1 = 2a_2 + a_3 \text{ и ст. тов.}$$

Станя лисеньди, што сяда меле моли лядыкснень эзда фкявок лядыкс аф путови целай лувксокcть сонь ингельденза лядыкcть кувалмос, а сяс a и d керфксне аф ункставихть.

2 §. Керфкснень отношениясна.

1. *Ункстамс керфксть — лисеньди мумс лия стама керфксоньди сонь отношениянц, кона сявф ункстама единицакс;* керфксть ункстаманц эзда лиси лувксcь няфтьсы, мзярокcть ункстама единицаньди сявф керфкссь путовсь ункстави керфксть кувалмос.

Станя, кда a керфксть сявемс ункстама единицакс (216 тяш.), эста AB керфксть ункстама лувксоц ровна 5-ти; CD керфксть ункстама лувксоц ровна 3-ти; шарьхкедеви, што a керфксть ункстама лувксоц ровна 1-ти.

2. Кафта керфкснень, кода и кафта лувкснень, ули кода серьстамс кафта лаца. Ули кода лувомс мзярода фкя керфкссь сяда оцю или сяда ёмла омбоце керфксть коряс, или содамс, мзярокcть фкя керфкссь сяда оцю или сяда ёмла омбоцегь коряс и тяфта содамс, мзярокcть фкя керфкссь путови омбоце керфксть кувалмос. Керфкснень мекпяльдень лаца серьстазь минь мусаськ кафта керфкснень ёткса кратнай отношениять.

Фкя керфксть омбоцети отношенияц мярьгихть стама отношенияти, кода ся лувкссь, кона фкя керфксть ункстасы кодамовок единицаса, относится омбоце ся лувксти, кона омбоце керфксть ункстасы сякот жа ункстама единицаса.

3. Кафта керфкснень отношенияснон мумста уленьдихть кафта случайхть:

I. Ункстави керфкснень отношениясна целай или дробнай лувкс. Тянь коряс лисеньди:

$$\frac{AB}{CD}=\frac{5}{3}, \text{ или } AB:CD=5:3.$$

Кафта керфкснень сёрмадф отношенияснон морафнесазь тяфта: AB керфкссь станя относится CD керфксти, кода 5 относится 3, или: AB керфксть CD керфксти отношенияц ровна $\frac{5}{3}$.

II. Аф ункстави керфкснень отношениясна — приближённай лувкс. Максфт AB и CD керфкст (219 тяш.). Сяда ёмла CD керфксть сявсаськ ункстама единицакс. Путнесаськ CD керфксть AB-ть кувалмос; катк сон AB керфксть кувалмос путови 3-ксть и нингя ляды CD-ть коряс сяда ёмла FB лядыкс. Кда сёрмадомс, што $\frac{AB}{CD}\approx 3$, эста лиси AB и CD керфкснень аф точнай отношениясна, а аньцек приближённай синь отношениясна, аф сатыкс мархта, сяс мес лисиксть круглайста няфтеманц инкса минь ёрдаськ FB лядыкст.

219 тяш.

Штоба лисель AB и CD керфкснень сяда точнай отношениясна, CD явсаськ 10 ровна пялькскова и сявсаськ $0{,}1CD$-ть кефксненьди ункстама од единицакс. Катк тя ункстама од единицась AB кувалмос путови 34-ксть и тяда башка ляды $0{,}1\,CD$-ть коряс сяда ёмла KB лядыкс.

Сёрмадсаск: $3{,}4\ CD < AB < 3{,}5\ CD$, или $\frac{AB}{CD}\approx 3{,}4$ афсатыкс мархта и $\frac{AB}{CD}\approx 3{,}5$ лядыкс мархта. 3,4 или 3,5 отношениятне лувфт сявф ункстама единицат 0,1 пяльксонцты молемс точностьса. Кода лувксонь явомста, станя и керфкснень ёткста отношениять лувомста, отношениять сявеньдсазь афсатыкс мархта. кда лядыкссь сявф ункстама единицат пяленц коряс сяда ёмла и сявеньдсазь лядыкс мархта, кда лядыкссь сявф ункстама единицат пяленц коряс сяда оцю.

Штоба лисель AB и CD керфкснень сяда точнай отношениясна, CD явсаськ 100 ровна пялькскова. Катк $0{,}01CD$-сь путовсь KB лядыксть кувалмос 3-ксть $0{,}01CD$ коряс сяда ёмла лядыкс мархта.

Сёрмадсаськ: $3{,}43\,CD < AB < 3{,}44\,CD$, или $\frac{AB}{CD} \approx 3{,}43$ аф сатыкс мархта или $\frac{AB}{CD} \approx 3{,}44$ лядыкс мархта.

3,43 и 3,44 лувксне улихть AB и CD керфкснень отношениясна, конат керфксне лувфт 0,01 молемс точность мархта, фкясь — аф сатыкс мархта, омбоцесь — лядыкс мархта.

Кда сявф ункстама единицать явомс нингя сяда ёмла десятичнай пяльксова, мярьгемс 1 000 или 10 000 и ст. тов пяльксова, эста лисихть керфкснень отношениясна, кона сёрмадф пефтома аф периодическай десятичнай дробса.

Тяфта лисеньди, што кафта аф ункстави керфкснень отношениясна ули иррациональнай лувкс.

Аф ункстави керфксонь кафта отношениятнень лувондсазь ровнакс, кда ровнат нят отношениятнень приближённай лувксонь значениясна, конат сявфт кодама кельк фкяньшка степенень точностьса и кафцьке сявфт афсатыкс мархта или лядыкс мархта. Кепетьксоньди сявемс, кда

$$\frac{a}{b} \approx 7{,}5 \quad \text{и} \quad \frac{c}{d} \approx 7{,}5,$$

$$\frac{a}{b} \approx 7{,}52 \quad \text{и} \quad \frac{c}{d} \approx 7{,}52,$$

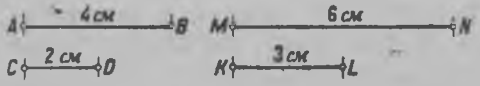
$$\frac{a}{b} \approx 7{,}524 \quad \text{и} \quad \frac{c}{d} \approx 7{,}524 \quad \text{и ст. тов, эста}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Станя лисеньди, *што кафта керфкснень отношениясна ули рациональнай или иррациональнай лувкс, конань лангс эряви ламокстамс омбоце керфксть, штоба лисель васеньцесь.*

3 §. Пропорциональнай керфксне. Геометрическай пропорциясь.

Максфт ниле керфкст: $AB = a = 4$ *см*, $CD = b = 2$ *см*, $MN = c = 6$ *см*, $KL = d = 3$ *см* (219а тяш.). Кда сявемс синь эздост кафттнень, AB и CD, отношенияснон, и лият кафттнень, MN и KL, отношенияснон, эста $\frac{AB}{CD} = \frac{4}{2} = 2$ и $\frac{MN}{KL} = \frac{6}{3} = 2$.



219а тяш.

Эздост эрь отношениясь ровна 2, лисеньди, отношениятне ровнат, а сяс $\frac{AB}{CD} = \frac{MN}{KL}$.

Равенствань тяштеняса поладф кафта ровна отношениятненьди мярьгихть геометрическай (кратнай) пропорция.

$\frac{AB}{CD}=\frac{MN}{KL}$ равенствась — геометрическай пропорция.

Мекпяльдень сёрмадфть морафнесазь тяфта: AB керфкссь, или нюрьхкяняста AB-сь, станя относится CD-ти, кода MN-сь относится KL-ти.

Геометрическай пропорциять эса ниле член. Аф всякай ниле керфксне тиихть геометрическай пропорция; мярьгемс, керфкснень эзда, конат ровнат 4 *см*, 5 *см*, 8 *см* и 10 *см*, тиеви геометрическай пропорция, сяс мес $\frac{8}{4}=\frac{10}{5}$, а 4 *см*, 5 *см*, 6 *см*, и 7 *см* кувалмоса керфксста геометрическай пропорция аф тиеви, сяс мес эздост аф тиевихть кафта ровна отношеният.

Кда керфксонь ункстай лувкснень эзда тиеви, геометрическай пропорция, эста стама ниле керфкснень колга корхтайхть, што синь пропорционайльнайхть.

Ниле керфксненьди мярьгихть пропорциональнайхть, кда синь ункстама лувкссна тиихть геометрическай пропорция.

Тяфтаня, кда ниле a, b, c и d керфксне пропорциональнайхть, эста виде ули равенствась:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\text{, или } a:b=c:d.$$

4 §. Геометрическай пропорциять свойстванза. Кодамот улихть пропорцият.

1. Геометрическай пропорциять основной свойствац тяфтама, што *сонь крайстонь членонзон произведениясна ровна сонь кучкастонь членонзон произведенияснонды.*

2. *Геометрическай пропорциять эса ули кода полафтомс вастснон: 1) крайстонь члентнень, 2) кучкастонь члентнень, 3) фкя пингста и крайстонь и кучкастонь члентнень.*

3. *Геометрическай пропорциять эса кучкастонь члентнень ули кода путомс крайстоннетнень вастс и крайстоннетнень — кучкастоннетнень вастс.*

4. **Непрерывнай пропорциятне.** Геометрическай ся пропорцияти, конань крайстонь или кучкастонь членонза ровнат, мярьгихть непрерывнай. Непрерывнай геометрическай пропорциять фкяньшка членонцты, мярьгихть *геометрическай кучкастонь, или кафта лият члентнень кучкастонь, пропорциональнайсна.*

$a:b=b:c$, или $b:a=c:b$ — непрерывнай пропорцият.

Пропорциять основной свойстванц коряс ули: $b^2=ac$, коста $b=\sqrt{ac}$.

Кафта лувкснень средняй геометрическайсна ровна синь произведениянон эзда квадратнай коряньти.

5. **Производнай пропорциятне.** Кда $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ пропорциять кафцьке пяльксозонза прибавамс или кафцьке пяльксненьэзда савемс 1-нь, эста тянь эзда равенствась аф срады:

$$\frac{a}{b}\pm1=\frac{c}{d}\pm1,$$

или

$$\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d},$$

лиякс мярьгемс,

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}\ (\mathrm{I}),\quad \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}\ (\mathrm{II}).$$

Кда производнай пропорциять (I) явомс башка членга (II) пропорциять лангс, эста лиси нингя фкя производнай пропорция:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d},$$

Васеньце отношениять членонзон суммасна станя относится синь разностьсонды, кода омбоце отношениять членонзон суммасна относится синь разностьсонды.

6. Ровна отиошениянь рядть свойствац.

Теорема. **Кда максф ровна отношениянь ряд, эста отношениять ингеле ащи членонзон суммасиа станя относится мелест моли členтнень суммасонды, кода ингеле ащихнень эзда эрь членсь относится соньцеиь мелензамоли членти.**

Максф: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{m}{n}=\frac{p}{q}$.

Эряви няфтемс: $\frac{a+c+m+p}{b+d+n+q}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ и ст. тов.

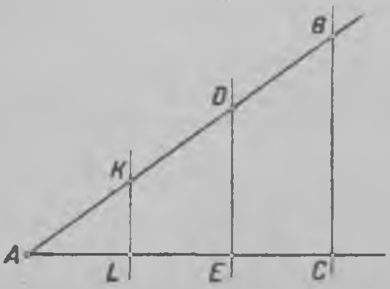
Няфтемац. Катк $\frac{a}{b}=k$, эста и $\frac{c}{d}=k$, и $\frac{m}{n}=k$, и $\frac{p}{q}=k$ и $a=bk$, $c=dk$, $m=nk, p=qk$. Кда мекпяльцень равенстватнень кержи и види ширень пяльксненьприбавамс башка членонь член и види ширень пяльксть эзда лифтемс скобкать эзда марстонь k ламокстай лувксть, ули: $a+c+m+q=k(b+d+n+q)$ коста $k=\frac{a+c+m+p}{b+d+n+q}$; но $k=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{m}{n}=\frac{c}{d}$,

а сяс

$$\frac{a+c+m+p}{b+d+n+q}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\ldots$$

5 §. Ужеть ширензон туркс ётай параллельнай виде китьксненьсвойствасна.

BAC ужеть ширензон туркс ётафттама параллельнай виде китькст: *BC*, *DE*, *KL* и ст. тов (220 тяш.); сят керфксненьди, конат ужеть ширензон лангса ащихть фкя и сякот жа параллельнайхнень колга фкя лаца, мярьгихть соответственнайста ащихть.



220 тяш.

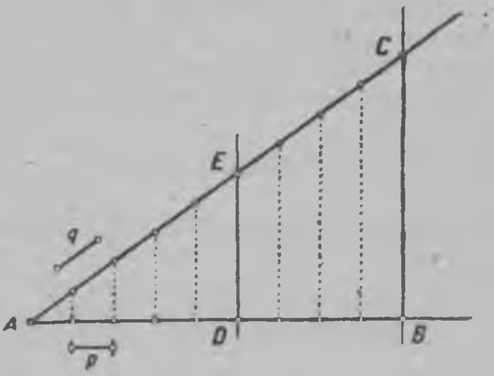
AK и *AL*, *KD* и *LE*, *AB* и *AC*, *KB* и *LC* керфксне—соответственнайста ащи керфкст; *AK* и *EC*, или *KB* и *DB*, или *KL* и *AL* керфксне аф улихть соответственнайста ащи керфкст.

Теорема. **Кда ужеть ширензон туркс ётафтомс кафта параллельнай виде китькст, эста сонь фкя ширенц лангса всякай кафта керфксне относятся кода сонь омбоце ширенц лангса кафта соответственнайста ащи керфксне.**

Максф: $\underline{BAC \angle \text{эся ули } BC \parallel DE}$ (221 тяш.).

Эряви няфтемс: 1) $\dfrac{AE}{EC} = \dfrac{AD}{DB}$; 2) $\dfrac{AC}{EC} = \dfrac{AB}{DB}$; 3) $\dfrac{AC}{AE} = \dfrac{AB}{AD}$.

Няфтемац. Катк кодамовок *q* керфкссь ули *AC* ширеть *AE* и *EC* керфксонзон марстонь ункстамасна, эста $AE = mq$, $CE = nq$ и $BC = (m+n)q$. *AC* ширеть явома точканзон ланга тяштьтяма виде китькст, параллельнайхть *BC*-ти, а сяс параллельнайхть и *DE*-тивок; *AB* ширеть *AD* и *DB* керфксонза соответственна явовихть эсь ётковаст ровна *m* и *n* керфксова; эздост эрь керфксть кувалмонц тяштьсаськ *p* букваса; эста $AD = mn$, $DB = np$ и $AB = (m+n)q$. Сяс лисеньди:



221 тяш.

$$\text{I.}\quad \frac{AE}{EC} = \frac{mq}{nq} = \frac{m}{n};\quad \frac{AD}{DB} = \frac{mp}{np} = \frac{m}{n} \text{ и } \frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DB}.$$

$$\text{II.}\quad \frac{AC}{EC} = \frac{(m+n)q}{nq} = \frac{m+n}{n};\quad \frac{AB}{DB} = \frac{(m+n)p}{np} = \frac{m+n}{n} \text{ и } \frac{AC}{EC} = \frac{AB}{DB}.$$

$$\text{III.}\quad \frac{AC}{AE} = \frac{(m+n)q}{mq} = \frac{m+n}{m};\ \frac{AB}{AD} = \frac{(m+n)p}{mp} = \frac{m+n}{m} \text{ и } \frac{C}{AE} = \frac{AB}{AD}.$$

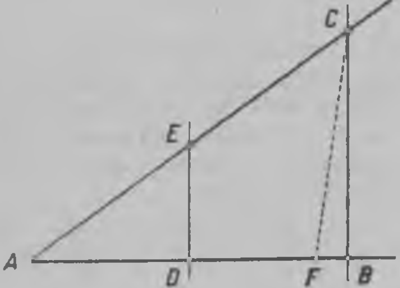
Теоремась виде и аф ункстави керфксненьдивок.

Теорема (меклангонь). **Кда ужеть ширензон туркс кафта виде китькслнь ётамста фкя ширеть кодама кельк кафта керфксонза относятся, кода омбоце ширеть кафта соответственнайста ащи керфксонза, эста тяфтама виде китькснe параллельнайхть.**

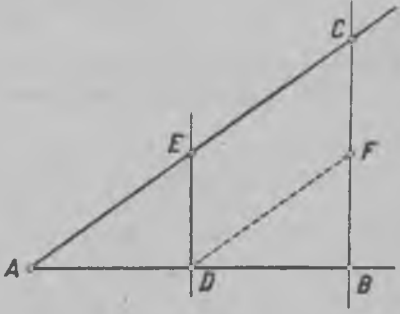
Максф: BC и DE ётайхть $BAC\angle$ ширензон туркс; $\frac{AE}{EC}=\frac{AD}{DB}$ (222 тяш.)

Эряви няфтемс: $BC \parallel DE$.

Няфтемац. Арьсетяма, што BC виде китькссь аф параллельнай DE виде китькстин и што кодамовок лия CF виде китькссь, кона ётай C точкать ланга, параллельнай DE-ти и AB ширеть туркс ётай F точкаса. Эста виде теоремать коряс BAC ужеть ширензон лангса тиевихть пропорциональнай керфкст станя, што $\frac{AE}{EC}=\frac{AD}{DF}$. Лисьф пропорциять серьстасаськ максф $\frac{AE}{EC}=\frac{AD}{DB}$ пропорциять мархта, эста минь няйсаськ, што кафта пропорциятнень эса, конатнень эса ровнат колмонь членцна, эрявихть улемс ровнат нилецевок членцнонды, лиякс мярьгемс, $DF=DB$, тя ули аньцек эста, мзярда F точкась фкя-фкянь вельхтяйхть B точкать мархта, а тя няфтьсы, што минь арьсеманьке, што BC-сь аф параллельнай DE-ти, аф виде: $BC \parallel DE$.



222 тяш.



223 тяш.

Теорема. **Кда параллельнай виде китькснe ётайхть ужеть ширензон туркс, эста параллельнайхнень керфкссна относится, кода ужеть пряста сявемок синь песнонды молемс соответственнай ёткне.**

Максф: $BAC\angle$; $BC \parallel DE$ (223 тяш.).

Эряви няфтемс: $\frac{BC}{DE}=\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$.

Няфтемац. Тяштьтяма лезды виде китькс $DE \parallel AC$, эста $DE=FC$ (223 тяш.). Ванцаськ $ABC\angle$; сонь турксканза ётафтфт параллельнай AC и DF виде китьксне, лисеньди, $\frac{BC}{FC}=\frac{BA}{DA}$; кда FC-ть полафтсаськ тейнза ровна DE керфксса, лиси $\frac{BC}{DE}=\frac{BA}{DA}$, но $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$, а сяс $\frac{BC}{DE}=\frac{AC}{AE}$. Станя,

$$\frac{BC}{DE}=\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}.$$

Теоремась ули виде сявек случайти, мзярда керфксне аф үнкставихть.

6 §. Пучёкть лучензон туркс ётай параллельнай виде китьксnень свойствасна.

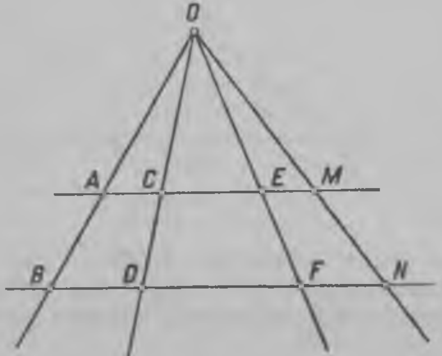
Теорема. **Кда лучень пучёкть туркс ётафтомс параллельнай виде китькст, эста лучнень лангс соответственнай керфксне и параллельнайхнень соответственнай керфкссна пропорциональнайхть.**

Максф: O центра мархта лучень пучёк; $AM \parallel BN$ (224 тяш.).

Эряви няфтемс: 1) $\frac{OA}{AB}=\frac{OC}{CD}=\frac{OE}{EF}=\frac{OM}{MN}$;

2) $\frac{BD}{AC}=\frac{DF}{CE}=\frac{FN}{EM}=\frac{ON}{OM}$.

Няфтемац. Пучёкть эрь кафта лученза тиихть BOD, DOF и FON ужет; нят ужетнень туркс ётайхть кафта параллельнай BN и AM виде китькст, конат ужетнень ширеснон эзда керихть пропорциональнай керфкст, а сяс:



224 тяш.

$\frac{OA}{AB}=\frac{OC}{CD}$; $\frac{OC}{CD}=\frac{OE}{EF}$; $\frac{OE}{EF}=\frac{OM}{MN}$.

Нят пропорциятнень серьстасаськ эсь ётковаст, лиси

$$\frac{OA}{AB}=\frac{OC}{CD}=\frac{OE}{EF}=\frac{OM}{MN}.$$

Теорemать васеньце пяльксоц няфтьф. Теоремать омбоце пяльксонц няфтемс тихтяма пропорцият, конатненьди сувайхть параллельнай виде китьксnень керфкссна, конат ётайхть BOD, DOE и FON ужетнень ширеснон туркс, лиси:

$$\frac{BD}{AC}=\frac{BO}{AO}=\frac{DO}{CO};\quad \frac{DF}{CE}=\frac{DO}{CO}=\frac{FO}{EO};\quad \frac{FN}{EM}=\frac{FO}{EO}=\frac{NO}{MO}.$$

Кда серьстасаськ нят пропорциятнень, мусаськ, што

$$\frac{BD}{AC}=\frac{DF}{CE}=\frac{FN}{EM}=\frac{NO}{MO}.$$

Няфтьф теорemать омбоце пяльксоц.

7 §. Колмужекстъ потмостонь уженц биссектрисанц свойствац.

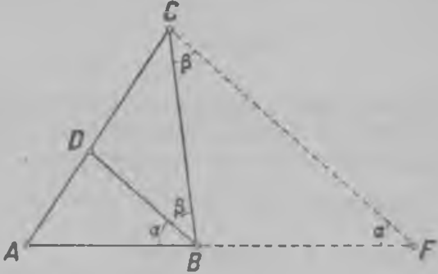
Теорема. **Колмужекстъ потмостонь уженц биссектрисац каршесонза ащи ширеть явсы стама пяльксова, конат пропорциональнайхть кафта лият ширетненьди.**

Максф: BD — биссектриса; $ABC\triangle$; $\alpha\angle=\angle\beta$ (225 тяш.).

Эряви няфтемс: $AD:DC=AB:BC$.

Няфтемац. C прять ланга тяштьтяма виде китькс $CF \parallel BD$, мольфтьсаськ AB ширеть кувалгафтф пенц туркс F точкаса ётамс.

Параллельнай BD и CF виде китьксне ётайхть A ужеть ширензон туркс и керсазь синь пропорциональнай керфксова, а сяс $AD:DC=AB:BF$. $BCF\triangle$ эса ули: $F\angle=\alpha\angle$ кода BD и FC параллельнайхнень и AF керы китьксть тейса соответственнай ужет и $\beta\angle=BCF\angle$ кода сяка жа параллельнайхнень и BC керы китьксть тейса потмостонь накрест ащи ужет. Но $\alpha\angle=\beta$, лисеньди $F\angle=BCF\angle$: нят ужетне $BCF\triangle$ основаниянц тейса ужет, синь ровнат, сяс $BCF\triangle$ — равнобедреннай и $BF=BC$.



225 тяш.

Лиси пропорциять эса BF керфкстъ полафтсаськ тейнза ровна BC керфксса, ABC колмужекстъ ширеса, лиси: $AD:DC=AB:BC$.

8 §. Нилеце пропорциональнай керфкстъ тиемац.

Задача. *Максфт колма керфкст:* a, b и c (226 тяш.). *Тиемс нилеце керфкстъ, кона улеза тейст пропорциональнай.*

Тиемац. Эряви тиемс стама x керфкс, конань коряс лисель ба $a:b=c:x$ пропорция. Сяфтяма кодамовок $BAC\angle$ и сонь фкя ширенц кувалмос A прянц эзда фкя-фкянь мельгя ункстатама керфкст $AD=a$, $DB=b$, а омбоце ширенц кувалмос — $AE=c$ керфкс; поладсаськ D и E точкатнень DE виде китьксса, тяштьтяма $BC \parallel DE$, эста $EC=x$ ули вешеньдеви нилеце пропорциональнай керфкссь.

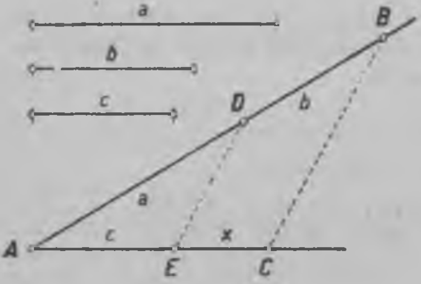
Афкукс: $BC \parallel ED$, сяс $a:b=c:x$.

9 §. Керфксть максф отношениява явомац.

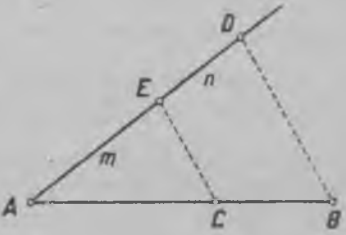
Задача. $AB = a$ *керфксть* (227 тяш.) *явомс стама кафта* AC *и* CB *керфксова, конатнень отношениясна улель ба ровна кафта максф* m *и* n *лувкснень отношенияснонды.*

Тиемац. Задачать условиянц коряс $AC:CB = m:n$.

Катк $m = 4$ и $n = 3$ кувалмонь единицаньди. Тихтяма конашкавок BAD уже; сонь фкя ширенц кувалмос прянц эзда сявемок ункстатама $AB = a$ керфкс, а омбоце ширенц кувалмос — фкя-фкянь мельгя $AB = m$ и $ED = n$ керфкст. Поладсаськ B и D точкатнень виде китьксса, тяштьтяма явома E точкать ланга виде китькс $EC \parallel BD$, кона ётай AB туркс C точкаса. Тя C точкась явсы AB-ть $m:n$ отношениява.



226 тяш.



227 тяш.

Афкукс: $EC \parallel BD$, а сяс $\frac{AC}{CB} = \frac{AE}{ED} = \frac{m}{n}$.

Кизефкст и упражненият.

1. Улихть ли пропорциональнайхть керфксне, кда эздост кафттнень отношениясна ровна 62,1 : 18 и кафта лиятнень отношениясна ровна 41,4 : 12?

2. $ABC\triangle$ фкя ширенц лангста мумс M точкать, конань эса ширесь явови пяльксова, конат пропорциональнайхть кафта лия ширензонды.

3. Равнобедреннай ABC колмужекстъ ширенза относятся станя, кода 1 : 4. Сонь периметрац $P = 4{,}5$ *см.* Мумс ширензон.

4. Тиемс всевозможнай пропорцият нят произведениятнень равенстваснон эзда: 1) $x\cdot y = m\cdot n$, 2) $12\cdot 8 = 16\cdot 6$.

5. Максф $a = 5$ *см* и $b = 8$ *см* шире мархта видеужекс. Тиемс тейнза ровнаста оцю $c = 6$ *см* шире мархта видеужекс; сонь омбоце ширенц кувалмонц мумс тиезь.

6. Максф $a = 16$ *см* основания мархта колмужекс. Сонь боконь ширец, кда лувомс основаниять эзда, явф колма пяльксова 2 : 3 : 5 отношенияса, и явома точкатнень ланга тяштьфт виде китькст, параллельнайхть основаниянцты. Лувомс нят виде китькснень керфксснон, конат ащихть боконь ширетнень ёткса.

XVI. ФИГУРАТНЕНЬ ПОДОБИЯСНА.

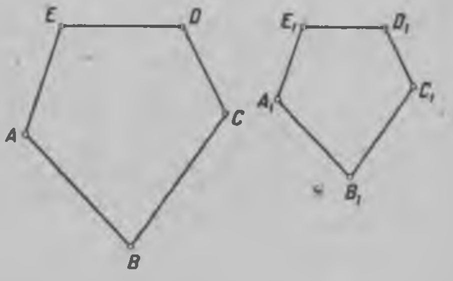
1 §. Подобнай ламужексне.

1. *Участкань* планонь тяштемста или машинань деталень техническай чертёжень тиемста участкать или машинань детальть контурснон тяшнесазь сяда ёмлалгадфста, тяка пингста ванфтсазь ся фигурать форманц сембе подробностензон.

Кда фигурать сембе китьксонь ункстаманзон ёмлалгафтомс фкяньшкакстъ и сяка пингста кадомс сонь сембе ужензон величинаснон апак полафтт, ванфтови фигурать формац и лиси фигурать изображенияц сяда ёмланяста, кона соньцень фигурать коряс лия ули аньцек размеронзон ширьде.

2. 228-це тяштьксса максфт фкяньшка лама шире мархта кафта $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ ламужекст, синь ужесна фкя-фкянь мельгя ровнат:

$A\angle = A_1\angle$; $B\angle = B_1\angle$; $C\angle = C_1\angle$; $D\angle = D_1\angle$; $E\angle = E_1\angle$;



228 тяш.

тяда башка, ровнат соответственнайста ащи ширетнень отношениясна:

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1D_1}{CD} = \frac{D_1E_1}{DE} = \frac{E_1A_1}{EA} = k.$$

Тяфтама ламужексненьди мярьгихть подобнайхть.

Кафта ламужексненьди мярьгихть подобнайхть, кда синь фкяньшка лама ширесна, синь ужесна соответственна ровнат и сходственнай ширесна пропорциональнайхть.

Ламужексонь сходственнай ширет мярьгихть сят ширетненьди, конатнень ваксса ащихть соответственна ровна ужет. Подобиять сёрмадкшесазь $\backsim$ тяштеняса.

$A_1B_1C_1D_1E_1 \backsim ABCDE$ сёрмадфть морафнесазь тяфтаня: $A_1B_1C_1D_1E_1$ ламужекссь подобнай $ABCDE$ ламужексти.

Кафта подобнай ламужекснень сходственнай ширеснон отношениясноңды мярьгихть подобиянь коэфициент.

Кда ламужекснень подобиянь коэфициентсь, лиякс мярьгемс, отношениясь ули $\frac{A_1B_1}{AB} = k = 1$, эста ламужексне ровнат. Тяста няйсаськ, што равенствась ули подобиять частнай случаец.

2 §. Колмужекснень подобиясна.

Колмужексненьди мярьгихть подобнайхть, кда синь соответственна ровнат ужесна и сходственнай ширесна пропорциональнайхть.

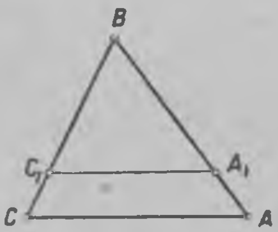
Колмужекстъ сходственнай ширенза ащихть ровна ужетнень каршеса.

***Теорема.* Ся виде китькссь, кона параллельнай колмужекстъ ширенц эзда фкяти, керы тя колмужекстъ эзда стама колмужекс, кона подобнай максфти.**

Максф: $ABC\triangle$ эса $C_1A_1 \parallel CA$ (229 тяш.).

Эряви няфтемс: $A_1BC_1\triangle \backsim ABC\triangle$, лиякс мярьгемс 1) $A\angle = A_1\angle, C\angle = C_1\angle$;

$$2)\ \frac{BA_1}{BA} = \frac{BC_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA}.$$



229 тяш.

Няфтемац. Ётафттама $C_1A_1 \parallel CA$, лиси $A_1BC_1\triangle$, конань уженза ровнат $ABC\triangle$ ужензонды; станя $B\angle$—марстонь, $A_1\angle = A\angle$ и $C_1\angle = C\angle$ кода соответственнай ужет. Пучёкть лученzон колга теоремать коряс ули:

$$\frac{BA_1}{BA} = \frac{BC_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA};$$

лисеньди, колмужексне подобнайхть: $A_1BC_1\triangle \backsim ABC\triangle$.

3 §. Колмужексонь подобиянь колма признакне.

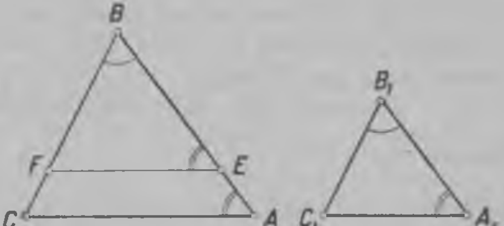
1. Колмужексонь подобиянь васеньце признаксь.

Теорема. **Кда фкя колмужекстъ кафта уженза соответственно ровнат омбоце колмужекстъ кафта ужензонды, эста стама колмужексне подобнайхть.**

Максф: $ABC\triangle$ и $A_1B_1C_1\triangle$; $A_1\angle = A\angle$ и $B_1\angle = B\angle$ (230 тяш.).

Эряви няфтемс: $A_1B_1C_1\triangle \backsim ABC\triangle$.

Няфтемац. Условиять коряс $A\angle = A_1\angle$ и $B\angle = B_1\angle$, лисеньди, и $C\angle = C_1\angle$, кода максф ужетнень суммаснонды $2d$ молемс пяшкедькс. CA ширеть кувалмос B прять эзда сявемок ункстатама керфкс $BE = B_1A_1$ и тяштьтяма, $FE \parallel CA$, лиси $EBF\triangle \backsim ABC\triangle$; $EBF\triangle = A_1B_1C_1\triangle$,. сяс мес синь $BE = B_1A_1$, $B\angle = B_1\angle$ условиять коряс и $E\angle = A\angle = A_1\angle$. Но $EBF\triangle \backsim ABC\triangle$, лисеньди, и тейнза ровна $A_1B_1C_1\triangle \backsim ABC\triangle$.



230 тяш.

Следствият. **1) Видеужень колмужексне, конатнень улихть ровна тифтень оржа ужесна, подобнайхть.**

2) Равнобедреннай колмужексне, конатнень улихть прять тейса или основаниять тейса ровна тифтень ужесна, подобнайхть.

3) Ровнаширень колмужексне подобнайхть.

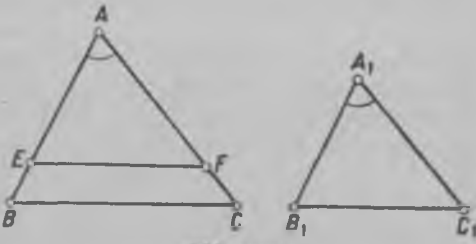
2. Колмужексонь подобиянь омбоце признаксь.

Теорема. **Кда фкя колмужекстъ кафта ширенза пропорциональнайхть омбоце колмужекстъ кафта ширензонды и нят ширетнень ёткса ащи ужетне ровнат, эста колмужексне подобнайхть.**

Максф: $ABC\triangle$ и $A_1B_1C_1\triangle$; $\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{A_1C_1}{AC}$ и $A_1\angle=A\angle$ (231 тяш.).

Эряви няфтемс: $A_1B_1C_1\triangle\backsim ABC\triangle$.

Няфтемац. A прять эзда AB ширеть кувалмос ункстатама керфкс $AE=A_1B_1$ и тяштьтяма $EF\parallel BC$, лиси $AEF\triangle\backsim ABC\angle$. Колмужексонь подобиять эзда лисеньди: $\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}$ (1); кда (1) пропорциять эса AE полафтсаськ A_1B_1-са, лиси $\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{AF}{AC}$ (2).



231 тяш.

Кда (2) равенствать серьстамс условиять эса максф пропорциять мархта, няйсаськ, што синь колма членсна флацот, а сяс и нилеце члентненьди эряви улемс ровнат, лиякс мярьгемс, $AF=A_1C_1$; $A_1B_1C_1\triangle=AEF\triangle$, сяс мес синь $A_1\angle=A\angle$—условиять коряс, $AE=A_1B_1$ — тиемать коряс и $AF=A_1C_1$ — няфтемать коряс: $AEF\triangle\backsim ABC\triangle$, лисеньди, тейнза ровна $A_1B_1C_1\triangle\backsim ABC\triangle$.

Следствия. **Видеужень колмужексне подобнайхть, кда синь катетснон отношениясна ровнат.**

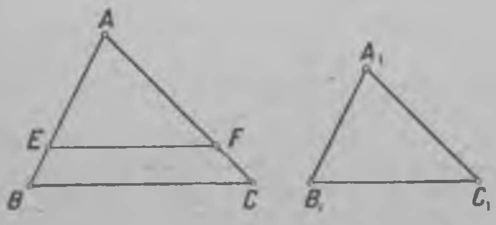
3. Колмужексонь подобиянь колмоце признакс.

Теорема. **Кда фкя колмужексть колмицьке ширенза пропорциональнайхть омбоце колмужексть колмицьке ширензонды, эста тяфтама колмужексне подобнайхть.**

Максф: $ABC\triangle$ и $A_1B_1C_1\triangle$; $\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{C_1A_1}{CA}$ (232 тяш).

Эряви няфтемс: $A_1B_1C_1\triangle\backsim ABC\triangle$.

Няфтемац. A ужеть пряста AB ширенц кувалмос ункстатама керфкс $AE=A_1B_1$ и тяштьтяма $EF\parallel BC$, эста $AEF\triangle\backsim ABC\triangle$. Колмужексонь подобиять эзда лисеньди, што $\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{BC}$ (1).



232 тяш.

Кда васеньце отношенияса AE полафтсаськ A_1B_1-са, лиси:

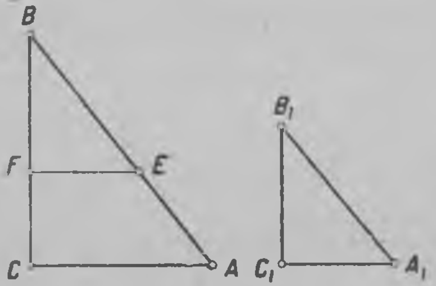
$$\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{BC}\quad(2).$$

Кда (2) пропорциять серьстасаськ условияса максф пропорциять мархта, няйсаськ, што $\frac{AF}{AC}=\frac{A_1C_1}{AC}$, коста $AF=A_1C_1$ и $\frac{EF}{BC}=\frac{B_1C_1}{BC}$, сяс $EF=B_1C_1$.

Тяфта, AEF колмужексть колма ширенза ровнат $A_1B_1C_1$ колмужексть колма ширензонды, лисеньди $AEF\triangle = A_1B_1C_1\triangle$, но $AEF\triangle \backsim ABC\triangle$, сяс тейнза ровна $A_1B_1C_1\triangle \backsim ABC\triangle$.

Следствия. **Равнобедреннай колмужексне подобнайхть, кда фкя колмужексть основанияц и боконь ширец пропорцнональнайхть омбоце колмужексть основаниянцты и боконь ширенцты.**

4. *Теорема.* **Кафта видеужень колмужексие подобиайхть, кда фкя колмужексть гипотенузац и катетоц пропорциональнайхть омбоце колмужексть гипотенузанцты и катетонцты.**



233 тяш.

Максф: $ABC\triangle$ и $A_1B_1C_1\triangle$;

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} \quad (233 \text{ тяш.}).$$

Эряви няфтемс: $A_1B_1C_1\triangle \backsim ABC\triangle$.

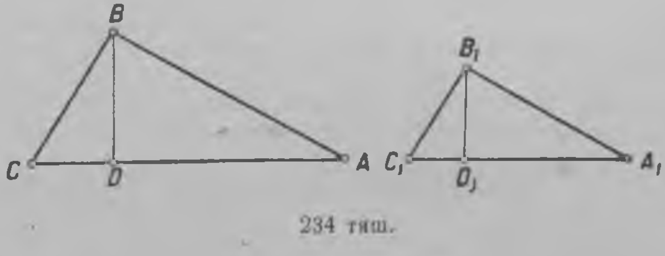
Няфтемац. B прять эзда BA гипотенузать кувалмос ункстатама керфкс $BE = B_1A_1$ и тяштьтяма $EF \parallel AC$. $EBF\triangle \backsim ABC\triangle$, сяс $\frac{BE}{BA} = \frac{BF}{BC}$; кда лисьф пропорциять серьстасаськ максф пропорциять мархта, няйсаськ, што $BF = B_1C_1$; лисеньди, $EBF\triangle = A_1B_1C_1\triangle$ гипотенузать и катетть коряс. Но $EBF\triangle \backsim ABC\triangle$, сяс лисеньди, и тейнза ровна $A_1B_1C_1\triangle \backsim ABC\triangle$.

4 §. Подобнай колмужекснень серьснон и ширеснон пропорциональностьсна.

1. *Теорема.* **Подобнай колмужекснень серьсна пропорцнональнайхть сходственнай ширетненьди.**

Максф: $ABC\triangle \backsim A_1B_1C_1\triangle$; BD и B_1D_1 — серьсна (234 тяш.).

Эряви няфтемс: $\frac{B_1D_1}{BD} = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA}$.



234 тяш.

Няфтемац. Видеужень ABD и $A_1B_1D_1$ колмужексне подобнайхть, сяс мес улихть фкянь ровна оржа ужесна; $A\angle = A_1\angle$.

Синь подобияснон эзда лисеньди, што

$$\frac{B_1D_1}{BD}=\frac{A_1B_1}{AB};\text{ но }\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{C_1A_1}{CA},$$

а сяс

$$\frac{B_1D_1}{BD}=\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{C_1A_1}{CA},$$

лиякс мярьгемс, подобнай колмужекснень серьсна пропорциональнайхть кодама кельк кафта сходственнай ширетненьди.

2. *Подобнай колмужекснень эса сходственнай биссектрисатне и сходственнай медианатне пропорциональнайхть сходственнай ширетненьди.*

3. Мзярда геометрическай задачать минь тиеньдсаськ колмужексонь подобиянь вельде, цебярь ули пропорциятнень тиеньдемс станя, штоба фкя отношенияти членкс улельхть фкя колмужексть китьксонь элементонза, омбоце отношенияти членкс улельхть — омбоце колмужексть сходственнай элементонза.

5 §. Подобнай колмужекснень свойстваснон коряс тиф приборхне.

1. **Явондома циркульсь.** Чертёжнай работань тиемста ноляйхть тевс явондома циркульхть (235 тяш.). Сон эряви керфксонь ровна пяльксова явондомс; сон тиф колмужекснень подобияснон коряс. Явондома циркульсь тиф кафта AD и CB пильгеняста, конат оржаптфт кафцьке песта; пильгенятнень кувалмос тифт прорест и пильгенятне поладфт шашневи O шарнирса. Штоба явондома циркульть вельде мумс, мярьгемс, PQ керфксть колмоце пяльксонц, O шарнирть кемекстасазь станя, штоба BO-сь улель 3-ксть сяда оцю OC-ть коряс; штоба улель сяда тёждя лувондомс, AD и CB пильгенятнень лангса улихть деленият. O шарнирть кемекстамда меле пильгенятнень B и D песнон путсазь керфксть P и Q точказост, и эста C и A петнень ёткста расстояниясь ули ровна $\frac{1}{3}PQ$.

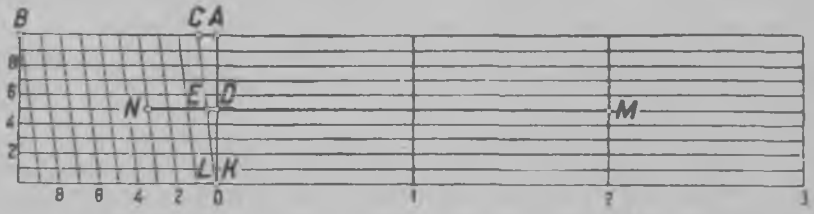
235 тяш.

Афкукс, $COA\triangle\sim BOD\triangle$, коста $\frac{CA}{BD}=\frac{OC}{OB}$, но $CO=\frac{1}{3}OB$, лисеньди, $\frac{CA}{BD}=\frac{1}{3}$, а сяс $CA=\frac{1}{3}BD$, или $CA=\frac{1}{3}PQ$, сяс мес $BD=PQ$.

2. **Туркс ункстамань масштабсь**. Китьксонь масштабть вельде аш кода ункснемс масштабнай единицань ёмла пяльскт; тяаф сатыкссь машфтови туркс ункстамань масштабса, конань вельде ули кода ункснемс единицать кеменьце и сядоце пяльксонзон. Туркс ункстамань масштабть тиемац няфтьф 236 тяштьксса.

Сонь эсонза ункстама единицакс ули BA; $CA = 0{,}1BA$. AOC колмужексть эзда, конань эса тяштьфт AC-ти параллельнай виде китькст, ули: $KL = 0{,}1CA$, или $0{,}01BA$; $AOC\triangle$ эса лия параллельнай керфксне соответственна ровнат ункстама BA единицать 0,02. 0,03... 0,10 пяльксонзонды.

Туркс ункстама масштабса унксnемась. Мярьгтяма, эряви ункстамс керфкс $x = 2{,}35AB$. Циркульть фкя оржа



236 тяш.

пильгенянц путсаськ M точкати, а омбоцеть — N точкати, эста $NM = x = 2{,}35$.

Афкукс, $NM = DM + ED + NE$, коса $DM = 2BA$, $NE = 0{,}3BA$; $ED = 0{,}05BA$, сяс мес $OAC\triangle \backsim ODE\triangle$, коста $\frac{OD}{OA} = \frac{ED}{CA} = \frac{5}{10}$, сяс лисеньди, $ED = \frac{5}{10}CA$, но $CA = 0{,}1BA$, а сяс $ED = 0{,}05BA$.

Тянь коряс лисеньди, $NM = 2 + 0{,}3 + 0{,}05 = 2{,}35$.

6 §. Виде китьксонь подобнай фигурань тиемась.

1-це задачась. *Тиемс колмужекс, подобнай ABC колмужексти* (237 тяш.), *конань ширенза колмоксть сяда ёмлат максф ABC колмужекстъ ширензон коряс.*

237 тяш.

Тиемац. ABC колмужекстъ ширензон эзда фкять, мярьгемс AC-ть, явсаськ 3 ровна пялксова и E точкать ланга тяштьтяма ED виде китькс, параллельнай ABC колмужекстъ AB ширенцты; лиси $EDC\triangle$, подобнай максф колмужексти.

$EDC\triangle \backsim ABC\triangle$ кода ровнаужень колмужекст.

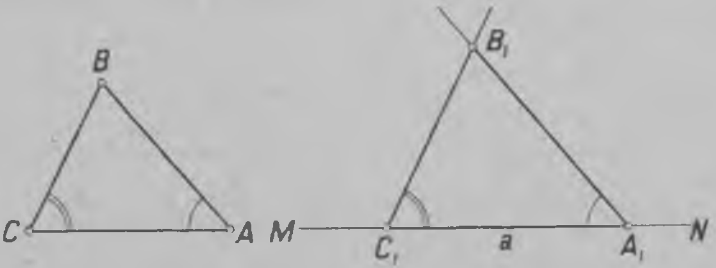
2-це задачась. *Максф а керфкстъ лангс тиемс колмужекс, подобнай максф ABC колмужексти* (238 тяш.).

Тиемац. a — керфкссь сходственнай ABC колмужекстъ CA ширенц мархта.

MN виде китькссть кувалмос ункстатама керфкс $C_1A_1 = a$ и A_1 точкать тейс тихтяма $A_1\angle = A\angle$ и C_1 точкать тейс — $C_1 = C\angle$, лиси $A_1B_1C_1\triangle \backsim ABC\triangle$.

Афкукс, нят колмужексне подобнайхть, кода кафта соответственна ровна уже мархта колмужекст.

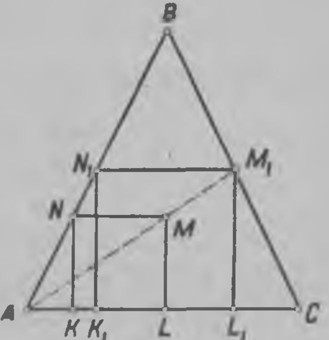
3-це задачась. *Максф* $ABC\triangle$ (239 тяш.) *потмос тяштемс квадрат станя, штоба сонь кафта прянза ащельхть основаниять лангса, а кафта лият прянза — колмужексть боконь ширензон лангса.*



238 тяш.

Тиемац. Колмужексть AB ширенц кодамовок N точкать эзда тяштьтяма AC-ти NK перпендикуляр и тихтяма NK шире мархта $KLMN$ квадрат. Колмужексть A прянц эзда квадратть M прянц ланга тяштьтяма AM_1 виде китькс мянь BC ширеть туркс M_1 точкаса ётамс; тяда меле тяштьтяма $M_1L_1 \perp AC$, $M_1N_1 \parallel AC$ и $N_1K_1 \perp AC$, лиси вешеньдеви $K_1L_1M_1N_1$ квадратсь.

Няфтемац. $K_1L_1M_1N_1$ — видеуженъ параллелограма. AL_1M_1 и ALM колмужекснень подобияснон эзда ули: $\frac{M_1L_1}{ML} = \frac{M_1A}{MA}$; AM_1N_1 и AMN колмужекснень подобияснон эзда лиси: $\frac{M_1N_1}{MN} = \frac{M_1A}{MA}$; сяс лисеньди, $\frac{M_1L_1}{ML} = \frac{M_1N_1}{MN}$, но тиемать коряс $ML = MN$ кода квадратонь ширет, а сяс и $M_1L_1 = M_1N_1$, лиякс мярьгемс, $K_1L_1M_1N_1$ видеужекссь — квадрат.



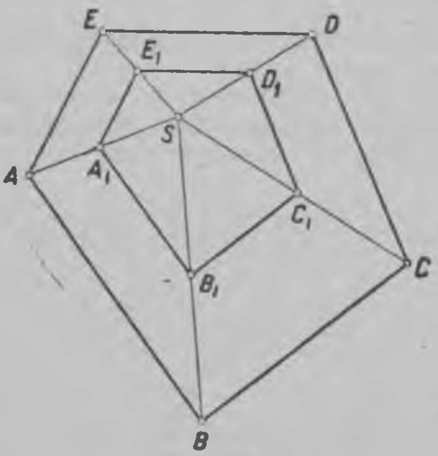
239 тяш.

7 §. Подобнайста ащи ламужексне. Подобиять центрац.

Задача. *Тиемс ламужекс, подобнай максфти.*

Тиемац. Максф $ABCDE$ ламужексть потмоса коса-коса сяфтяма S точка и эздонза ётафттама сонь прянц ланга лучт (240 тяш.).

Лучнень эзда фкfive, мярьгемс SA, лангса сяфтяма A_1 точка (тя точкать ули кода сявемс максф ламужексть эзда и ушеса и сонь ширенц лангса) и тяштьтяма виде китькс $A_1B_1 \parallel AB$ мянь SB лучть туркс B_1 точкава ётамс; B_1 точкать ланга тяштьтяма $B_1C_1 \parallel BC$ мянь SC лучть туркс C_1 точкава ётамс; тяда меле $C_1D_1 \parallel CD$, $D_1E_1 \parallel DE$ и E_1 поладсаськ A_1 мархта, лиси $A_1B_1C_1D_1E_1$ ламужекс, подобнай максф $ABCDE$ ламужексти.



240 тяш.

Афкукс, лучень пучёкть колга теоремать коряс лисеньди:

$$\frac{SA_1}{SA}=\frac{SB_1}{SB}=\frac{SC_1}{SC}=\frac{SD_1}{SD}=\frac{SE_1}{SE}.$$

Лисеньди, $E_1A_1 \parallel EA$, сяс мес $\frac{SA_1}{SA}=\frac{SE_1}{SE}$.

$A_1B_1 \parallel AB$, $B_1C_1 \parallel BC$ и ст. тов, сяс лисеньди, $A_1\angle = A\angle$, $B_1\angle = B\angle$, $C_1\angle = C\angle$ и ст. тов кода параллельнай шире мархта ужет, и

$$\frac{SA_1}{SA}=\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{SB_1}{SB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{SC_1}{SC}=\frac{C_1D_1}{CD}=\frac{SD_1}{SD}=\frac{D_1E_1}{DE}=\frac{SE_1}{SE}=\frac{E_1A_1}{EA}.$$

Нят отношениятнень равенстваснон эзда лисеньди, што:

$$\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{C_1D_1}{CD}=\frac{D_1E_1}{DE}=\frac{A_1E_1}{AE}.$$

$A_1B_1C_1D_1E_1$ и $ABCDE$ ламужекснень улихть соответственна ровна ужесна и синь сходственнай ширесна пропорциональнайхть, сяс $A_1B_1C_1D_1E \backsim ABCDE$. S точкати мярьгихть подобиянь центра, а эстейст ламужексненьди мярьгихть подобнайста ащихть.

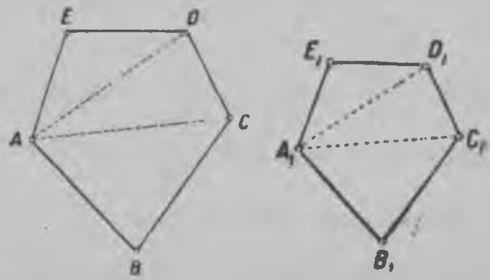
Кда полафтомс фкя ламужекстъ вастонц омбоце ламужекстъ вастонц колга, мярьгемс сонь шарфтомс, эста ламужекснень подобиясна аф колави, колави подобнайста ащемасна, а именна, синь сходственнай ширесна аф улихть параллельнайхть и, соответственнай ровна ужетнень пряснон полады лучне аф ётайхть фкя точкань ланга; ламужексне юмафтозь подобиянь центраснон.

Ламужексонь подобиянь эрявикс условияньди улихть: 1) синь соответственнай ужеснон равенствасна, 2) синь соответственнай ширеснон пропорциональностьсна. Подобнайста ащи ламужекснень, тяда башка, эряви улемс нингя подобиянь центрасновок.

8 §. Подобнай ламужекснень свойствасна.

Плантнень разнай масштабса тяшнемста цебярь ули, кда максф планть явомс башка участкава и тяда меле синь тяшнемс фкяфкянь мельгя. Плантть обычна явондсазь колмужексова. Станя тяшнемать тиеньдькшесазь тяфтама кафта теоремань коряс.

1. *Теорема.* Кафта подобнай и подобнайста ащи ламужекснень соответственна ровна ужетнень пряснон эзда тяштьф диагональхне явсазь синь фкяньшка лувкс подобнай и подобнайста ащи колмужексова.



241 тяш.

Максф: $A_1B_1C_1D_1E_1 \backsim ABCDE$ (241 тяш.), лиякс мярьгемс,

1) $A_1\angle = A\angle$, $B_1\angle = B\angle$ и ст. тов;

2) $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1D_1}{CD}$ и ст. тов.

3) A_1D_1 и AD, A_1C_1 и AC — сходственнай диагональхть.

Эряви няфтемс: 1) $A_1B_1C_1\triangle \backsim ABC\triangle$;

2) $A_1C_1D_1\triangle \backsim ACD\triangle$;

3) $A_1D_1E_1\triangle \backsim ADE\triangle$.

Няфтемац. $A_1B_1C_1\triangle \backsim ABC\triangle$, сяс мес условиять коряс $B_1\angle = B\angle$ и $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC}$; синь подобияснон эзда лисеньди, што $A_1C_1B_1\angle = ACB\angle$, но $C_1\angle = C\angle$, а сяс $A_1C_1D_1\angle = ACD\angle$, тяда башка $\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC}$, но $\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1D_1}{CD}$, а сяс $\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{C_1D_1}{CD}$.

Кда жа $A_1C_1D_1\angle = ACD\angle$ и $\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{C_1D_1}{CD}$, эста $A_1C_1D_1\triangle \backsim ACD\triangle$.

Станя жа няфнекшесазь, што $A_1D_1E_1\triangle \backsim ADE\triangle$.

***Следствия.* Подобнай ламужекснень сходственнай диагональсна пропорциональнайхть сходственнай ширеснонды:**

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{C_1D_1}{CD} = \frac{A_1D_1}{AD}, \text{ и ст. тов.}$$

2. *Теорема* (*меклангонь*). Кда кафта ламужексне сходственнай диагональса явондовихть фкяшка лувкс подобнай и подобнайста ащи колмужексова, эста стама ламужексне подобнайхть.

Максф: $\left.\begin{array}{l} A_1B_1C_1\triangle \backsim ABC\triangle \\ A_1C_1D_1\triangle \backsim ACD\triangle \\ A_1D_1E_1\triangle \backsim ADE\triangle \end{array}\right\}$ и подобнайста ащихть (241 тяш.).

Эряви няфтемс: $A_1B_1C_1D_1E_1 \backsim ABCDE$, лиякс мярьгемс,

1) $A\angle = A_1\angle$; $B\angle = B_1\angle$ и ст. тов,

2) $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1D_1}{CD}$ и ст. тов.

Няфтемац. $A_1B_1C_1$ и ABC колмужекснень подобияснон эзда лисеньди, што $B_1\angle = B\angle$ и $A_1C_1B_1\angle = ACB\angle$ (1). $A_1C_1D_1$ и ACD колмужекснень подобияснон эзда лисеньди, што $A_1C_1D_1\angle = ACD\angle$ (2); кда (1) и (2) равенстватнень путнесаськ башка членонь-член лиси, што $C_1 = C\angle$; станя жа няфнекшесазь ламужексть лядыкс ужензон равенстваснон.

$A_1B_1C_1$ и ABC колмужекснень подобияснон эзда лисеньди, што $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC}$; $A_1C_1D_1$ и ACD колмужекснень подобияснон эзда ули: $\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{C_1D_1}{CD}$; кафта мекпяльдень равенстватнень серьстамста лиси: $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1D_1}{CD}$. Станя жа няфнекшесазь кафцьке ламужекснень лия ширеснон пропорциональностьснон.

Тяфтаня, $A_1B_1C_1D_1E_1 \backsim ABCDE$.

9 §. Подобнай фигуратнень периметраснон отношениясна.

***Теорема.* Подобнай ламужекснень периметрасна относятся кода ламужекснень сходственнай ширесна.**

Максф: $A_1B_1C_1D_1E_1 \backsim ABCDE$ (241 тяш.).

Эряви няфтемс: $\frac{A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1 + D_1E_1 + E_1A_1}{BA + BC + CD + DE + EA} = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \ldots$

Няфтемац. $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ ламужекснень подобияснон эзда ули: $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1D_1}{CD} = \frac{D_1E_1}{DE} = \frac{E_1A_1}{EA} = k.$

Ровна отношениянь рядть свойстванц коряс ули:

$$\frac{A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1 + D_1E_1 + E_1A_1}{AB + BC + CD + DE + EA} = k = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \ldots$$

или $\frac{P_1}{P} = \frac{A_1B_1}{AB}$, коса P_1 и P — максф ламужекснень периметрасна.

Теоремась виде мзяра кельк n лувкс шире мархта подобнай ламужексненьди; сон виде стамовок случайти, мзярда $n = 3$, лиякс мярьгемс, подобнай колмужексненьдивок.

10 §. Подобнай колмужекснень и ламужекснень площадьснон отношениясна.

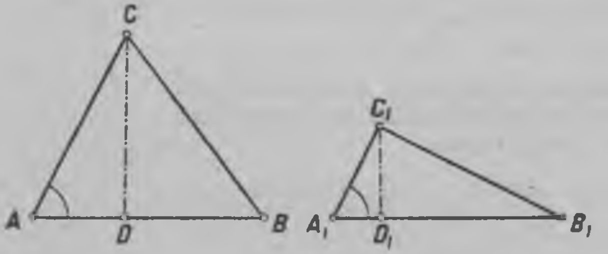
1. *Теорема.* Кафта колмужекснень, конатнень улихть фкянь ровна ужесна, площадьсна эсь ётковаст относятся кода сят ширетнень произведениясна, конатнень ёткса нят ужетне.

Максф: $\underline{ABC\triangle \text{ и } A_1B_1C_1\triangle;\ A\angle = A_1\angle \text{ (242 тяш.)}.}$

Эряви нефтемс: $\dfrac{S}{S_1} = \dfrac{AB\cdot AC}{A_1B_1\cdot A_1C_1}$.

Нефтемац. Кда максф колмужекснень эса тяштьсаськ CD и C_1D_1 серьснон; ули:

$$\frac{ABC\text{ пл.}}{A_1B_1C_1\text{ пл.}} = \frac{S}{S_1} = \frac{AB\cdot CD}{A_1B_1\cdot C_1D_1} = \frac{AB}{A_1B_1}\cdot\frac{CD}{C_1D_1}. \qquad (1),$$



242 тяш.

$ACD\triangle \backsim A_1C_1D_1\triangle$, сяс мес синь видеуженнет и улихть фкянь соответственна ровна оржа ужесна: $A\angle = A_1\angle$; синь подобияснон эзда лисеньди, што

$$\frac{CD}{C_1D_1} = \frac{AC}{A_1C_1}; \qquad (2)$$

кда (1) равенствать эса полафтсаськ $\dfrac{CD}{C_1D_1}$ отношениять тейнза ровна $\dfrac{AC}{A_1C_1}$ отношенияса, лиси:

$$\frac{S}{S_1} = \frac{AB}{A_1B_1}\cdot\frac{AC}{A_1C_1}, \text{ или } \frac{S}{S_1} = \frac{AB\cdot AC}{A_1B_1\cdot A_1C_1}.$$

Мекпяльдеть лаца сёрмадкшесазь эста, мзярда ширетне азфт лувксса.

Теоремась ляды видекс стамовок случайти, мзярда

$$A\angle + A_1\angle = 2d.$$

2. *Теорема.* Подобнай колмужекснень площадьсна относятся кода сходственнай ширеснон квадратсна.

Максф: $\underline{ABC\triangle \backsim A_1B_1C_1\triangle \text{ (243 тяш.)}.}$

Эряви нефтемс: $\dfrac{S}{S_1} = \dfrac{AB^2}{A_1B^2_1} = \dfrac{AC^2}{A_1C^2_1} = \dfrac{BC^2}{B_1C_1{}^2}$.

Нефтемац. $ABC\triangle \backsim A_1B_1C_1\triangle$, сяс $A\angle = A_1\angle$, $B\angle = B_1\angle$, а сяс

$$\frac{S}{S_1} = \frac{AB\cdot AC}{A_1B_1\cdot A_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1}\cdot\frac{AC}{A_1C_1}. \qquad (1)$$

Колмужекснень подобияснон эзда лисеньди, што

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1}=\frac{BC}{B_1C_1}. \qquad (2)$$

Кда (1) равенстваса отношениять эзда фкять полафтсаськ (2) равенстватькодамовок отношенияса, лисихть:

$$\frac{S}{S_1}=\frac{AB}{A_1B_1}\cdot\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AB^2}{A_1B_1^2}, \text{ но } \left(\frac{AB}{A_1B_1}\right)^2=\left(\frac{AC}{A_1C_1}\right)^2=\left(\frac{BC}{B_1C_1}\right)^2,$$

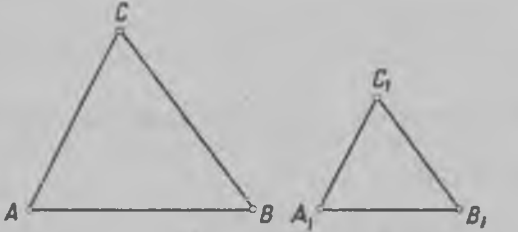
сяс $\frac{S}{S_1}=\frac{AB^2}{A_1B_1^2}=\frac{AC^2}{A_1C_1^2}=\frac{BC^2}{B_1C_1^2}.$

3. *Теорема.* **Подобнай ламужекснень площадьсна относятся кода сходственнай ширетнень квадратсна.**

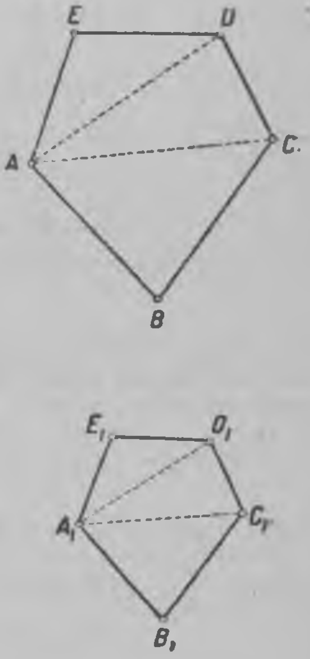
Максф: $ABCDE \backsim A_1B_1C_1D_1E_1$ (243а тяш.).

Эряви няфтемс: $\frac{S}{S_1}=\frac{AB^2}{A_1B_1^2}=\frac{BC^2}{B_1C_1^2}=\ldots$

Нафтемац. Соответственнай A и A_1 прятнень эзда ётафтф диагональса максф ламужексне явовихть фкяньшка лувкс соответственна подобнай колмужексова: ABC и $A_1B_1C_1$, ACD и $A_1C_1D_1$, ADE и $A_1D_1E_1$. Колмужекснень подобияснон эзда лисеньди:



243 тяш.



243а

$$\left.\begin{array}{l}\frac{ABC \text{ пл.}}{A_1B_1C_1 \text{ пл.}}=\frac{AB^2}{A_1B_1^2}=\frac{BC^2}{B_1C_1^2}; \quad \frac{ACD \text{ пл.}}{A_1C_1D_1 \text{ пл.}}=\frac{CD^2}{C_1D_1^2};\\ \frac{AED \text{ пл.}}{A_1E_1D_1 \text{ пл.}}=\frac{ED^2}{E_1D_1^2}=\frac{AE^2}{A_1E_1^2}.\end{array}\right\} \quad (1)$$

Ламужекснень подобияснон эзда ули:

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CD}{C_1D_1}=\frac{DE}{D_1E_1}=\frac{EA}{E_1A_1},$$

или

$$\frac{AB^2}{A_1B_1^2}=\frac{BC^2}{B_1C_1^2}=\frac{CD^2}{C_1D_1^2}=\frac{DE^2}{D_1E_1^2}=\frac{EA^2}{E_1A_1^2}. \qquad (2)$$

(1) и (2) рядонь отношениятнень серьстамста ули:

$$\frac{ABC\text{ пл.}}{A_1B_1C_1\text{ пл.}}=\frac{ACD\text{ пл.}}{A_1C_1D_1\text{ пл.}}=\frac{AED\text{ пл.}}{A_1E_1D_1\text{ пл.}}=\frac{AB^2}{A_1B_1^2}=\ldots$$

Ровна отношениянь рядтнень свойстваснон коряс лисеньди:

$$\frac{ABC\text{пл.}+ACD\text{пл.}+AED\text{пл.}}{A_1B_1C_1\text{пл.}+A_1C_1D_1\text{пл.}+A_1E_1D_1\text{пл.}}=\frac{ABCDE\text{пл.}}{A_1B_1C_1D_1E_1\text{пл.}}=\frac{AB^2}{A_1B_1^2}=\frac{BC^2}{B_1C_1^2}=\ldots$$

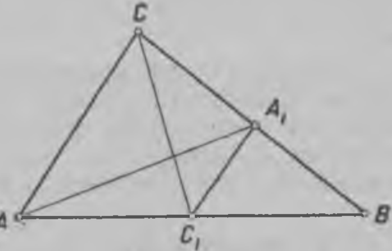
Кизефкст и упражненият.

1. Мес соответственна перпендикулярнай или параллельнай шире мархта колмужексне подобнайхть?

2. Мес квадратть и видеужекстъ аш кода лувомс подобнай фигуракс, хотя синь ужесна ровнат кода виде ужет?

3. Мес a шире мархта квадратсь и $2a$ шире мархта кичкоружень ромбась аф подобнай фигурат, хотя синь ширесна пропорциональнайхть?

4. Кафта колмужекснень подобияньди саты или синь ужеснон равенстваснa или синь ширеснон пропорциональностьсна. Сат ы или аф нят условиятнень эзда фкясь кафта фкяшка лувкс шире мархта ламужексонь подобияньди?



244 тяш.

5. Тиемс кодамовок формаса ABC колмужекс и лучень пучёконь способса тиемс тейнза подобнай; подобиянь коэфициентсь $к=1{,}5$.

6. ABC колмужекстъ эса ширенза: $AB=6$ *см*, $BC=8$ *см* и $AC=9$ *см*. Лувомс подобнай колмужекстъ ширензон, кда $к=2{,}5$.

7. Трапециять диагоналенза фкя-фкянь явихть основаниятненьди пропорциональнай пяльксова. Няфтемс тянь.

8. *ABC колмужекстъ эса основаниять тейста A и C ужетнень эзда тяштьф AA_1 и CC_1 медианат* (244 тяш.). *Няфтемс, што C_1A_1 виде китькссь керы максф колмужекстъ эзда подобнай колмужекс и што AA_1 и CC_1 медианатне явовихть 2:1 отношениява.*

9. Максфт колма колмужекст, конатнень ширесна ровнат: 1) 10; 8 и 12; 2) 7,5; 6 и 7,2; 3) 25; 20 и 24. Конат нят колмужекснень эзда подобнайхть.

10. $a=10$ *см* кувалмоса основания мархта и $h=15$ *см* кувалмоса серь мархта колмужекстъ потмос тяштьф квадрат, конань кафта прянза ащихть колмужекстъ основаниянц лангса, а лия кафта прянза — колмужекстъ ширензон лангса. Мумс квадратть ширенц кувалмонц.

11. Ужеть потмос тяштьф уше ширьде токай стама кафта окружностьт, конатнень центрасна ужеть прянц эзда ащихть 9 *см* и 3 *см* расстоянияса. Мумс нят окружностьтнень радиусснон.

12. $ABCD$ видеужекстъ потмоса ащи омбоце $A_1B_1C_1D_1$ видеужекс, конань ширенза параллельнайхть васеньце колмужекстъ ширензонды и ащихть эздост фкяньшка расстоянияса. Подобнайхть ли нят видеужексне?

XVII. КОЛМУЖЕКСТЬ ЭЛЕМЕНТОНЗОН ЁТКСА МЕТРИЧЕСКАЙ СООТНОШЕНИЯТНЕ.

1 §. Колмужекстъ элементонзон ёткса зависимостьсь.

1. Всякай колмужекстъ уженззон ёткса зависимостьсь мушендови тя равенствать вельде:

$$A\angle+B\angle+C\angle=2d.$$

2. Колмужексть ширензон ёткса ули тяфтама зависимость: колмужексть кодама кельк ширец сонь кафта лият ширензон суммаснон коряс сяда ёмла и сяда оцю синь разностьснон коряс:

$$a < b + c \text{ и } a > b - c, \text{ или } b - c < a < b + c.$$

3. Колмужексть ширензон и уженьзон ёткса ули тяфтама зависимость:

колмужексть сяда оцю ширенц каршеса ащи сяда оцю ужесь, и, меклангт, колмужексть сяда оцю уженц каршеса ащи сяда оцю ширесь: кда $AC > BC$, эста $B\angle > A\angle$; кда $B\angle > A\angle$, эста $AC > BC$.

Тяда вяре азф терематне аф ладсихть определённай лувксонь зависимость колмужекстъ ширензон и мархтост сотф элементтнень ёткса — серьть, ширетнень проекцияснон, медианать и ст. тов, а станя жа колмужекстъ ширензон и сонь уженьзон ёткса.

Сяда алула азф теорематне пяшкедькшесазь тя аф сатыксть и синь тиеньдихть колмужекстъ китьксонь элементонзон ёткса лувксонь зависимость. Колмужекстъ ширензон и уженьзон ёткса лувксонь зависимостьсь ванондови математикань курсть стамка отделсонза — тригонометрияса.

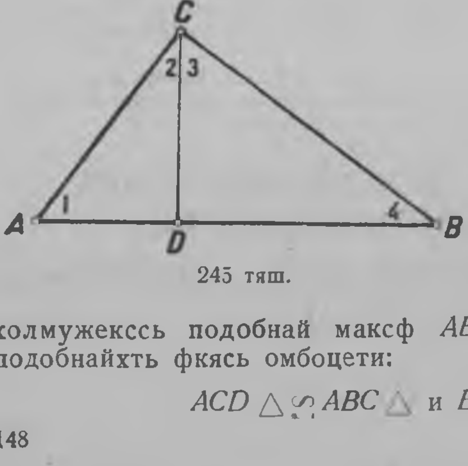
2 §. Видеужень колмужекстъ элементонзон ёткса метрическай соотношениясь.

1. ***Теорема.*** **Колмужекстъ виде уженц пряста гипотенузать лангс ётафтф серьсь явсы колмужекстъ кафта стама колмужексова, конат подобнайхть эсь ётковаст и подобнайхть максф колмужексти.**

Максф: $ABC\triangle$; $ACB\angle = d$; $CD \perp AB$ (245 тяш.).

Эряви няфтемс: $ADC\triangle \backsim BDC\triangle \backsim ABC\triangle$.

Няфтемац. Ванцаськ видеужень колмужекснень:



245 тяш.

1) $ACD\triangle$ и $ABC\triangle$. Синь 1$\angle$ — марстонь, лисеньди синь ровнауженнет, а сяс синь подобнайхть: $ACD\triangle \backsim ABC\triangle$.

2) $BDC\triangle$ и $ABC\triangle$. Синь 4$\angle$ — марстонь, лисеньди, синь ровнауженнет, а сяс синь подобнайхть: $BDC\triangle \backsim ABC\triangle$.

3) $ADC\triangle$ и $BDC\triangle$. Нят колмужекснень эзда эрь колмужекссь подобнай максф ABC колмужексти, а сяс сингя подобнайхть фкясь омбоцети:

$$ACD\triangle \backsim ABC\triangle \text{ и } BDC\triangle \backsim ABC\triangle.$$

Сяс лисеньди, $ACD\triangle \sim BDC\triangle$.

2. ***Теорема.*** **Видеужеть пряста гипотенузать лангс ётафтф серьсь ули средняй пропорциональнай катеттнень гипотенузать лангс проекциянон ёткса.**

Максф: $\underline{ABC\triangle;\ ACB\angle = d;\ CD \perp AB}$ (245 тяш.).

Эряви няфтемс: $AD:CD = CD:DB$.

Няфтемац. $ACD\triangle$ и $BDC\triangle$ подобияснон эзда лисеньди, синь сходственнай ширеснон пропорциональностьсна, лиякс мярьгемс $\frac{AD}{CD}=\frac{CD}{DB}$, или $CD^2 = AD\cdot DB$, коста $CD=\sqrt{AD\cdot DB}$ тяконь шовор кода тяса, станя и сяда меле сявеньдьсазь коряньть аньцек арифметическай значениянц, сяс мес мяльса кирьдьсазь керфксть аньцек кувалмонц, а аф сонь направлениянц.

3. ***Теорема.*** **Эрь катетсь ули средняй пропорциональнай гипотенузать и гипотенузать лангс тя катетть проекциянц ёткса.**

Няфтемац. 1) $ACD\triangle$ и $ABC\triangle$ подобияснон эзда (245 тяш.) лисеньди, што $AB:AC = AC:AD$, или $AC^2 = AD\cdot AD$, коста $AC=\sqrt{AB\cdot AD}$.

2) $CDB\triangle$ и $ABC\triangle$ подобияснон эзда лисеньди: $AB:CB = CB:DB$, или $CB^2 = AB\cdot DB$, коста $CB=\sqrt{AB\cdot DB}$.

Следствия. **Катеттнень квадратсна эсь ётковаст относятся кода гипотенузать лангс синь проекциясна.**

Афкукс: $AC^2 = AB\cdot AD$ и $CB^2 = AB\cdot DB$. Фкя равенствать башка членонь-член омбоцеть лангс явомать эзда лиси:

$$\frac{AC^2}{CB^2}=\frac{AB\cdot AD}{AB\cdot DB}=\frac{AD}{DB}.$$

4. ***Теорема (Пифагорть).*** **Гипотенузать квадратоц ровна катеттнень квадратснон суммасонды.**

Максф: $\underline{ABC\triangle;\ C\angle = d.}$

Эряви няфтемс: $AC^2 + CB^2 = AB^2$.

Няфтемац (колмоцесь). 1) $AC^2 = AB\cdot AD$ и 2) $CB^2 = AD\cdot DB$.

Кда нят равенстватнень прибавсемс башка членонь-член, лиси: $AC^2 + CB^2 = AB\cdot AD + AB\cdot DB = AB\ (AD + DB)$, но $AD + DB = AB$, а сяс $AC^2 + CB^2 = AB\cdot AB = AB^2$.

Кда видеужень колмужекстть ширензон кувалмоснон тяштемс соответствена a, b и c букваса, эста максф теоремать нюрхкяняста сёрмадкшесазь: $a^2 + b^2 = c^2$ и пяшксеста морафнесазь станя:

Сят лувкснень квадратснон суммасна, конат няфнесазь катеттнень кувалмоснон, ровна ся лувксть квадратонцты, кона няфнесы гипотенузать кувалмонц.

Следствиясь. **Катетть квадратоц ровна гипотенузать и омбоце катетть квадратснон разностьсонды.**

$a^2+b^2=c^2$, коста $a^2=c^2-b^2$, или $a=\sqrt{c^2-b^2}$ и $b^2=c^2-a^2$, или$b=\sqrt{c^2-a^2}$.

5. ***Теорема** (*мекланговь*).* **Кда колмужекстъ a, b и c ширензон ёткса ули $a^2+b^2=c^2$ зависимость, эста колмужекссь видеужень.**

Максф: a, b и c—колмужекстъ ширенза и $a^2+b^2=c^2$.

Эряви няфтемс: колмужекссь видеужень.

Няфтемац. Тихтяма видеужень колмужекс, конань катетонза a и b, сонь гипотенузанц тяштьсаськ m букваса. Эста Пифагоронь теоремать коряс $a^2+b^2=m^2$. Кда тя равенствать серьстасаськ максф $a^2+b^2=c^2$ равенствать мархта, минь няйсаськ, што $c^2=m^2$, или $c=m$. Лисеньди, што максф колмужекссь и видеужень колмужекссь ровнат колма ширетнень колга, а сяс максф колмужекссь — видеужень.

6. Ванондф теоремась и тейнза мекланговнесь арси геометрияса сембеда эрявикс теоремакс; сонь лувондсазь греческай философти Пифагорти, сяс тейнза мярьгихть „Пифагорть теоремац“. Муф, што видеужень колмужекстъ ширензон ёткса лувксонь зависимостьть, конань няфнесы максф теоремась, содазь нингя египтянатне, Пифагорть тонафтынза. 3, 4 и 5 шире мархта видеужень колмужексти, мярьгихть египетскай колмужекс. Пяк кунардонь пингста модань ункстайхне видеужет тиеньдькшесть тяфтама приёмонь вельде: пикскять кувалмос ровна ёткопь кадозь содонкшезь сонь пензон и кувалгапнезь сонь модать ланга пяльня вельде 3, 4 и 5 явкс мархта колмужексокс и эста лисеньдсь сят ширетнень ёткс виде уже, конат ульсть 3 и 4 явкс мархта.

Видеужень колмужексненьди, конатнень ширеснон унксснесазь целай лувксса, мярьгихть пифагоронь колмужекст, а эстейст лувксненьди—пифагоронь лувкст. Тяфта 3, 4 и 5; 5, 12 и 13; 6, 8 и 10; 7, 24 и 25; 8, 15 и 17; 9, 12 и 15; 10, 24 и 26; и ст. тов — пифагоронь лувкст.

3 §. Кичкоружень колмужекстъ элементонзон ёткса метрическай зависимостьсь.

1. ***Теорема.*** **Колмужекстъ оржа уженц каршеса ащи ширеть квадратоц сяда ёмла кафта лият ширетнень квадратснон суммаснон коряс снярода, мзяра ули нят ширетнень эзда фкять и сонь лангозонза омбоцеть проекциянц кафтонзаф произведениянзон эса.**

Максф: $ABC\triangle$; $A\angle$ — оржа; m-сь b-ть лангс c-ть проекцияц (246 тяш.).

Эряви няфтемс: $a^2=b^2+c^2-2bm$.

Нифтемац. *B* ужеть прянц эзда тяштьтяма серь $BD = h$; тиевихть кафта видеужень колмужекст: ADB и BDC; $AD = m$ ули AC ширеть лангс AB ширеть проекцияц.

$BDC \triangle$ эзда ули:

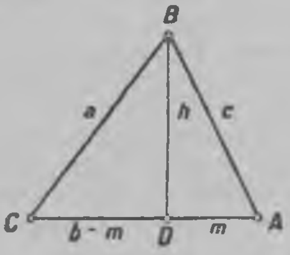
$$a^2 = h^2 + (b - m)^2. \quad (1)$$

$ADB \triangle$ эзда ули:

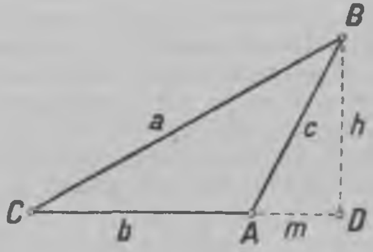
$$h^2 = c^2 - m^2. \quad (2)$$

(1) и (2) равенстватнень башка членонь-член прибавсемда меле тихтяма эрявикс преобразованият; фкя-фкянь меле лиси:

$$a^2 + h^2 = h^2 + (b - m)^2 + c^2 - m^2; \; a^2 = (b - m)^2 + c^2 - m^2;$$
$$a^2 = b^2 - 2bm + m^2 + c^2 - m^2, \text{ или } a^2 = b^2 + c^2 - 2bm.$$



246 тяш.



247 тяш.

2. ***Теорема.*** **Колмужексть ношка уженц каршеса ащи ширеть квадратоц сяда оцю лият кафта ширетнень квадратснон суммаснон коряс снярода, мзяра ули нят ширетнень эзда фкfive и сонь кувалгафтфонц лангс омбоце ширеть проекциянц кафтонзаф произведенияснон эса.**

Максф: $ABC\triangle$, $A\angle$ — ношка; m-сь ули b-ть лангс c-ть проекцияц (247 тяш.).

Эряви няфтемс: $a^2 = b^2 + c^2 + 2bm$.

Нифтемац. *B* вершинать эзда *AC* основаниять кувалгафтф пенц лангс тяштьтяма серь $BD = h$, лисихть кафта видеужень колмужекст: CBD и ADB; $AD = m$ — ули AC ширеть кувалгафтф пенц лангс AB ширеть проекцияц; $CD = b + m$.

$CDB \triangle$ эзда ули: (1)

$$a^2 = h^2 + (b + m)^2.$$

$ADB \triangle$ эзда ули:

$$h^2 = c^2 - m^2. \quad (2)$$

(1) и (2) равенстватнень членонь-член прибавсемда меле тихтяма эрявикс преобразованият; фкя-фкянь меле лиси:

$$a^2 + h^2 = h^2 + (b + m)^2 + c^2 - m^2;$$
$$a^2 = (b + m)^2 + c^2 - m^2;$$
$$a^2 = b^2 + 2bm + m^2 + c^2 - m^2,$$
$$\text{или} \quad a^2 = b^2 + c^2 + 2bm.$$

3. Кда серьстасаськ оржа ужеть каршеса ащи ширеть квадратонц формулать *ношка ужеть каршеса ащи ширеть* квадратонц формулать мархта, няйсаськ, што синь аф фкя-фкянь кодямот аньцек мекпяльдень членснон коряс. Кафцьке формулатнень ули кода поладомс фкас, эста лиси:

$$a^2 = b^2 + c^2 \pm 2\,bm,$$

коса m-сь ули c ширеть проекцияц b ширеть или сонь кувалгафтф пенц лангс; сявема знак сявеньдихть, мзярда вешеньдеви ширесь ащи оржа ужеть каршеса, и прибавама знак — мзярда сон ащи ношка ужеть каршеса.

4. Кда оржужень ABC колмужекстть эса (246 тяш.) карматама AB ширеть шарфтома частонь стрелкатнень шаромаснон коряс B точкать перьф, эста $A\angle$ кармай касома, а $AC = b$ ширеть лангс $AB = c$ ширеть m проекцияц кармай ёмлалгадома; мзярда $A\angle$ арай видеужекс, эста проекциясь арай точкакс и ули ровна нульти, и минь лиси пифагорть теоремац.

Афкукс, $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bm$; мзярда $m = 0$ ули: $a^2 = b^2 + c^2$.

Кда жа ношкужень ABC колмужекстть эса (247 тяш.) карматама BA ширеть шарфтома A точкать перьф частонь стрелкать шароманц каршес, эста и $A\angle$ и $AB = c$ ширеть m проекцияц кармайхть ёмлалгадома; и мзярда $A\angle$ арай видеужекс, эста m проекциясь арай точкакс, и ули ровна нульти, и лиси Пифагорть теоремац $a^2 = b^2 + c^2$. Тяфтаня, Пифагорть теоремац ули кафта мекпяльдень теорематнень частнай случайсна.

5. Пифагорть теореманц и кафта мекпяльдень теорематнень вельде ули кода колмужекстть максф ширензон колга мумс сонь ужензон лангс ванозь видонц.

Кда ABC колмужекстть эса сонь оцю щирец a и

1) $a^2 < b^2 + c^2$, эста колмужекссь оржужень;

2) $a^2 = b^2 + c^2$, эста колмужекссь видеужень;

3) $a^2 > b^2 + c^2$, эста колмужекссь ношкужень.

Эрь башка случайста саты серьстамс оцю ширеть квадратонц кафта лия ширетнень квадратснон суммаснон мархта.

6. Задача. *Мумс колмужекстть видонц, конань ширенза 13 см, 9 см и 4 см кувалмоса.*

Лувомац. $13^2 > 9^2 + 4^2$, сяс эряви арьсемс, што максф колмужекссь — ношкужень.

Но задачаса максфнень коряс колмужекс аф тиеви, сяс мес аф ванфтови колмужексонь тиемс эрявикс условиясь, кона веши, штоба сяда оцю ширесь улель сяда ёмла сонь кафта лият ширензон суммаснон коряс; максф задачаса $13 = 9 + 4$, лиякс мярьгемс сяда оцю ширесь ровна кафта лият ширетнень суммасонды, конаньди улемс аш кода.

Максф задачать ванондомста няеви, што ширензон коряс колмужекстть видонц колга арьсемада ингеле эряви варжамс тиеви ли задачаса максфнень коряс колмужекссь.

Тяфтаня, $13^2 > 9^2 + 4^2$ условиясь стама условия, конафтома ношка ужень колмужекст аф уленьдихть, но сонаф саты.

Кафцьке $a^2 > b^2 + c^2$ и $a < b + c$ условиятне марса сатыхть сяньди, штоба азомс, што колмужекссь ношкужень.

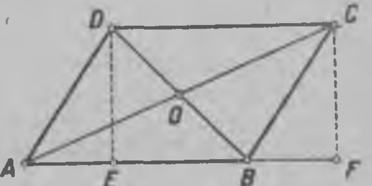
4 §. Параллелограмать диагоналенц и ширенц ёткса зависимостьсь.

Теорема. **Параллелограммать диагоналензон квадратснон суммасна ровна сонь ширензон квадратснон суммасонды.**

Максф: $ABCD$ — параллелограма; $AB \parallel CD$ и $AD \parallel BC$ (248 тяш.).

Эряви няфтемс: $AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$.

Няфтемац. $ABCD$ параллелограмать B и C прянзон эзда тяштьтяма DE и CE серьхть; лисихть видеужень DAE и CBE колмужекст; нят колмужексне ровнат, сяс мес $DA = CB$ и $A \angle = CBF \angle$, а сяс $AF = BF$.



248 тяш.

$ABC \triangle$ эзда ули:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2\,AB \cdot BF. \quad (1)$$

$ABD \triangle$ эзда ули:

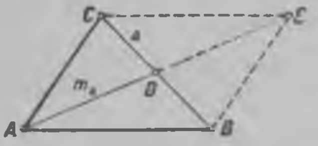
$$BD^2 = DA^2 + AB^2 - 2AB \cdot AE. \quad (2)$$

Кда мекпяльдень равенстват эса DA^2 полафтомс BC^2-са и AE полафтомс BF-са и тяда меле прибавамс башка членонь член кафцьке равенстватнень, лиси:

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2AB^2 + 2BC^2.$$

5 §. Колмужекстть медиананц и серьнц лувомасна.

1-це задачась. *Лувомс колмужекстть* m_a *медиананц сонь колма ширензон коряс*: a, b и c (249 тяш.).



249 тяш.

Тиемац. ABC колмужекстть эса тяштьтяма $AD = m_a$ медиана; сонь кувалгафтф пенц кувалмос ункстатама $DE = AD$ и E точкать поладсаськ B и C точкатнень мархта, лиси $ABEC$ параллелограма, конань ширенза ровнат b и c, а BC диагоналец $= a$ и AE диагоналец $= 2\,m_a$.

Параллелограмать диагоналензон и ширензон ёткса зависимостьть эзда ули:

$$(2\,m_a)^2 + a^2 = b^3 + b^2 + c^2 + c^2,$$

или $4m_a^2 + a^3 = 2\,b^2 + 2\,c^2$, или $4m_a = 2b^2 + 2c^2 - a^2$, коста

$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}, \text{ или } m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2\,b^2 + 2\,c^2 - a^2}.$$

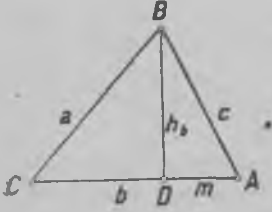
Тянь лаца (аналогична):

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2c^2 + 2a^2 - b^2} \text{ и } m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}.$$

2-це задачась. *Лувомс колмужекстъ h_b серьнц сонь колма a, b и c ширензон коряс* (250 тяш.).

Тиемац. Колмужекстъ B прястонза тяштьсаськ сонь $BD = h_b$ серьнц и AD-ть тяштьсаськ m букваса.

$ABD \triangle$ эзда ули:



250 тяш.

$$h_b^2 = c^2 - m^2. \qquad (1)$$

m-ть эряви полафтомс выражениякса, конань эса улихть a, b и c — колмужекстъ ширенза. $ABC \triangle$ эзда ули:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bm,$$

коста мусаськ:

$$m = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}. \qquad (2)$$

m-ть муф значениянц (2) путсаськ (1) равенствати, лиси:

$$h_b^2 = c^2 - \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{(2b)^2}, \text{ или } h_b^2 = \frac{(2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{(2b)^2}. \qquad (3)$$

Кда дробть (3) числителенц срафтсаськ ламокстай лувксова, лиси:

$$h_b^2 = \frac{(2bc + b^2 + c^2 - a^2) \cdot (2bc - b^2 - c^2 + a^2)}{(2b)^2}$$

или

$$h_b^2 = \frac{[(b + c)^2 - a^2] \cdot [a^2 - (b - c)^2]}{(2b)^2}.$$

Кда тяда меле квадратнай скобкатнень потмоса ащи эрь выражениять срафтсаськ ламокстай лувксова, лиси:

$$h_b^2 = \frac{(b + c + a)\,(b + c - a)\,(a + b - c)\,(a + c - b)}{4b^2}. \qquad (4)$$

Колмужекстъ периметранц тяштьсаськ $2p$ букваса, лиякс мярьгемс $a + b + c = 2p$, эста:

$$\left.\begin{aligned} b + c &= 2p - a, & b + c - a &= 2p - a - a = 2(p - a); \\ a + b &= 2p - c, & a + b - c &= 2p - c - c = 2(p - c); \\ a + c &= 2p - b, & a + c - b &= 2p - b - b = 2(p - b). \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Кда (4) равенствать эса ламокстай лувкснень полафтсаськ лисьф (5) выраженияса, ули:

$$h_b^2 = \frac{2p \cdot 2\,(p - a) \cdot 2(p - b) \cdot 2(p - c)}{4b^2}.$$

коста:

$$h_b=\frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \qquad (6)$$

Тянь h_c и h_a лаца ули:

$$h_c=\frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

$$h_a=\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Лядонды нингя няфтемс, што $p-a$, $p-b$, $p-c$ ламокстай лувкснень эзда фкявок аф ули отрицательнай, сяс мес лиякс h-сь улель ба мнимай лувкс.

Всякай колмужексса сонь ширец сяда ёмла кафта лият ширензон суммаснон коряс, а сяс $a<b+c$. Кда аф равенствать кафцьке пяльксонзонды прибавамс a-нь, ули: $2a<a+b+c$, или $2a<2p$, коста $a<p$, и сяс $p-a$ лувкссь положительнай; станя жа $p-b$ и $p-c$ лувксне положительнайхть; лисеньди, коряньть алда выражениясь — положительнай лувкс.

6 §. Кода мушендсазь колмужекстть площаденц сонь колма ширензон колга. Геронть формулац.

Задача. *Мумс $ABC\triangle$ площаденц сонь колма a, b и c ширензон коряс.*

Тиемац. $S\triangle=\frac{1}{2}a\cdot h_a$, но $h_a=\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, коса p—колмужекстть пялепериметрац, сяс:

$$S\triangle=\frac{1}{2}a\cdot\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

кирьфтамда меле лиси:

$$\boxed{S\triangle=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}\ \text{кв. единицат.}$$

Тя формулати мярьгихть Александрияста греческай Герон математикть лемса — Геронть формулац.

Кизефкст и упражненият.

1. Тиеви ли видеужень колмужекс, кда содасаськ: а) аньцек сонь гипотенузанц кувалмонц, б) аньцек керфкснень, конат тиевихть гипотенузать эзда сонь лангозонза видеужеть пряста ётафтф серьть вельде?

2. Кодама ули колмужекссь сонь ужензон коряс, кда сонь ширенза 4 *см*, 5 *см*, 6 *см* кувалмоса? 10 *см*, 6 *см*, 4 *см* кувалмоса?

3. Видеужень колмужекстть эса h_c серец ровна 8,0 *см* и фкя катетть, гипотенузать лангс проекцияц ровна 6,0 *см*. Мумс колмужекстть ширензон.

4. Кафта 3,2 *кг* и 2,4 *кг* вийхне путфт фкя точкас и молихть фкя-фкянь мархта видеужень тиезь. Мумс синь равнодействующай величинаснон.

5. Колмужекстть ширенза ровнат 8 *см*, 10 *см* и 11 *см*. Лувомс сонь медиананзон и серьнзон.

XVIII. КРУГТЬ ЭСА ПРОПОРЦИОНАЛЬНАЙ КЕРФКСНЕ.

1 §. Окружностьть точканц эзда диаметранц лангс ётафтф перпендикулярть свойствац.

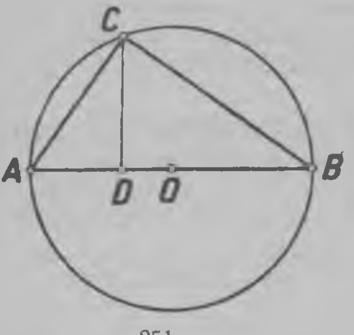
1. *Теорема.* **Окружностьть кодамовок точканц эзда диаметрать лангс ётафтф перпендикулярсь ули средняй пропорциональнай диаметрать керфксонзон ёткса, а кафта хордатнень эзда эрь хордась, конат хордатне тя точкать поладсазь диаметрать пензон мархта, ули средняй пропорциональнай диаметрать и сонь лангозонза хордать проекциянц ёткса.**

Максф: AB — диаметра; $CD \perp AB$; AC и CB — хордат (251 тяш.).

Эряви няфтемс: 1) $\frac{AD}{CD}=\frac{CD}{DB}$; 2) $\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{AD}$; 3) $\frac{AB}{CB}=\frac{CB}{DB}$.

Нябтемац. ABC колмужекссь — видеужень, сяс мес $C\angle$ нежеди диаметрать лангс; CD — сонь серец, AD и DB — хордатнень (катеттнень) диаметрать (гипотенузать) лангс проекциясна, сяс:

$$1)\ \frac{AD}{CD}=\frac{CD}{DB};\ 2)\ \frac{AB}{AC}=\frac{AC}{AD};\ 3)\ \frac{AB}{CB}=\frac{CB}{BD}.$$



251 тяш.

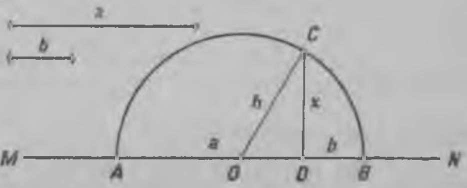
2. **1-це задачась.** *Тиемс x керфкс— —средняй пропорциональнай максф кафта a и b керфкснень ёткса* (252 тяш.).

Тиемац. MN виде китькстъ кувалмос кодамовок точкаста ункстатама фкя-фкянь меле $AD=a$ керфкс и $DB=b$ керфкс. AB сявсаськ диаметракс, тяштьтяма пялеокружность и D точкаста AB-ти перпендикуляр окружностьть туркс C точкава ётамс, эста $CD=x$ ули вешеньди керфкссь.

Афкукс, $a:x=x:b$, *или* $x^2=ab$, *и* $x=\sqrt{ab}$.

2-це задачась. *Нябтемс, што кафта аф ровна a и b лувкснень средняй арифметическайсна сяда оцю сякот жа лувкснень средняй геометрическайснон коряс.*

Тиемац. Катк кафта аф ровна AB и DB керфксне соответствуют a и b лувксненьди (252 тяш.). Тисаськ a и b лувкснень средняй геометрическайснон, $CD=\sqrt{ab}$.



252 тяш.

a и b лувкснень средняй арифметическайсна, лиякс мярьгемс, $\frac{a+b}{2}$ ровна, кода няеви тяштьксста, $\frac{AD+BD}{2}=AO=r$. Сяс лисеньди, $\frac{a+b}{2}=r$. Но CO-сь станя жа ровна r-ти. Видеужень COD колмужекстъ эзда лисеньди, што $CO>CD$, $CO=\frac{a+b}{2}$ и,

$$CD=\sqrt{ab}, \text{ а сяс } \frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}, \text{ лиякс мярьгемс,}$$

кафта аф ровна лувкснень средняй арифметическайсна сяда оцю сякот жа лувкснень средняй геометрическайснон коряс.

Кда $b=a$, эста и $CD=CO$, сяс мес эста $\frac{a+a}{2}=\sqrt{aa}$ или $a=a$.

2 §. Фкя-фкянь туркс ётай хордатнень керфксснон свойствасна.

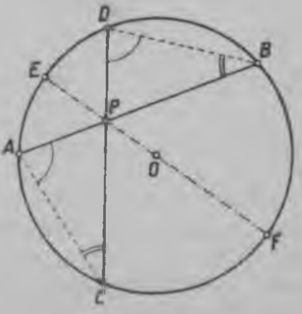
Теорема. **Кда максф окружностьть кафта или сяда лама фкя точкаса фкя-фкянь туркс ётай хорданза, эста всякай хордать керфксонзон произведениясна ули величинась постояннай, кона ровна сяка жа точкать ланга ётай окружностьть диаметранц керфксонзон произведениясонды.**

Максф: AB и CD — хордат; EF — диаметра; P — синь фкя-фкянь туркс ётама точкасна (253 тяш.).

Эряви няфтемс: $PA\cdot PB=PC\cdot PD=PE\cdot PF$.

Няфтемац. Тяштьтяма лезды AC и BD хордат, лисихть кафта APC и BPD колмужекст; синь ровнауженнет; $A\angle=D\angle$ и $C\angle=B\angle$ кода потму тяштьф ужет, конатнень унксnесазь фкя дугаса. Сяс лисеньди, колмужексне подобнайхть; синь подобияснон эзда лисеньди:

$$PA:PC=PD:PB,$$
$$\text{или } PA\cdot PB=PC\cdot PD.$$



253 тяш.

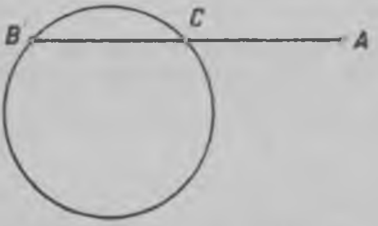
AB хордать и EF диаметрать кода фкя-фкянь туркс ётай кафта хордань ванондомста, няфтьфть коряс ули:

$$PA\cdot PB=PE\cdot PF.$$

Тяфта жа уленьди P точкать ланга ётай кодама повсь хордать мархта, а сяс максф окружностьть эрь хорданц, конат хордатне ётнихть фкя-фкянь туркс сяка жа точкава, керфксонзон произведениясна ули величинась постояннай, сон ровна сяка жа точкать ланга ётай максф окружностьть диаметранц керфксонзон произведениясонды.

3 §. Кругть эзда башка фкя-фкянь туркс ётай керы китькснень свойствасна.

1. Ушестонь A точкать эзда ётафтф AB керы китькс (154 тяш.). Керы китьксть пяльксоц, кона ащи окружностьть потмоса, ули BC хордась; сонь окружностьть омба бокс ушестонь максф A точкати молемс кувалгафтф CA пенцты мярьгихть керы китьксть ушестонь пяльксоц. Кафцьке $BC+CA=AB$ керфкснень суммасон сявеньдсазь керы китьксть кувалмокс.

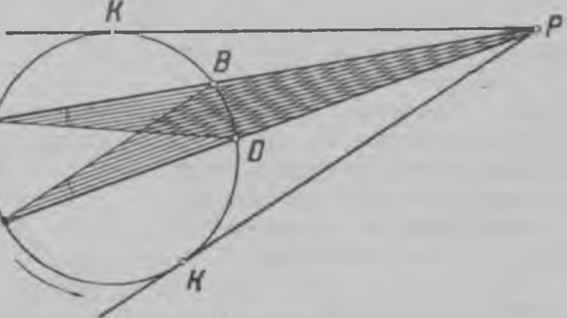


254 тяш.

2. *Теорема.* **Кда кругть эзда башка ащи фкя точкаста ётафтф керы китькс и токай китькс, эста эрь марнек керы китьксть сонь ушестонь пяльксонц лангс произведениясь ули постояннай величина и ровна токай китьксть квадратонцты.**

Максф: PA и PC — керы китькст; PK — токай китькс; P — синь фкя-фкянь туркс ётама точкасна (255 тяш.).

Эряви няфтемс: $PA\cdot PB=PC\cdot PD=PK^2$.



255 тяш.

Няфтемац. PA и PC керы китькст, PB и PD — синь ушестонь пялькссна. Тяштьтяма лезды AD и BC хордат, лисихть кафта ADP и CBP колмужекст. Нят колмужекснень улихть кафтонь соответственна ровна ужесна, $A\angle$ и $C\angle$ — потму тяштьф ужет, конатнень унксесазь фкя и сяка жа BD дугать пялесонза, и $P\angle$ — марстонь, сяс лисеньди синь ровнауженнет, а сяс подобнайхть. Синь подобияснон эзда лисеньди:

$$\frac{PA}{PD}=\frac{PC}{PB}, \text{ или } PA\cdot PB=PC\cdot PD.$$

Кда PC керы китьксть шарфтомс P точкать перьф станя, штоба сон араль PK токай китьксть вастс, эста керы китьксть и окружностьть фкя-фкянь туркс ётама C и D точкатне кармайхть малакстомма фкя-фкяньди, PC керы китькссь кармай ёмлалгадома и сонь ушестонь PD пялькcоц кармай касома; токама K точкать эса и керы китькcть и сонь ушестонь пялькcонза улихть ровнат PK токай китькcти, а сяс кда $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ равенствать эзда PC и PD керфкснень эзда эрь керфкcть полафтсаськ PK керфксса, лиси:

$$PA \cdot PB = PK \cdot PK, \text{ или } PA \cdot PB = PK^2.$$

Тяфта:

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD = PK^2.$$

Сяка жа уленьди P точкать эзда ётафтф всякай керы китькcть мархта, сяс керы китькcть сонь ушестонь пялькcонц лангс произведениясь максф кругть эзда ушестонь фкя точкаста тяштьф сембе керы китькcненьди ули постояннай величинась и ровна сяка жа точкаста тяштьф токай китькcть квадратонцты.

3. ***Следствия.*** **Кда кругть эзда башка ащи фкя точкаста ётафтфт токай китькс и керы китькс, эста токай китькссь ули марнек керы китькcть и сонь ушестонь пялькcонц ёткста средняй пропорциональнай.**

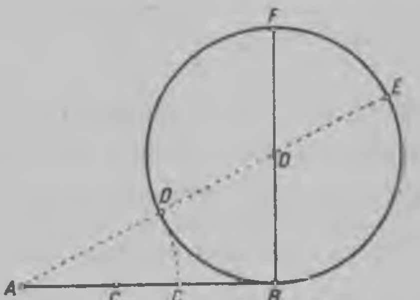
Афкукс, $PA \cdot PB = PK^2$, сяс лисеньди $PA : PK = PK : PB$.

4 §. Крайстонь и средняй отношениява керфкснень явомасна.

1. *Явомс керфкcть крайстонь и средняй отношениява — значит мумс керфкcть точканц, конань эса сон явови кафта пялькcова станя, што сяда оцю пялькссь, ули сембе керфкcть и сонь сяда ёмла пялькcонц ёткса средняй пропорциональнай.*

2. **Задача.** *Явомс максф керфкcть крайстонь и средняй отношениява.*

Тиемац. $AB = a$ — максф керфкссь. Катк C точкась ули вешеньдеви точкась (256 тяш.). Сяда оцю AC пялькcть тяштьсаськ x-са, эста сяда ёмла пялькссь $CB = a - x$. Задачать условиянц коряс:



256 тяш.

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}, \text{ или } x^2 = a(a-x), \text{ или } x^2 = a^2 - ax.$$

Сёрмадсаськ оду тя равенствать тяфтаня: $a^2 = x^2 + ax$, коста $a^2 = x(a+x)$.

Сявсаськ $AB=a$ кодамовок окружностеньди токай китькcокс, $a+x$ — керы китькcокс и x — сонь ушестонь пялькcокс; тяда башка сявсаськ, што керы китькссь ётай центрать ланга, эста a-сь ули окружностьть диаметрац.

Тиемац. Кда $AB = a$ сявсаськ токай китьксокс и B точкать токама точкакс, B точкать эзда тяштьтяма AB-ти перпендикуляр и ункстатама сонь кувалмованза BF керфкс, кона ровна a-ти — окружностьть диаметранцты. Явсаськ BF кучкава, мусаськ O центрать и OB-ти ровна радиусса тяштьтяма окружность, тяда меле O центрать ланга тяштьтяма AE керы китькс, эста керы китькстъ ушестонь AD пяльксоц ровна x-ти. AB кувалмос ункстатама керфкс $AB = AD$, лиси AB керфксть лангса вешеньдеви C точкась, кона явсы сонь крайстонь и средняй отношениява.

Афкукс, $AE \cdot AD = AB^2$. Но $AE = a + x$, $AD = x$ и $AB = a$, а сяс $(a + x)\ x = a^2$, или $ax + x^2 = a^2$, коста $x^2 = a^2 - ax = a(a - x)$, лиякс мярьгемс, $a : x = x : (a - x)$.

Кда тиемс лезды окружность, кона токай AB керфксти сонь омбоце A песонза, эста AB керфксть лангса ули нингя фкя C_1 точка, кона максф AB керфксть явсы крайстонь и средняй отношениява.

Тяфта AB керфксть лангса улихть кафта точкат, конат сонь явсазь крайстонь и средняй отношениява. Нят C и C_1 точкатне AB керфксть кучканц колга ащихть симметричнайста. Сяда вяре лисьф $a^2 = x^2 + ax$ равенствать ули кода сёрмадомс тяфтаня: $x^2 = ax - a^2 = 0$; тя уравneniять x-ть колга тиеманц вельде, лиси $x_{1;2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}$. Ёрдасаськ уравнениять отрицательнай коряненц, сяс мес минь ванондсаськ x керфксть аньцек кувалмонц, а аф сонь направлениянц, минь ули:

$$x_{1;2} = -\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}, \quad \text{или} \quad x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} - \frac{a}{2};$$

лисеньди, што x керфкссь ули видеужень колмужекстъ (ABO колмужекстъ), конань катетонза $\frac{a}{2}$ и a, гипотенузанц и максф a керфксть (OD керфксть) пяленц ёткса разностьсь, лиякс мярьгемс, $x = AO - OD = AD = AC$ (256 тяш.).

Кда x-ти муф выражениять ладясаськ лиякс, лиси:

$$x = \frac{a}{2}\sqrt{5} - \frac{a}{2} = a \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{2},$$

или $x \approx 0{,}62a$. Значит, $AC : CB \approx 5 : 3$.

Кизефкст и упражнeният.

1. Окружностьть диаметрац P точкаса явови 4 *см* и 9 *см* кувалмоса пяльксова. Мес сяка жа точкать ланга аш кода ётафтомс стама хорда, конань пяльксонц эзда фкясь улель ба 3 *см* кувалмоса?

2. Кафта фкя-фкянь туркс ётай хордатнень эзда фкять керфксонза ровнат 6 *см* и 25 *см*; омбоце хордать керфксонзон отношениясна ровнат 1 : 2. Мумс омбоце хордать кувалмонц.

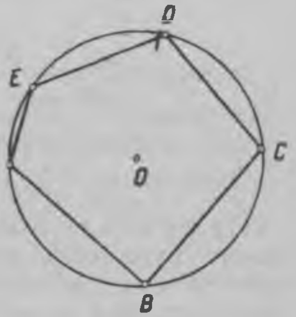
3. Хордать кувалмоц 5 *см*. Мзярода эряви сонь кувалгафтомс, штоба кувалгафтф керфксть песта ётафтф токай китьксcь улель ровна 6 *см*?

4. *R* радиус мархта кругса ётафтф хорда, кона перпендикулярнай радиусти и ётай сонь кучканц ланга. Мумс хордать кувалмонц и мумс окружностьть конашка пяльксоц ули дугась, конань кемекснесы хордась.

XIX. ПОТМУ И ПЕРЬФ ТЯШТЬФ ЛАМУЖЕКСТ.

1 §. Потму и перьф тяштьф колмужексне.

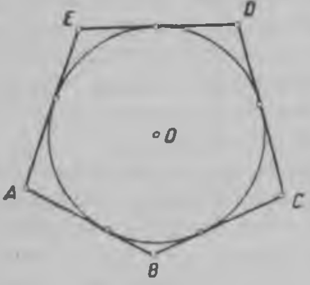
1. *Ся ламужексти, конань сембе прянза ащихть окружностьть ланга, мярьгихть потму тяштьф ламужекс,* эстейнза окружностьти мярьгихть перьф тяштьф. *ABCDE* —потму тяштьф ветеужекс (257 тяш.). Сонь ширенза — *AB*, *BC*, *CD*...— максф окружностьть хорданза.



257 тяш.

Ся ламужексти, конань сембе ширенза токайхть окружностьти, мярьгихть перьф тяштьф ламужекс, эстейнза окружностьти мярьгихть *потму тяштьф*. *ABCDE* — перьф тяштьф ветеужекс (258 тяш.). Сонь *AB*, *BC*, *CD*... ширенза — окружностьти токай китькст.

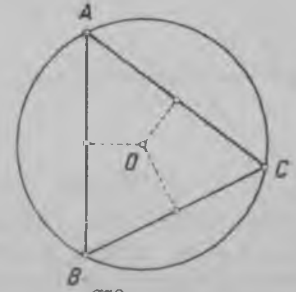
2. *Теорема.* **Колмужексть колма прянзон ланга ули кода ётафтомс окружность и аньцек фкя.**



258 тяш.

Колма *A*, *B* и *C* точкатнень ланга, *ABC* колмужексть прянзон ланга, конат аф ащихть фкя виде китькс лангса, ули кода ётафтомс окружность и аньцек фкя.

Перьф тяштьф окружностьть центрац ащи колмужексть кафта кодамовок ширензон кучкаснон ланга ётафтф перпендикулярхнень фкя-фкянь туркс ётама точкасост. Колмоце ширеть кучканц ланга ётафтф перпендикулярсь станя жа ётай перьф тяштьф окружностьть центранц ланга.



259 тяш.

Следствия. **Сят перпендикулярхне, конат ётафтфт колмужексть ширензонды синь кучкаснон ланга, ётайхть фкя-фкянь туркс фкя точкаса — перьф тяштьф окружностьть центраса.**

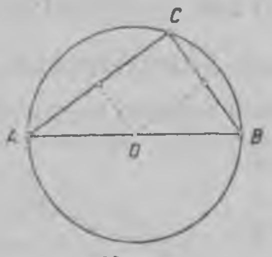
Перьф тяштьф окружностьть центрац ащи:

1) колмужексть потмоса, кда колмужекссь оржужень (259 тяш.).

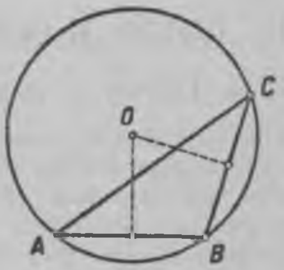
2) гипотенузать лангса, сонь кучканц эса, кда колмужекссь видеужень (260 тяш.);

3) колмужекстъ эзда башка, кда колмужекссь ношкужень (261 тяш.).

3. ***Теорема.*** **Всякай колмужекстъ потмос ули кода тяштемс окружность и аньцек фкя.**



260 тяш.

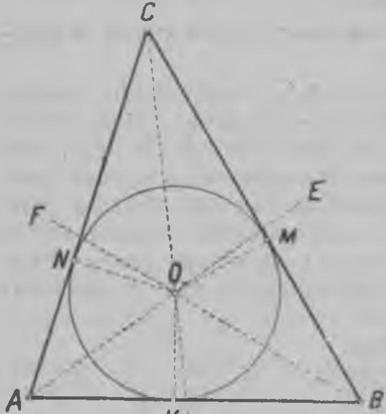


261 тяш.

Максф: $ABC\triangle$ (262 тяш.).

Эряви няфтемс: $ABC\triangle$ потмос ули кода тяштемс окружность и аньцек фкя.

Няфтемац. Колмужекстъ потмос тяштемс окружность — значит мумс сонь центранц и сонь радиусонц кувалмонц. ABC колмужекстъ ширенза арсихть вешеньдеви окружностьти токай китьксокс, фкя и сяка жа окружностьти токай китьксне ащихть центрать эзда сяшка расстоянияса, кона ровнат радиусти; сяс, штоба мумс потму тяштьф окружностьть центранц, эряви мумс стама точка, кона ащи ровнаста ичкезе колмужекстъ ширензон эзда.



262 тяш.

Колмужекстъ ширензон эзда ровнаста ичкезе ащи точкась ули колмужекстъ кодама кельк кафта биссектрисанзон фкя-фкянь туркс ётама O точкась; ся окружностьть центрац, кона тяштьф колмужекстъ потмос, ули O точкась; тя окружностьти радиусокс ули OK, OM или ON перпендикулярхнень эзда кона кельк перпендикулярсь, конат перпендикулярхне ётафтф центрать эзда колмужекстъ ширензонды. Колмужекстъ ширенза, конат перпендикулярхнайть OK, OM и ON радиусненьди и конат ётайхть синь K, M и N песнон ланга, конат ащихть окружностьть ланга, арсихть окружностьти токай китьксокс.

Сяка жа ABC колмужекстъ потмос омбоце окружность аф тяштеви, сяс мес сонь кафта ужень биссектрисанза ётайхть фкя-фкянь туркс аньцек фкя точкава.

O точкась, кода ровнаста ичкезе BC и AC ширетнень эзда, ащи C ужеть биссектрисанцка ланга.

4. Содаф, што O точкада башка улихть нингя колма точкат, конат ровнаста ичкезет колмужексть сембе колмицьке ширензон эзда и конат ащихть колмужексть эзда башка. Нят колма точкатне улихть центракс колма окружностьтненьди, конатнень эзда эрь окружностьсь токай колмужексть фкя ширенцты и кафта лия ширетнень кувалгафтфснонды. Тяфтама окружностьтненьди мярьгихть приписаннай окружностьть (215 тяш., 122 лопаш.).

Тяфта лисеньди, колмужексть коряс минь содатама: 1) фкя перьф тяштьф окружность, кона ётай колмужексть сембе колмицьке прянзон ланга, 2) фкя потму тяштьф окружность, кона токай колмужексть сембе колмицьке ширензонды, 3) колма приписаннай окружностьт.

2 §. Потму тяштьф нилеужексть ужензон свойствасна.

1. ***Теорема.*** **Потму тяштьф всякай нилеужексса каршек ащи ужетнень суммасна ровна кафта видеуженьди, лиякс мярьгемс, $2d$.**

Максф: $ABCD$ — потму тяштьф нилеужекс (263 тяш.).

Эряви няфтемс: $A\angle + C\angle = 2d$ и $B\angle + D\angle = 2d$.

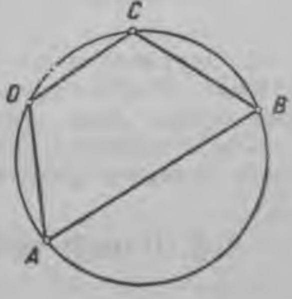
Няфтемац. $A\angle$ кода потму тяштьф, унксневи $\frac{DCB\smile}{2}$ вельде, $C\angle$ унксневи $\frac{BAD\smile}{2}$ вельде, сяс лисеньди, што A и C ужетнень суммасна унксневи $\frac{DCB\smile}{2} + \frac{BAD\smile}{2}$ вельде, или $\frac{DCB\smile + BAD\smile}{2}$ вельде, лиякс мярьгемс, окружностьть пялесонза, а сяс $A\angle + C\angle = 180°$, или $2d$.

Тяфта жа няфнекшесазь, што $B\angle + D\angle = 2d$.

2. ***Теорема (меклангонь).*** **Кда нилеужексть эса каршек ащи ужетнень суммасна ровна $2d$, эста сонь прянц ланга ули кода тяштемс окружность.**

Максф: $ABCD$ — нилеужекс (263 тяш.).
$A\angle + C\angle = 2d$ и $B\angle + D\angle = 2d$.

Эряви няфтемс: $ABCD$ нилеужексть A, B, C и D прянзон ланга ули кода ётафтомс окружность.



263 тяш.

Няфтемац. $ABCD$ нилеужексть колма A, B и C прянзон ланга ётафттама окружность. Няфтьсаськ, што тя окружностьсь ётай станя жа D прять ланга. Афкукс, кда путомс, што D точкась аф ащи окружностьть лангса, а ащи сонь эздонза башка или потмосонза, эста $D\angle$ аф ункстави ABC дугать пялесонза и, сяс, B и D ужетнень суммасна дяль уль ровна 180°, или $2d$, а тя моли условиять каршес, а сяс D точкати эряви улемс окружностьтка лангса, а тянь эзда лисеньди, што A, B и C точкатнень ланга ётай окружностьсь станя жа ётай и D точкать ланга.

$ABCD$ нилеужекссь — потму тяштьф нилеужекс.

3. Потму тяштьфокс ули кода улемс видеужексти, квадратти и равнобедреннай трапецияти, сяс мес нят нилеужекснень каршек ащи ужеснон суммасна ровна $2d$.

3 §. Перьф тяштьф нилеужексть ширензон свойствасна.

1. ***Теорема.*** **Перьф тяштьф нилеужексса кафта каршек ащи ширетнень суммасна ровна кафта лият ширетнень суммаснонды.**

Максф: $ABCD$ — перьф тяштьф нилеужекс (264 тяш.).

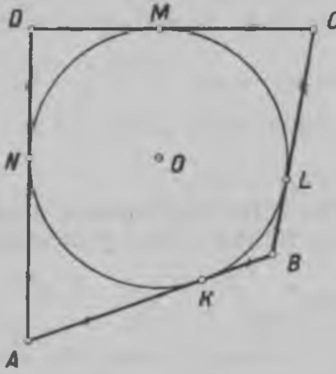
Эряви няфтемс: $AD + BC = AB + DC$.

Няфтемац. Перьф тяштьф нилеужексть ширенза арсихть окружностьти токси китькстокс. Окружностьть фкя точкаста тяштьф кафта токай китьксне ровнат, сяс $AN = AK$, $BL = BK$, $CL = CM$, $DN = DM$. Кда нят равенстватнень прибавакшемс башка членонь-член, лиси:

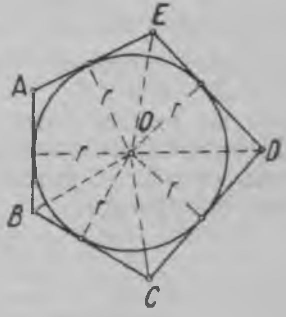
$$AN + DN + BL + CL = AK + BK + CM + DM,$$

или

$$AD + BC = AB + DC.$$



264 тяш.



265 тяш.

2. *Окружностьть ули кода тяштемс стама нилеужексонь потмос, конань кафта каршек ащи ширензон суммасна ровна сонь кафта лият ширензон суммаснонды.*

Сембе параллелограматнень эзда ули кода тяштемс окружностьсь аньцек ромбать потмос, а сяс и квадратть потмос.

4 §. Перьф тяштьф ламужексть и колмужексть площадьсна.

1. *Теорема.* **Перьф тяштьф ламужексть площадец ровна потму тяштьф окружностьть радиусонц лангс сонь периметранц произведениять пяленцты.**

Максф: $ABCDE$ — перьф тяштьф n-ужекс;
r — потму тяштьф окружностьть радиусоц;
P_n-сь ули n-ужекстъ периметрац (265 тяш.).

Эряви няфтемс: сонь площадец $S_n = \frac{1}{2} P_n \cdot r$.

Няфтемац. Кда окружностьть O центранц поладсаськ $ABCDE$ ламужекстъ прянзон мархта, ламужекстъ явсаськ n колмужексова.

$$AOB \triangle \text{ пл.} = \frac{1}{2} AB \cdot r; \ BOC \triangle \text{ пл.} = \frac{1}{2} BC \cdot r$$

. . . .

$$AOB \triangle \text{пл.} + BOC \triangle \text{пл.} + \ldots = \frac{1}{2} r (AB + BC + \ldots);$$

$$\text{лисеньди, } S_n = \frac{1}{2} r \cdot P_n, \text{ или } S_n = \frac{1}{2} P_n \cdot r \text{ кв. ед.}$$

Следствия. **Перьф тяштьф колмужекстъ площадец $S\triangle = p \cdot r$, коса p — колмужекстъ пялепериметрац.**

2. Задача. *Колмужекстъ ширенза a, b и c. Мумс потму тяштьф окружностьть радиусонц.*

Тиемац. $S\triangle = p \cdot r$, сяс $r = \frac{S\triangle}{p}$; Геронть формуланц коряс

$$S\triangle = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$\text{а сяс } r = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

Кизефкст и упражненият.

1. Мес аф тяштеви окружность нилеужекстъ сембе прянзон ланга, конань уженза фкя-фкянь мельгя относятся станя, кода 2:3:4:5?
2. Мес аш кода тяштемс окружность нилеужекстъ потмос, конань ширенза фкя-фкянь мельгя относятся станя, кода 1:2:3:4?
3. Тиемс ABC колмужекс, кда максфт: b и c ширенза и перьф тяштьф окружностьть R радиусоц.
4. Тиемс ABC колмужекс, кда максфт: a ширец, $B\angle$ и перьф тяштьф окружностьть R радиусоц.
5. Тиемс ABC колмужекс, кда максфт: c ширец, $A\angle$ и потму тяштьф окружностьть r радиусоц.
6. Тиемс ABC колмужекс, кда максфт: $A\angle$ и $B\angle$ и потму тяштьф окружностьть r радиусоц.
7. Тиемс равнобедреннай колмужекс сонь a основаниянц и перьф тяштьф окружностьть R радиусонц коряс.
8. Тиемс ромба a ширенц и потму тяштьф окружностьть r радиусонц коряс.
9. Перьф тяштьф нилеужекстъ колма ширенза, конат сявфт фкя-фкянь меле, ровнат 6 *см*, 4 *см*, 5 *см*. Мумс сонь нилеце ширенц.
10. *Кодама кельк колмужексса* $a \cdot b = 2Rh_c$, *коса* R *— перьф тяштьф окружностьть радиусоц.* Няфтемс тянь.
11. $ab = 2Rh_c$ *формулать вельде няфтемс, што* $R = \frac{abc}{4S}$, *или* $S = \frac{abc}{4R}$, *коса* S *— колмужекстъ площадец.*

XX. ПРАВИЛЬНАИ ЛАМУЖЕКСНЕ.

1 §. Правильнай ламужексне.

1. *Ся ламужексти, конань: 1) сембе ширенза ровнат и 2) сембе уженза ровнат, мярьгихть правильнай.*

Ровноширень колмужекссь и квадратсь улихть правильнай ламужексонь кепетькст. Аф ровна ширень видеужексти или кичкорауженъ ромбати аш кода мярьгемс правильнай ламужекс; видеужексть сембе уженза ровнат, но ширенза аф ровнат, ромбать сембе ширенза ровнат, но уженза аф ровнат.

2. n-ужексть потмостонь ужензон суммасна ровна $2d(n-2)$, сяс лисеньди, правильнай n-ужексть потмостонь эрь ужец ровна $\frac{2d(n-2)}{n}$. Всякай ламужексть ушестонь ужензон суммасна ровна $4d$, а сяс правильнай n-ужексть ушестонь эрь ужец ровна $\frac{4d}{n}$.

Правильнай n-ужексть потмостонь уженц ули кода лувомс мархтонза смежнай ушестонь ужеть коряс: потмостонь ужец ровна:

$$2d-\frac{4d}{n}=2d\left(1-\frac{2}{n}\right).$$

3. Кда n-ужексть ширец ровна a-ти, эста сонь P периметрац $= an$.

Фкяньшка лама шире мархта ламужексненьди мярьгихть фкялеменнет.

Правильнай фкялемень ламужексне ровнат, кда ровнат синь ширесна.

2 §. Правильнай потму и перьф тяштьф ламужекснень тиемасна.

1. *Теорема.* **Кда окружностьсь явф мзяровок ровна пялькссова, эста: 1) сят хордатне, конат фкя-фкянь мельгя поладсазь явондома точкатнень, тиихть правильнай потму тяштьф ламужекс; 2) сят токай китьксне, конат ётафтфт явондома точкатнень эзга, тиихть правильнай перьф тяштьф ламужекс.**

Максф: *A*, *B*, *C*... точкатнень эса *O* окружностьсь явф *n* ровна пялькссова (266 тяш.).

Эряви няфтемс: 1) *AB*, *BC*, *CD*... хордатне тиихть правильнай потму тяштьф ламужекс.
2) *KBL*, *LCM*, *MDN*... токай китьксне тиихть правильнай перьф тяштьф ламужекс.

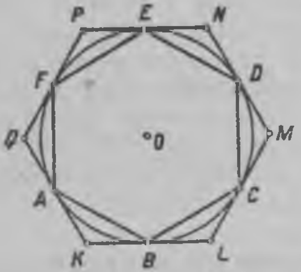
Няфтемац. 1) Кда окружностьть явондома точканзон фкя-фкянь мельгя поладомс хордаса, лиси потму тяштьф $ABCDEF$ ламужекс. AB, BC, CD ... дугатне ровнат, а сяс $AB=BC=CD$... хордатневок ровнат, кода ровна дугань кемекстайхть. Тяда башка, $A\angle=B\angle=C\angle=\ldots$ кода ровна дугаса унксневи потму тяштьф ужет, а сяс потму тяштьф $ABCDEF$ ламужекссь, конань ровнат ширенза и уженза,— правильнай.

2) Кда окружностьть A, B, C, D... явондома точканзон ланга ётафттама токай китькст, лиси перьф тяштьф $KLMNPQ$ ламужекс. AKB, BLC, CMD... колмужекснень улихть ровна AB, BC, CD... основаниясна, основаниятненьди прилежащай синь ужесна $KAB\angle$, $KBA\angle$, $LBC\angle$, $LCB\angle$... станя жа ровнат, мес унксневихть ровна дугаса; значит колмужексне: 1) равнобедреннайхть и 2) эсь ёткс васт ровнат.

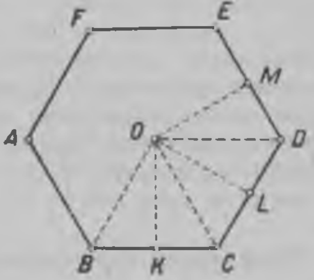
Колмужекснень равенстваснон эзда лисеньди: $KA = KB = BL = LC = MC = MD = \ldots$, или $KL = LM = MN\ldots$, а станя жа, што $K\angle = L\angle = M\angle = \ldots$

Тяфта перьф тяштьф $KLMNPQ$ ламужекстъ ширенза и уженза ровнат, лисеньди, што сон правильнай.

2. Потму или перьф тяштьф ламужекстъ тиеньдсазь окружностьть ровна пялькссова явоманц лаца.



266. тяш.



267 тяш.

3. *Теорема.* **1) Всякай правильнай ламужекстъ потмос ули кода тяштемс окружность и 2) сонь прянзон ланга ули кода перьф тяштемс окружность.**

Максф: $ABCDEF$ — правильнай ламужекс (267 тяш.).
$A\angle = B\angle = C\angle = \ldots$ и $AB = BC = CD = \ldots$

Эряви няфтемс: 1) правильнай ламужекстъ потмос ули кода тяштемс окружность;
2) сонь прянзон ланга ули кода тяштемс перьф тяштьф окружность.

Няфтемац. 1) Штоба ламужекстъ потмос тяштемс окружность, эряви содамс сонь центранц вастонц и сонь радиусонц кувалмонц. Потму тяштьф окружностьть центрац — точка, кона ащи ровнаста ичкезе ламужекстъ сембе ширензон эзда. AB и BC ширетнень эзда ровнаста ичкезе ащи точкатне ашихть $B\angle$ биссектрисанц лангса; BC и CD ширетнень эзда ровнаста ичкезе точкатне ащихть $C\angle$ биссектрисанц лангса; сяс лисеньди, кафцьке биссектрисатнень фкя-фкянь туркс ётама O точкасна ащи фкяньшка ичкезе AB, BC и CD ширетнень эзда.

Няфтьсаськ, што O точкась станя жа ровнаста ичкезе ащи ламужекстъ CD и DE ширензон эзда и, сяс ащи $D\angle$-ть биссектрисанц лангса. Тянкса O точкать поладсаськ D прять мархта и ванцаськ $COD\triangle$ и $BOC\triangle$-ть. Синь ровнат, сяс мес синь OC ширесна марстонь, $BC = CD$ и $OCB\angle = OCD\angle$. Нят колмужекснень равенстваснон эзда лисеньди, што $OBC\angle = ODC\angle$, но $OBC\angle = \frac{B\angle}{2}$, тяста лисеньди, што и $ODC\angle = \frac{B\angle}{2}$, а сяс мес $D\angle = B\angle$ кода правильнай ламужексонь ужет, эста $ODC\angle = \frac{D\angle}{2}$, лисеньди, што OD-сь ули $D\angle$-ть биссектрисац.

Станя жа няфнесазь, што и OE, и OF, и OA улихть ламужексть ужензон биссектрисасна, а тянь коряс лисеньди, што O точкась ламужексть сембе ужензон биссектрисаснон фкя-фкянь туркс ётама точкасна ащи ровнаста ичкезе сембе ширетнень эзда и, сяс, сон ули перьф тяштьф окружностьти центракс. $OK = OL = OM = r$, вешеньдеви окружностьть радиусонцты.

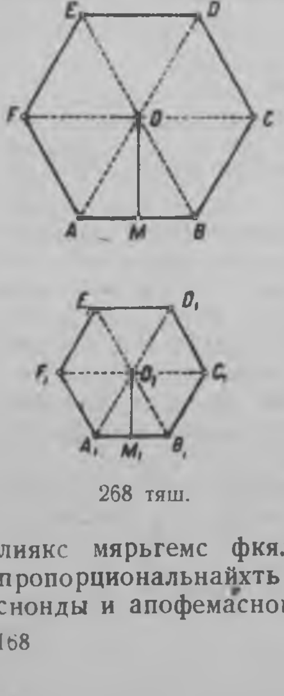
2) BOC, COD... колмужекснень равенстваснон эзда лисеньди, што $OB = OC = \ldots$; тянь коряс лисеньди, што O точкась ащи ровнаста ичкезе ламужексть сембе прянзон эзда и арси $R = OB = OC = \ldots$ радиусса перьф тяштьф окружностьти центракс.

Правильнай ламужексть потму и перьф тяштьф окружностьтнень центрасна фкя-фкянь вельхтяйхть. Синь марстонь центраснонды мярьгихть правильнай ламужексть центрац. O точкать правильнай ламужексть ширензон эзда OK, OL... расстоянияти мярьгихть сонь **апофемац**. Ламужексть апофемац сяка пингста арси потму тяштьф окружностьти радиусокс.

3 §. Фкялемса правильнай ламужекснень свойствасна.

1. *Фкялемса правильнай ламужексне подобнайхть,* сяс мес синь ужесна ровнат и синь ширесна пропорциональнайхть.

2. ***Теорема.*** *Фкялемса правильнай ламужекснень ширесна относятся кода перьф или потму тяштьф окружностень радиуст.*



268 тяш.

Максф: n — ламужексть ширензон лувкссна (268 тяш.).
AB и A_1B_1 — ламужексть ширенза;
OA и OB... и O_1A_1 и O_1B_1 — перьф тяштьф окружностьтнень радиуссна;
OM и O_1M_1 — потму тяштьф окружностьтнень радиуссна, или апофематне.

Эряви няфтемс: $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{OA}{O_1A_1} = \frac{OM}{O_1M_1}$.

Нять е м а ц. Равнобедреннай $A_1O_1B_1$ и AOB колмужекснень эса $O_1\angle = O\angle$, сяс мес эздост эрь ужесь ровна $\frac{4d}{n}$, тяста лисеньди, што колмужексне подобнайхть, $AOB\triangle \backsim A_1O_1B_1\triangle$; колмужекснень подобияснон эзда лисеньди:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{OA}{O_1A_1} = \frac{OM}{O_1M_1},$$

лиякс мярьгемс фкялемса правильнай ламужекснень ширесна пропорциональнайхть перьф тяштьф окружностьтнень радиусснонды и апофемаснонды.

3. *Следствия.* **Фкялемса правильнай ламужекснень периметрасна относятся фкя-фкяньди кода перьф тяштьф окружностень радиуст или апофемат.**

Фкялемса правильнай $ABCDEF$ и $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ ламужексне подобнайхть, и, сяс, синь сходственнай ширесна пропорциональнайхть:

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CD}{C_1D_1}=\ldots,$$

но

$$\frac{AB+BC+CD+\ldots}{A_1B_1+B_1C_1+C_1D_1+\ldots}=\frac{AB}{A_1B_1},$$

или

$$\frac{P}{P_1}=\frac{AB}{A_1B_1};\text{ но }\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AO}{A_1O_1}=\frac{OM}{O_1M_1},\text{ а сяс }\frac{P}{P_1}=\frac{AO}{A_1O_1}=\frac{OM}{O_1M_1}.$$

4 §. Правильнай ламужексть площадец.

Теорема. **Правильнай ламужексть площадец ровна сонь периметранц апофемать лангс ламокстамать эзда лиси произведениять пяленцты.**

Максф: a_n — правильнай n-ужексть ширец;
n — сонь ширензон лувкссна; $OP=h$ апофемац;
P_n — сонь периметрац (269 тяш.).

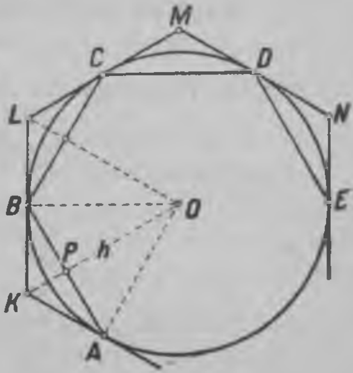
Эряви няфтемс: n-ужексть площаденц $S_n=\frac{1}{2}P_n\cdot h$.

Няфтемац. Правильнай n-ужексть прянзон сонь центранц мархта поладомста лиси ровна равнобедреннай n колмужекст; эздост эрь колмужексть площадец ровна $S=\frac{1}{2}a_nh$, коса h — колмужексть серец, тяка жа пингста арси ламужексти апофемакс; тяста марнек ламужексть площадец:

$$S_n=nS\triangle=\frac{1}{2}na_nh;$$

но $a_n\cdot n=P_n$, ламужексть периметранцты, а сяс

$$S_n=\frac{1}{2}p_n\cdot h.$$



269 тяш.

Следствият. 1. **Правильнай потму тяштьф ламужексть площадец ровна сонь периметранц апофемать лангс ламокстамать эзда лиси произведениять пяленцты (269 тяш.):**

$$S_n=\frac{1}{2}p_nh.$$

2. Правильнай перьф тяштьф ламужекстьь площадец ровна сонь периметранц окружностьть радиусонц лангс ламокстамать эзда лиси произведениять пяленцты (269 тяш.):

$$S_n = \frac{1}{2} p_n h = \frac{1}{2} p_n \cdot r.$$

3. Фкялемса правильнай ламужекснень площадьсна эсь ётковаст относятся кода синь ширеснон квадратсна или кода перьф и потму тяштьф окружностьтнень радиусснон квадратсна (268 тяш., 168 лопаширеса).

$ABCDEF$ и $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — фкялемса правильнай ламужекст; AO и A_1O_1 — синь радиуссна, OM и O_1M_1 — синь апофемасна, S и S_1 — синь площадьсна.

Фкялемса правильнай ламужексне подобнайхть, а сяс синь площадьсна относятся кода ширеснон квадратсна:

$$\frac{S_1}{S} = \frac{A_1B_1^2}{AB^2}. \qquad (1)$$

Фкялемса правильнай ламужекснень ширесна жа относятся кода потму или перьф тяштьф окружностьтнень радиуссна:

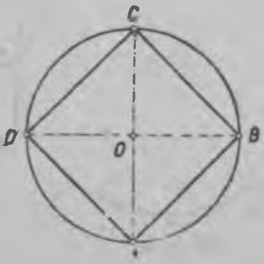
$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{O_1A_1}{OA} = \frac{O_1M_1}{OM}. \qquad (2)$$

(1) и (2) равенстватнень серьстамста минь няйсаськ, што

$$\frac{S_1}{S} = \frac{A_1B_1^2}{AB^2} = \frac{O_1A_1^2}{OA^2} = \frac{O_1M_1^2}{OM^2}.$$

5 §. Окружностьть потму тяштьф квадратсь. Сонь тиемац и радиус вельде сонь ширеизон няфтемасиа.

Задача. *R радиусонь мархта окружностьти тяштемс квадрат и сонь a_4 ширенц няфтемс радиусть вельде.*



270 тяш.

1) Тиемац. Окружностьть (270 тяш.) потмос ётафттама кафта фкя-фкяньди перпендикулярнай AC и BD диаметрат; окружностьсь явови ниле ровна пялькссова. Кда диаметратнень песнон поладомс фкя-фкянь мельгя, тиеви правильнай потму тяштьф нилеужекс, лиякс мярьгемс, квадрат, сяс мес сонь ширенза ровнат кода ровна дугань кемекстай хордат, а уженэон эзда эрь ужесь — виде кода диаметрать лангс нежедькши ужет.

2) Лувомац. Видеужень AOB колмужекстьь эзда мусаськ:

$$AB^2 = AO^2 + BO^2 \text{ или } AB^2 = 2R^2,$$

коста $AB = R\sqrt{2}$.

Правильнай потму тяштьф нилеужекстъ ширец:

$$\boxed{a_4 = R\sqrt{2}.}$$

6 §. Потму тяштьф правильнай котужекссь. Сонь тиемац и радиус вельде сонь ширенц няфтемац.

Задача. *R радиус мархта окружностьть потмос тяштемс правильнай котужекс и сонь a_6 ширенц няфтемс радиусонц вельде.*

Лувомац. Анализсь. Катк AB ули потму тяштьф правильнай котужекстъ ширец (271 тяш.), эста $AOB\angle=\frac{360^\circ}{6}=60^\circ$.

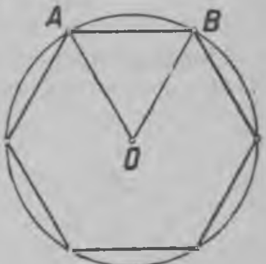
$AOB\triangle$ ули равнобедреннай, $OA=OB=R$ и $A\angle=B\angle$, и эздост эрь ужеть эса 60°.

$AOB\triangle$ — ровнаужень, сяс и ровнаширень, а сяс

$$AB=AO=BO=R.$$

Правильнай потму тяштьф котужекстъ ширец:

$$\boxed{a_6 = R.}$$



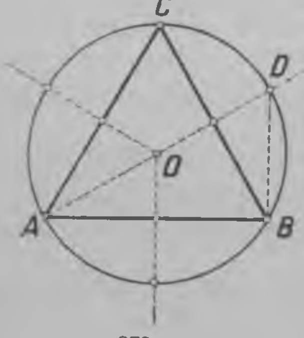
271 тяш.

Тиемац. Максф окружностьть лангс ункстатама окружностьть радиусонц кувалмоса, циркульть пильгенянзон яштомаснон вельде, мельцек-мельцек кота ровна дугат; поладсаськ эрь дугать пензон хордаса, лиси правильнай котужекс, кодама эрявсь вешемс.

7 §. Потму тяштьф правильнай колмужекссь. Сонь тиемац и радиус вельде сонь ширенц няфтемац.

Задача. *R радиус мархта окружностьть потмос тяштемс правильнай колмужекс и няфтемс сонь a_3 ширенц радиусть вельде.*

1) Тиемац. Явсаськ окружностьть кота ровна пяльксова, кда поладсаськ окружностьть явома точканзон колма хордаса фкя точка вельф, мусаськ вешендеви правильнай ABC колмужекстъ, конань $AB=BC=CA$ кода ровна дугань кемекстай хордат (272 тяш.).



272 тяш.

2) Ширеть лувомац. Ётафттама AD диаметра и D точкать поладсаськ B-ть мархта, лиси видеужень $ABD\triangle$,

конань виде ужец B прять тейса. ABD видеужень колмужексть эзда ули:

$$AB^3 = AD^2 - DB^2; \qquad AD = 2R \text{ и } DB = R,$$

а сяс

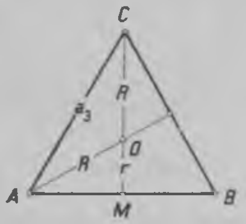
$$AB^2 = a^2{}_3 = 4R^2 - R^2 = 3R^2,$$

коста

$$\boxed{a_3 = R\sqrt{3}.}$$

8 §. Перьф и потму тяштьф окружностьтнень радиусснон, правильнай колмужексть серьнц и площаденц сонь ширенц вельде няфтемасна.

Максф правильнай $ABC \triangle$ (273 тяш.). Сонь AB ширец $= a$; $OM = r$ — потму тяштьф окружностьть радиусоц; $OA = OC = R$ — перьф тяштьф окружностьть радиусоц; $CM = h$ — серец; S — сонь площадец.



273 тяш.

1) R-ть лувомац. AB ширесь $= a_3 = R\sqrt{3}$, тяста лисеньди, што

$$R = \frac{a_3}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

2) r-ть лувомац. Видеужень AOM колмужекстъ эса AO гипотенузась $= R$ — тя ули ABC колмужекстъ $A\angle$ биссектрисац, сяс $OAM\angle = 30°$, а сяс катетсь $OM = r$ кода 30° ужеть каршеса ащи, сон ровна гипотенузать пяленцты, лиякс мярьгемс $r = \frac{R}{2}$. Тянь коряс,

$$1)\ r = \frac{R}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}; \quad 2)\ R = 2r.$$

3) h-ть лувомац. h серьсь $= CM = CO + OM$, но $CO = R = 2r$ и $OM = r = \frac{R}{2}$, а сяс:

$$1)\ h = R + \frac{R}{2} = 1{,}5R; \quad 2)\ h = 2r + r = 3r;$$

$$3)\ h = 3r = 3\cdot\frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

4) S-ть лувомац. S площадец $= \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}a\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ кв. единицат.

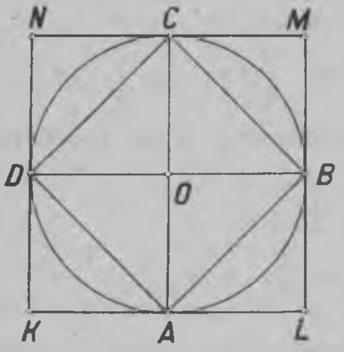
9 §. Перьф тяштьф квадратть и правильнай перьф тяштьф колмужексть тиемасна и радиусонь вельде синь ширеснон няфтемасна.

1-це задачась. *Тиемс перьф тяштьф квадрат и няфтемс сонь b_4 ширенц потму тяштьф окружностьть r радиусонц вельде.*

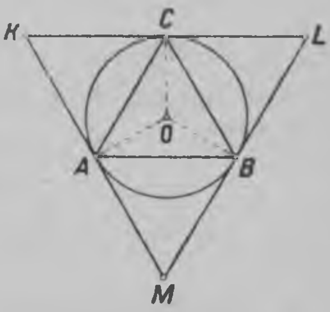
Тиемац. r радиус мархта окружностьть потмос тяштьтяма квадрат (274 тяш.). Сонь прянц ланга тяштьтяма мянь фкя-фкянь туркс ётамс токай китькст, лиси правильнай перьф тяштьф $KLMN$ квадрат. Сонь ширец $KL = b_4$ ровна окружностьть BD диаметранцты, а сяс

$$\boxed{b_4 = 2r.}$$

2-це задачась. *Тиемс правильнай перьф тяштьф колмужекс и няфтемс сонь b_3 ширенц потму тяштьф окружностьть r радиусонц вельде.*



274 тяш.



275 тяш.

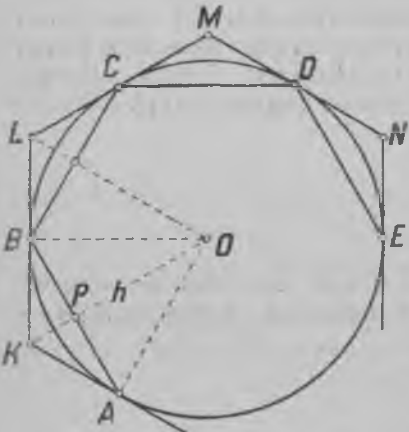
Тиемац. r радиус мархта окружностьть потмос тяштемс правильнай колмужекс (275 тяш.). Сонь прянц ланга мянь фкя-фкянь туркс ётамс тяштьтяма токай китькст, тиеви правильнай перьф тяштьф KLM колмужекс. KLM колмужекстьэса токама A и B точкатне ащихть KM и LM ширетнень кучкасост, сяс мес $KA = AM$ и $LB = BM$; тяста лисеньди, што $AB = a_3$ ули KLM колмужексть кучкастонь китьксоц. Но $AB = \frac{KL}{2}$, или $a_3 = \frac{b_3}{2}$, тяста $в_3 = 2a_3$ ули

правильнай перьф тяштьф колмужексть ширец кафксть сяда оцю сяка жа окружностьть потмос тяштьф колмужексть ширенц коряс:

$$\boxed{b_3 = 2r\sqrt{3}.}$$

10 §. Фкялемса потму тяштьф ламужекста ширенц и радиусонц вельде правильнай перьф тяштьф ламужекста ширенц лувомац.

1. Задача. *Правильнай потму тяштьф ламужекста ширенц и радиусть вельде лувомс фкялемса правильнай перьф тяштьф ламужекста ширенц.*



275а тяш.

Тиемац. $ABCD$ ... и $KLMN$ .... ламужексне (275а тяш.) — правильнай фкялемсот, сянь эзда лисеньди, што синь подобнайхть. KL ширесь — $= b_n$, AB ширесь $= a_n$. Ламужекснень подобияснон эзда лисеньди, што

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{R}{h}, \text{ коста } b_n = \frac{a_n R}{h}. \qquad (1)$$

Видеужень OPB ламужекста эзда, конань катетоц $PB = \frac{a_n}{2}$, лувсаськ h-ть:

$$h^2 = R^2 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2; \ h = \sqrt{R^2 - \frac{a^2_n}{4}}. \qquad (2)$$

Кда путомс h-ти муф (2) выраженият (1)-це равенствати, эста ули:

$$\boxed{b_n = \frac{a_n \cdot R}{\sqrt{R^2 - \frac{a^2_n}{4}}}.}$$

2. Тя формулать вельде правильнай потму тяштьф ламужекста максф a_n ширенц и R радиусонц колга ули кода лувомс перьф тяштьф фкялемса правильнай ламужекста b_n ширенц.

3. Кда лиси формулать кафцьке пяльксонзон касфтомс квадратс и лувомс a_n, эста лиси:

$$\boxed{a_n = \frac{b_n R}{\sqrt{R^2 + \frac{b^2_n}{4}}}.}$$

Тя формулать вельде правильнай перьф тяштьф ламужекста максф b_n ширенц и R радиусонц колга ули кода лувомс фкялемса потму тяштьф правильнай ламужекста a_n ширенц.

4. Задача. *Няфтемс правильнай перьф тяштьф котужекста b_6 ширенц потму тяштьф окружностьть R радиусонц вельде.*

Тиемац. Задачать лувомс тяфтама формулань вельде:

$$b_n = \frac{a_n R}{\sqrt{R^2 - \frac{a^2_n}{4}}}.$$

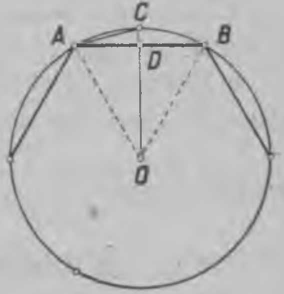
Задачать условиянц коряс n ламужексть ширензон лувксна ровна 6-ти; сяс, $a_n = a_6 = R$, а сяс:

$$b_6 = \frac{a_6 R}{\sqrt{R^2 - \frac{a_6^2}{4}}} = \frac{R\cdot R}{\sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}}} = \frac{R^2}{\sqrt{\frac{3R^2}{4}}} = \frac{2R^2}{R\sqrt{3}} = \frac{2R\sqrt{3}}{3}.$$

11 §. Потму тяштьф правильнай ламужексть ширензон лувксснон кафтонзамасна.

1. **Задача.** *Кафксть ламокстамс (кафтонзамс) правильнай потму тяштьф ламужексть ширензон лувксснон и няфтемс a_n и R вельде сонь a_{2n} ширенц.*

Тиемац. 1) Катк $AB = a_n$ — правильнай потму тяштьф n-ужексть ширец (276 тяш.). Штоба тиемс потму тяштьф ламужекс кафксть сяда лама шире мархта максф потму тяштьф ламужексть коряс, мярьгемс $2n$ шире мархта, эряви окружностьть явомс $2n$ ровна пяльксова. Ся дугать, кепетьксоньди сявемс AB-ть, кона соответствует AB ширети, явсаськ кучкава, эста $AC\smile = CB\smile$ и AC хордась ули потму тяштьф ламужексти ширекс, кона ламужексть $2n$ ширенза.



276 тяш.

2) Штоба лувомс $AC = a_{2n}$, ванцаськ оржужень AOC △ и сёрмадсаськ мезьти ровна тя ширеть квадратоц: $AC^2 + AO^2 + OC^2 - 2OC\cdot OD$, или $a^2_{2n} = R^2 + R^2 - 2R\cdot OD = 2R^2 - 2R\cdot OD$.

Видеужень AOD △ эзда мусаськ:

$$OD = \sqrt{AO^2 - AD^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2} = \sqrt{R^2 - \frac{a^2_n}{4}}.$$

Кда полафтомс ингельдень равенствать эзда OD-ть мекпяльдень выраженияса, эста ули:

$$a^2_{2n} = 2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a^2_n}{4}}, \text{ или } a_{2n} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a^2_n}{4}}}.$$

Тя формулать, правильнай потму тяштьф n-ужексть ширензон лувксснон кафтонзамаснон формуланц коряс ули кода правильнай потму тяштьф n-ужексть максф a_n ширенц и R радиусонц вельде содамс потму тяштьф правильнай ламужексть a_{2n} ширенц, конань $2n$ ширедонза кафксть сяда лама n-ужексть ширензон лувксснон коряс.

2. Кепетькс. *Няфтемс R-ть вельде правильнай потму тяштьф кемгафтувужексть ширенц.*

Тиемац. $a^2_{12}=2R^2-2R\sqrt{R^2-\frac{a^2_6}{4}}$; $a^2_{12}=2R^2-$ $-2R\sqrt{\frac{3R^2}{4}}$, сяс мес $a_6=R$;

$$a_{12}=\sqrt{2R-R^2\sqrt{3}}=R\sqrt{2-\sqrt{3}}\text{, или } a_{12}=\frac{R}{2}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right),$$

сяс мес $2-\sqrt{3}=\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)^2$.

Кизефкст упражненият.

1. *R радиус мархта кругть потму тяштемс правильнай кафксужекс и няфтемс сонь ширенц радиусть вельде.*

2. Правильнай потму тяштьф колмужекстъ, нилеужекстъ, кафксужекстъ максф a ширенц вельде лувомс кругть радиусонц.

3. Лувомс R радиус мархта кругть потму тяштьф правильнай кафксужекстъ, кемгафтувужекстъ диоганальснон кувалмоснон.

4. Правильнай перьф тяштьф котужекстъ ширец ровна b-ти. Содамс кругть радиусонц.

5. Максф a ширеть колга тиемс правильнай кафксужекс.

6. Кругть радиусоц ровна R-ти. Лувомс правильнай потму тяштьф видеужекстъ ширенц, кда содаф, што $a_{10}=R\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

7. h апофемать колга тиемс: 1) правильнай колмужекс, 2) квадрат, 3) правильнай котужекс.

XXI. ОКРУЖНОСТЬТЬ КУВАЛМОЦ И КРУГТЬ ПЛОЩАДЕЦ.

1 §. Окружностьть кувалмонц правильнай потму и перьф тяштьф ламужекснень периметраснон мархта серьстамасна.

1. Окружностьть кувалмонц аш кода ункстамс видеста сонь лангозонза китьксонь ункстамань путнезь, сяс мес китьксонь ункстамась — виде китьксонь керфкс и сон аф путови плотнаста кичкора китькстъ лангс; сяс окружностьть кувалмонц ункснесазь косвеннайста ункстазь, правильнай потму и перьф тяштьф ламужекснень периметраснон ункстазь.

277 тяш.

Окружностьть кувалмонц колга формулатнень выводснон теорематнень ванондомда ингеле ванцаськ различнай китькснень ёткса зависимостьть, конат китьксненьди пекс арсихть A и B точкатне.

Катк максф синнеф кафта $AEDCB$ и $AFGB$ китькст, конатнень эзда $AEDCB$ — ушеса ащи (объемлющай) и $AFGB$ — потмоса ащи (объемлемай) синнеф китькст, конатненьди пекс арсихть A и B точкатне.

Няфтьсаськ, што потмоса ащи $AFGB$ синнеф китькссь сяда нярьхкяня всякай ушеса ащи $AEDCB$ синнеф китьксть коряс, конатнень A и B песна фкя-фкянь вельхтяйхть.

Афкукс, $AFGB$ синнеф китьксть FG ширенц кафта пяли мянь $AEDCB$ синнеф китьксть туркс ётамс кувалгафтомста (277 тяш.), ули: $AF < AK + KF$; $KF + FG + GL < KE + ED + DC + CL$; $GB <$ $< GL + LB$.

Кда максф афравенстватнень прибавасаськ членонь-член, минь лиси:

$$AF + KF + FG + GL + GB < AK + KF + KE + ED + DC + GL + CL + LB,$$

или, кда афравенствать кафцьке пяльксстонза сявсаськ KF и GL, и мес $AK + KE = AE$ и $CL + LB = CB$, минь ули $AF + FG + GB <$

$$< AE + ED + DC + CB,$$

лиякс мярьгемс ушу мяньдьф потмоса ащи (объемлемай) синнеф китькссь сяда нюрьхкяня всякай ушеса ащи синнеф (объемлющай) китьксть коряс, конань пенза фкя-фкянь вельхтяйхть потмоса ащи синнеф китьксть пензон мархта.

277а тяш.

Азфсь ули виде ся случайтивок, мзярда ушеса ащи китькссь или потмоса ащи китькссь улихть окружностьти дугакс, сяс мес окружностьть дуганц ули кода шарьхкедемс кода пяк нюрьхкяня пяк лама звенаста ащи синнеф китькс.

Станя, кепетьксоньди сявемс DC_1F дугась (278 тяш., 179 лопаш.) сяда нюрьхкяня DCF синнеф китьксть коряс, кона тиевсь кафта CD и CF токай китькснень эзда; станя жа DC_1F дугась сяда нюрьхкяня $DQPF$ синнеф китьксть коряс, лиякс мярьгемс $DC_1\smile + C_1F\smile < DQ + QP + PF$.

2. *Теорема*. Правильнай потму тяштьф ламужекстъ периметрац окружностьть кувалмонц коряс сяда ёмла и сон сяда малакстоми окружностьть кувалмонцты сонь ширензон лувксснон эрь кафтонзамста.

Максф: p_n—n-ужекстъ периметрац; C — окружностьть кувалмоц (277а тяш.).

Эряви няфтемс: $p_n < C$-ть коряс и малакстоми C-ти n ширетнень лувкснон кафтонзамста.

Няфтемац. AB-сь — правильнай потму тяштьф ABC колмужекстъ ширец, сонь периметрац $p_3 = 3AB$. Кда явсаськ кучкава AB, BC и AC дугатнень и кда поладсаськ нят дугатнень песнон мархта явондома D, E и F точкатнень, лиси правильнай потму тяштьф котужекс, конань периметрац $p_6 = 6AD$ сяда оцю правильнай потму тяштьф колмужексть периметранц коряс. Афкукс, ADB колмужексть эзда ули: $AD + BD > AB$, но $AD = DB$, а сяс $2AD > AB$; кда ламокстамс афравенствать кафцьке пяльксонзон 3-ть лангс, лиси $6AD > 3AB$, или $p_6 > p_3$. Кда тяда меле явсаськ AD, DB, BE и EC ... дугатнень кучкава и кда поладсаськ нят K, L, M, N... явондома точкатнень дугатнень песнон мархта, лиси правильнай потму тяштьф кемгафтувужекс, конань периметрац $p_{12} > p_6$. Афкукс, ADK колмужексть эзда ули: $AK + KD > AD$, но $KD = AK$, а сяс $2AK > AD$. Кда ламокстамс афравенствать кафцьке пяльксонзон 6-ть лангс, эста лиси, што $12AK > 6AD$ или $p_{12} > p_6$.

Кда нингя кафтонзакшемс эрь оду лисьф ламужексть ширензон лувксснон, минь няйсаськ, што правильнай потму тяштьф ламужексть периметрац ули сяда оцю эста, мзярда сяда лама сонь ширедонза.

Минь ули: $p_6 > p_3$; $p_{12} > p_6$;... тянь коряс лисеньди $p_{2n} > p_n$, коса p_n ули n шире мархта правильнай потму тяштьф ламужексть периметрац, а p_{2n} ули $2n$ шире мархта ламужексть периметрац.

Тяфта, кда карматама правильнай потму тяштьф ламужексть ширензон лувксснон нингя кафтоньзакшема, сонь периметрац касы и касы, сяда пяк малакстоми окружностьть кувалмонцты, но сембе сяка ляды сонь корязонза сяда ёмласта.

Афкус, потмос тяштьф правильнай ламужексть ширенза кода хордат, сяда ёмлат мархтост кемекстаф дугатнень коряс, а сяс ламужексть сембе ширензон суммасновок сяда ёмла окружностьть сембе дуганзон суммаснон коряс, тяста лисеньди, што правильнай потму тяштьф ламужексть периметрац сяда ёмла окружностьть кувалмонц коряс.

Кда окружностьть кувалмонц тяштьсаськ C букваса, эста лисьф выводсь сёрмадови тяфтаня: $p_n < C$.

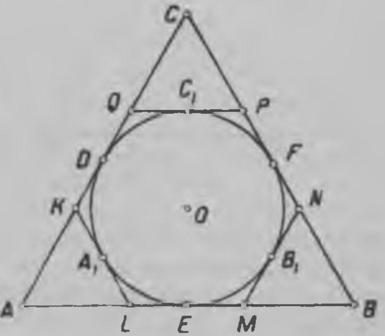
Кда правильнай потму тяштьф ламужексть ширензон лувксснон карматама кафтонзакшема пефтома ламокстъ, эста сонь периметрац сяшкава малакстоми окружностьть кувалмонцты, што сонь кувалмонц и периметрать ёткса $C - p_n$ разностьсь ёмлалгады прокс маштомшка.

3. *Теорема.* Правильнай перьф тяштьф ламужексть периметрац окружностьть кувалмонц коряс сяда оцю и сяшкава малакстоми тейнза, конашкава ламокстъ кафтонзаф сон ширензон лувксснa.

Максф: P_n — ламужексть периметрац; C — окружностьть кувалмоц (278 тяш.).

Эряви няфтемс: $P_n > C$ коряс и малакстоми C-ти сонь n ширензон лувкснон кафтонзакшемста.

Няфтемац. AB — правильнай перьф тяштьф ABC колмужексть ширец, сонь периметрац $P_3 = 3AB$. Явсаськ кучкава дугатнень, конат ащихть перьф тяштьф ABC колмужексть ширензон и окружностьть мархта D, E и F токама точкаснон ёткса и тяштьтяма явома A_1, B_1 и C_1 точкатнень ланга токай китькст, лиси правильнай перьф тяштьф $KLMNPQ$ котужекс, конань $P_6 = 6KL$ периметрац сяда ёмла P_3 коряс, коса $P_6 < P_3$. Афкукс: AKL, BMN, CQP колмужекснень эзда ули: $KL < AK + BL$; $MN < BM + BN$; $PQ < CQ + CP$, а тянь эзда лисеньди, што кда AK и AL, BM и BN, CQ и CP керфкснень, конат керевихть ABC колмужексть ширензон эзда, суммасна полафневихть сяда ёмла KL, MN и PQ керфксса, а сяс $P_6 < P_3$. Кда тяфта жа кафтонзасаськ правильнай перьф тяштьф котужексть ширензон лувксснон, эста лиси правильнай перьф тяштьф кемгафтувужекс, конань периметрац перьф тяштьф котужексть периметранц коряс сяда ёмла, лиякс мярьгемс, $P_{12} < P_6$ и ст. тов; тянц эзда лисеньди, $P_{2n} < P_n$.



278 тяш.

Тяфтаня, ков сяда ламокстъ кафтонзасаськ правильнай перьф тяштьф ламужексть ширензон лувксснон, сонь периметрац ёмлалгады и наголь малакстоми окружностьть кувалмонцты, но сембе сяка ляды сонь корязонза сяда оцюста.

Тя выводть сёрмадкшесазь тяфтаня: $P_n > C$.

Кда перьф тяштьф правильнай ламужексть ширензон лувксснон кафтонзасаськ пефтема ламокстъ, эста сонь периметрац тяшкава малакстоми окружностьть кувалмонцты, што перьф тяштьф ламужексть периметранц и окружностьть кувалмонц ёткса, $P_n - C$ разностьсь тиеви маштомшка ёмласта.

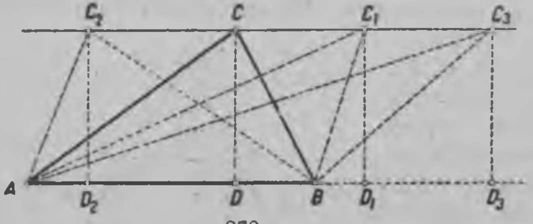
4. Кда сотомс марс ингеле азондфнень, минь мярьгтяма, што $p_n < C < P_n$, лиякс марьгемс, окружностьть кувалмоц правильнай потму тяштьф ламужексть периметранц коряс сяда оцю и правильнай перьф тяштьф ламужексть периметранц коряс сяда ёмла; тяка пингста нят ламужекснень периметрасна, ков ламокстъ кафтонзасаськ синь ширеснон лувксснон, сяда пяк малакстомихть окружностьть кувалмонцты, конань кувалмоц мзярдонга аф полафни.

2 §. Постояннай и полафневи величинатнень колга шарьхкедемась.

1. Правильнай потму и перьф тяштьф ламужекснень ширеснон лувксснон пефтома ламокстъ кафтонзамста полафневихть синь p_n и P_n периметрасна и сембе сяда малакстомихть окружностьть кувалмонцты, кода бта синь ёрайхть арамс окружностьть кувалмоса, а окружностьть кувалмоц аф полафневи и лядкши, кода потму тяштьф, станя и перьф тяштьф ламужекснень ширеснон лувксснон кафтонзамста сембе процессть молеманц пингста апак полафнек.

2. Величинати, кона максф задачать условиянзон коряс сембе пингста сявеньди различнай значеният, мярьгихть **полафневи** (переменнай) величина; ся величинати, кона задачать сяка жа условиянзон пингста наголь ванфтсы соньцень значениянц, мярьгихть **афполафневи** (постояннай) величина.

Потму и перьф тяштьф ламужекснень ширеснон лувксснон пяк ламоксть кафтонзамста p_n и P_n периметрасна улихть переменнай величинатненьди кепетьксокс, а окружностьть кувалмоц C — величинась постояннай.

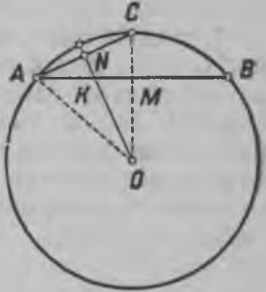


279 тяш.

3. Сяка жа задачать условиянзон пингста постояннай и полафневи величинатнень кепетьксса:

1) Максф ABC колмужекс (279 тяш.). Кда шашфнемс сонь C прянц виде китьксть ланга, кона параллельнай сонь AB основаниянцты, а основаниянц кадомс фкя вастс, эста полафневи величинакс кармайхть улема сонь боконь ширензон кувалмосна, колмужекстъ периметрац, сонь эрь уженц величинац; аф полафневи величинакс ули сонь основанияц, сонь сембе ужензон суммасна, кона ровна $2d$, сонь серец и сонь площадец.

2) Максф R радиус мархта окружность (280 тяш.); $AB = a_n$ — правильнай потму тяштьф n-ужекстъ ширец, керфкссь $OM \perp AB$ — апофемац; тяштьсаськ сонь h_n букваса.



280 тяш.

Кда кафтонзасаськ n-ужекстъ ширензон лувксснон, эста лиси $AC = a_{2n}$ и керфкссь $ON \perp AC$ — апофеманцты, конань тяштьсаськ h_{2n} букваса.

Видеужень OMK колмужекстъ эзда минь ули, што $OK > OM$, но OK-сь ули ON-ть аньцек пялькссоц, а сяс ON-сь сяда оцю OM-ть коряс. Тяфта $ON > OM$ или $h_{2n} > h_n$, лиякс мярьгемс, ламужекстъ ширензон лувксснон кафтонзамста апофемац касы, тиеви сяда оцюста и сяда оцюста, и кувалмонц колга ков ащи сяда малакстоми окружностьть R радиусонц кувалмонцты, но сембе сяка ляды сонь корязонза сяда ёмласта.

Тяфта лисеньди, што ламужекстъ ширензон лувксснон пяк ламокстъ кафтонзамста h_n апофемась ули полафневи величинась, а окружностьть радиусоц — аф полафневи величинась и радиусстъ кувалмонц и апофеманц кувалмонц ёткса $R - h_n$ разностьсь кармай улема сяда ёмла и мзярда ламужекстъ ширедонза ули пяк лама, тя разностьсь ули прокс маштомшка ёмла.

3 §. Пределть колга шарьхкедемась. Окружностьсь кода потму и перьф тяштьф ламужекснень периметраснон пределсна.

1. Правильнай потму тяштьф ламужексть периметрац сонь ширензон лувксснон пефтома ламокстъ кафтонзамстост касы и ёрай арамс ровнаста окружностьть кувалмонц мархта; тя пингста максф окружностьть кувалмонц и правильнай потму тяштьф ламужекстъ периметранц ёткса разностьсь кармай улема тов сяда ёмласта, ков потму тяштьф ламужекстъ ширензон сяда оцю лувкссна, а кда ширензон лувксснон пефтома ламокстъ кафтонзасаськ, эста тя разностьсь малакстоми и арси нульть малас.

2. Правильнай перьф тяштьф ламужекстъ периметрац, сонь ширензон лувксснон пефтома ламокстъ кафтонзамстост, станя жа малакстоми окружностьть кувалмонцты, но сон наголь ёмлалгады; тя пингста сонь периметранц и окружностьть кувалмонц ёткса разностьсь кармай улема тов сяда ёмла, ков сяда лама перьф тяштьф окружностьть ширедонза, и сонь ширензон лувкстъ пефтома ламокстъ кафтонзамста малакстоми нульти.

3. Ламужекстъ ширензон лувксснон пефтома ламокстъ кафтонзамста аф потмос тяштьф ламужекстъ периметранцты, кона ков ащи касы, аш кода арамс ровнаста окружностьть кувалмонцты, и аф перьф тяштьф ламужекстъ периметранцты, кона ков ащи ёмлалгады, аш кода арамс ровнаста окружностьть кувалмонцты. Окружностьсь ащи синьдейст пределкс.

4. *Аф полафневи величинати, конаньди полафневи величинась малакстоми станя, што разностьсь сонь и полафневи величинать ёткса эсь абсолютнай величинанц коряс ули кода тиемс кодама-кельк ингелькигя максф величинань коряс сяда ёмласта и тяда меле лядомс сонь корязонза сяда ёмласта, мярьгихть полафневи величинать пределоц.*

Окружностьсь, тяфтаня ули, потмос тяштьф и перьф тяштьф правильнай ламужекснень периметраснонды пределкс, мзярда синь ширеснон лувкстъ пефтома ламокстъ кафтонзасазь.

Тя положениять сёрмадкшесазь тяфтаня: p_n пределоц $=C$-ти или P_n пределоц $=C$-ти мзярда ламужекстъ ширензон лувкссна касы пефтома, или $\lim p_n=C$; $\lim P_n=C$, коса lim-сь означает предел; тя латинскай limes валть нюрхкяняета тяштемац (кда ётафтомс сонь—ули предел).

Ламужекстъ ширензон лувксснон пефтома кафтонзамста C и p_n ёткса разностьсь и P_n и C ёткса разностьсь наголь ёмлалгады и арай юмамшка ёмланяста; сяс окружностьти кувалмоньди сявеньдсазь потму или перьф тяштьф ламужекстъ периметранц, конань ширензон пяк оцю лувкссна.

5. *Полафневи величинати, кона наголь ёмлалгады и тейнза ули кода арамс и лядомс сяда ёмласта кодама кельк ингелькигя максф величинать коряс, мярьгихть пефтома (бесконечнай) ёмла.*

Корхнихть тяфта, што пефтома ёмла величинась полафтовомстонза ёрай тиевомс нульти ровнакс, што нульсь сонь пределоц. Пефтома ёмла величинаньди кепетьксокс улихть: перьф тяштьф окружностьть радиусонц и сонь потму тяштьф правильнай ламужекстьапофеманц ётксa разностьсь, мзярда сонь ширензон лувксснон пефтома кафтонзасаськ; потмос тяштьф ламужекстьпериметранц и окружностьть кувалмонц ёткса разностьсь, перьф тяштьф ламужекстьпариметранц и окружностьть кувалмонц ёткса разностьсь сяка жа условиятнень пингста.

Сёрмадкшесазь:

$$\left.\begin{array}{l} R-h_n=\text{пефтома ёмланьди}\\ C-p_n=\text{пефтома ёмланьди}\\ P_n-C=\text{пефтома ёмланьди}\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{мзярда правильнай ламужекстьширензон лувксcна кафтонзафт}\\ \text{пефтома ламокстьширензон лувксcна кафтонзафт}\\ \text{пефтома ламоксть.}\end{array}$$

4 §. Окружностьть кувалмонц лувомац. π лувкссь.

1. Окружностьть кувалмонц видеста (непосредственайста) .ункстамс китьксонь ункстамаса аш кода. Сонь кувалмонц шарьхкедьсазь кода пределонь, конаньди ёрай ровнаста арамс правильнай потму и перьф тяштьф ламужекснень периметрасна, мзярда ламужекснень шиpеснон лувкснон кафтонзасаськ пефтома ламоксть.

2. Тянь коряс лувондсазь потму или перьф тяштьф ламужекстьпериметранц, конань пяк лама ширедонза и мзяра лиси, сявеньдьсазь окружностень кувалмоньди. Правильнай потму и перьф тяштьф ламужекснень ширеснон кувалмоснон окружностьть максф радиусонц вельде лувондсазь тяфтама формулань коряс:

$$a_{2n}=\sqrt{2R^2-2R\sqrt{R^2-\frac{a_n^2}{4}}}\quad\text{и}\quad b_n=\frac{a_nR}{\sqrt{R^2-\frac{a_n^2}{4}}}\cdot$$

Окружностьть максф радиусонц вельде ширетнень кувалмоснон, а станяжа правильнай потму тяштьф и перьф тяштьф ламужекснень периметраснон, конатнень шиpеснон лувкссна валом-валом кафтонзакшеви, лувф результатсь няфтьф 183 лопаширеса таблицать эса. Перьф и потму тяштьф фкялемса ламужекснень периметраснон ёткста разностьсь максф 0,00001 молемс точностьс, а ламужекснень шиpесна максфт 0,0000001 молемс точностьса.

Таблицати ванондомста няйсаськ, што ков ламоксть кафтонзасаськ ламужекстьширензон лувксснон, тов: 1) a_n ёмлалгады и p_n-сь касы; 2) b_n-сь ёмлалгады и P_n-сь ёмлалгады; 3) a_n и b_n, p_n и P_n лувксонь значениясна валом-валом малакстомихть; 4) перьф и потму тяштьф ламужекснень периметраснон ёткса p_n-P_n разностьсь сембе сяда ёмлалгады.

Станя и ули: кафцьке периметратне малакстомихть фкя и сяка жа пределти — окружностьть кувалмонцты, ёрайхтъ мархтонза фкя-фкянь вельхтямс, арамс мархтонза фкянь кувалмоса.

n — ширетнень лувкссна	a_n — потму тяштьф ламужексть ширец	p_n — потму тяштьф ламужексть периметрац	b_n — перьф тяштьф ламужекстъ ширец	P_n — перьф тяштьф ламужекстъ периметрац	$P_n - p_n$ — периметратьнень разностьсна
6	1,0000000 R	6,00000 R	1,1547005 R	6,92820 R	0,92820 R
12	0,5176381 R	6,21166 R	0,5358984 R	6,43078 R	0,21912 R
24	0,2610524 R	6,26526 R	0,2633050 R	6,31932 R	0,05406 R
48	0,1308063 R	6,27870 R	0,1310869 R	6,29217 R	0,01347 R
96	0,0654382 R	6,28205 R	0,0654732 R	6,28543 R	0,00337 R
192	0,0327235 R	6,28290 R	0,0327278 R	6,28375 R	0,00085 R
384	0,0163623 R	6,28311 R	0,0163628 R	6,28333 R	0,00022 R
768	0,0081812 R	6,28317 R	0,0081813 R	6,28322 R	0,00005 R

Шарьхкедеви, што кда фкялемса правильнай 768 шире мархта перьф и потму тяштьф ламужекснень периметраснон ёткса разностьсь ули ровна приблизительна 0,00005R-ти, эста максф окружностьть кувалмонь и потму тяштьф ламужекстъ периметранц ёткса разностьсь или перьф тяштьф ламужекстъ периметранц и максф окружностьть кувалмонц ёткса разностьсь ули 0,00005R-ть коряс сяда ёмла, а сяс окружностень кувалмоньди ули кода сявемс пяк лама шире мархта потму или перьф тяштьф ламужекстъ периметранц; ков сяда оцю ули ширень лувкссь, тов сяда точнай ули малакстомась.

Станя, кда сявф 1 *м* кувалмоса радиус мархта окружность, эста $P_n - p_n$ разностьсь, мзярда $n = 768$, ули ровна 0,00005 *м* = = 0,005 *см* = 0,05 *мм* малас, лиякс мярьгемс миллиметрать комсьце пяльксонцты. Шарьхкедеви, што 1 *м* кувалмоса радиус мархта окружностьть и потму или перьф тяштьф ламужекстъ периметранц ёткса разностьсь ули нингя сяда ёмла.

И станя, 0,0001 молемс точностьс R радиус мархта окружностьть C кувалмоц приблизительна ровна 6,2832R-ти, лиякс мярьгемс, $C \approx 6{,}2832R$.

Кда максф выражениять эса окружностьть R радиусонц полафтомс сонь пяле D диаметранц вельде, лиякс мярьгемс, R-ть вастс сявемс $\frac{D}{2}$, эста лиси:

$$C \approx 6{,}2832\, R \approx 6{,}2832 \cdot \frac{D}{2} \approx 3{,}1416\, D.$$

Мекпяльдень формулась няфнесы, што окружностьть C кувалмоц лисеньди сонь диаметранц 3,1416 лувксть лангс ламокстамста.

3. $C \approx 3{,}1416 D$ формулась ляды видекс кодама кельк диаметра мархта окружностьть кувалмонц лувомста. Формулать эзда минь ули: $\frac{C}{D} \approx 3{,}1416$. Тя отношениясь няфнесы, што окружностьть кувалмоц соньцень диаметранц коряс приблизительна 3,1416-кстъ сяда оцю.

Окружностьть C кувалмоц соньцень D диаметранцты отношенияц — лувкссь аф полафневи, кона ровна приблизительна 3,1416-ти.

Тя аф полафневи лувкссь примаф сёрмадкшемс греческай π букваса (морафнекшесазь „пи“), станя $\pi \approx 3{,}1416$. Тя тяштькстъ мархта окружностьть C кувалмонц формуласа сёрмадкшесазь тяфтаня: $\frac{C}{D} = \pi$, или $C = \pi D$, или $C = 2\pi R$, лиякс мярьгемс,

окружностьть кувалмоц π-кстъ сяда оцю соньцень диаметранц коряс, или 2π-кстъ сяда оцю соньцень радиусонц коряс.

4. π лувкссь — иррациональнай лувкс, сяс аш кода сонь точнайста няфтемс кодамовок рациональнай дробьса. Кда окружностень C кувалмоньди сявсаськ правильнай перьф тяштьф ламужекстъ периметранц, конань ширедонза 768, эста минь лиси π-ти приближённай 3,1416 лувкс, кона ули лядыкс мархта и 0,0001-ти молемс точностьса.

Окружностьть C кувалмонц практическай тевса лувомста саты, кда сявемс $\pi \approx 3{,}14$ мянь 0,01 молемс точностьса.

Задачань лувомста сашендови сявеньдемс π лувксти мeклангонь лувкс, лиякс мярьгемс, $\frac{1}{\pi}$ дробть; $\frac{1}{\pi} = 0{,}318$, тя ули мянь 0,001 молемс точностьса; $\frac{1}{\pi}$-ть сявеньдьсазь 0,32-ти ровнайкс, тя ули 0,01 молемс точностьса.

5. Окружностьть кувалмонц лувомать колга кизефкссь лама тёжянь кизонь ётамс заньцезень математикнень ёнснон. Древняй вавилонянтне и еврейхне окружностьть кувалмокс сявеньдезь сонь 3 диаметранзон. Древняй величайшай математикнень эзда фкясь—Архимедсь π-ти музе $3\frac{1}{7}$ лувкстъ, и окружностьть кувалмонц лувондозе сяка жа приёмть вельде, кона няфтьф тя книгать эса. Птоломейть, индуснень и сяда меле арапнень π-ти токадькши 3,1416 лувкссь. Андриан Мецийсь музе, што $\pi = \frac{355}{114}$. Тя лувкстъ тёждя мяляфтомс, кда сёрмадсайть васеньце колма афчётнай 113 355 цифратнень подряд кафкстъ-кафкстъ и тяда меле явсайть колма мекпяльдень цифратнень, колма васеньцетнень эзда.

Нингя средняй веконь пингста π ульсь лувф пяк оцю точность мархта. Сявемс французскай математикть — Виетать (1540 — 1603), сон лувозе π-ть кемень десятичнай знакс молемс точность мархта. Германскай математиксь — Лудольфсь (1649 — 1711) лувозе π-ть 35 десятичнай знак мархта. Тяда меле π лувксти кармасть мярьгема лудольфонь лувкс. Но сяда меле ульсть максфт π-ти ламода сяда точнай значеният. Сявемс английскай математиксь — Шанксь (1812 — 1882) лувсь 707 знакт. Эряви азомс, што нят мекпяльдень лувондоматнень эзда кржа пользада: кигавок аф лувонды Шанксонь лувксонц коряс.

Ламода сяда эрявихть мархтонза сотф теоретическай кизефксне. Нингя пяк кунара кармасть мяляфтома ся задачать, кода видептемс окружностьть, лиякс мярьгемс, кода тяштемс виде китьксонь керфкс, конань кувалмоц максф окружностьть кувалмоса, и лама арьсесть кругть квадратонц колга, лиякс мярьгемс, сянь колга, кода тяштемс квадрат, конань площадец ровна максф кругть площаденцты. Но тя и омбоце тяштемать, содаф, эряви тиемс аньцек кафта инструментса — линейкаса и циркульса, лиякс мярьгемс, аньцек виде китьксонь и окружностень тяштезь. Нят кафцьке задачатне кеместа эсь ётковаст сотфт. Кда тейнек тяштеви стама керфкс, конань кувалмоц ровна окружностьть кувалмонцты, эста кда тя керфксть сявсаськ видеужексонь основаниякс, а радиусть пялениц — сонь серькс, эста лиси видеужекс, кона ули ровнашка максф кругти; видеужексть арафтомс сяшкаста оцю квадратокс аф стака ни; тянь содазе кода тиемс нингя Евклидсь.

Кругть квадратуранц и окружностьть видептеманц колга пяк лама арьсесть лама пяк машты геометрат. Кда окружностьть радиусонц сявсаськ ункстама единицакс, эста пялеокружностьть кувалмоц ули кода сёрмадомс π лувксса. Сяс тянь тиемс эряви циркуль и линейка и тиемс тяфтама керфкс, конань кувалмоц улель π лувксокс. Сяс тяфтама тяштемась ащи сянь эзда, кодама π лувкссь. Нингя 1768 кизоня германскай математик — Ламбертсь няфтезе, што π — лувкссь иррациональнай. Но лама иррациональнай лувкснень ули кода тяштемс циркулень и линейкань вельде. Кда квадратть тяштемста, конань ширец ровна 1 (кувалмонь единицати), и ётафтсаськ сонь диагоналенц, минь лиси стама керфкс, конань кувалмоц ули $\sqrt{2}$ лувксокс. Единицати ровна радиусса тяштьф кругть потму тяштьф правильнай кафксужекстъ ширец ули $\sqrt{2-\sqrt{2}}$ лувкссь, кона станя жа ули кода тяштемс циркулень и линейкань вельде. Но π лувксть, тиемац кода корхтайхть, сяда сложнай. Аньцек тя векта ингельце векть омбоце пестонза французскай математикти — Эрмитти (1873) савсь тиемс тяфтама предложениять, конатнень колга германскай математиксь — Линдеманц (1882) музе, што π лувкссь няфтьф керфкс циркулень и линейкань вельде аф тяштеви. Сяда меле тя няфтемать лама математикт сяда простойгафтозь и тиезь сяда видеста. Станя тяни прокс няфтьф, што кругть квадратурац циркулень и линейкань вельде аф тиеви.

Эряви азомс, што сяда сложнай инструментонь вельде, лиякс мярьгемс сяда сложнай кичкора китьксонь вельде тя тяштемась тиеви, но тянь содазь нингя пяк кунара.

6. *Теорема.* Кафта окружностьтне относятся кода синь радиуссна или диаметрасна.

Максф: C_1 и C_2 — окружностьтнень кувалмосна, R_1 и D_1 и R_2 и D_2 синь радиуссна и диаметрасна.

Эряви няфтемс: $\frac{C_1}{C_2}=\frac{R_1}{R_2}=\frac{D_1}{D_2}$.

Няфтемац. $C_1=2\pi R_1=\pi D_1$; $C_2=2\pi R_2=\pi D_2$.

Кда васеньце равенствать явсаськ башка членонь-член омбоце равенствать лангс, лиси:

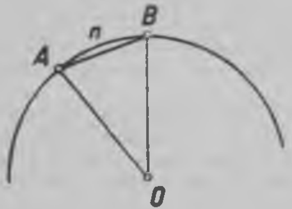
$$\frac{C_1}{C_2}=\frac{2\pi R_1}{2\pi R_2}=\frac{R_1}{R_2};\quad \frac{C_1}{C_2}=\frac{\pi D_1}{\pi D_2}=\frac{D_1}{D_2}.$$

5 §. Дугать кувалмоц.

1-це задачась. *Содамс $n°$ дугать кувалмонц, конань радиусоц* R (281 тяш.).

Тиемац. $AB=n°$ (градусне дугавойхть) дугать каршеса ащи центральнай $AOB\angle=n°$ (градусне уженнет). Фкя дуговой градусть кувалмоц ровна $\frac{2\pi R}{360}=\frac{\pi R}{180}$; но AB дугать эса $n°$, сяс сонь кувалмоц $a=\frac{\pi R\cdot n}{180}$.

n и 360 лувксненьди эряви улемс фкя лемса, тя ули, што кда n-сь максф минутаса, то и 360°-ть эряви шарфтомс минутакс.



281 тяш.

2-це задачась. *Содамс центральнай ужеть величинанц, кона ащи окружностьть радиусонц кувалмоса дугань каршеса.*

Тиемац. $a=\frac{\pi Rn}{180}$ формулать эзда минь ули:

$$n°=\frac{180°\cdot a}{\pi R};$$

задачать условиянц коряс $a=R$, сяс:

$$n°=\frac{180°\cdot R}{\pi R}=\frac{180°}{\pi}\approx 57°18'.$$

Центральнай ужети, конань дугац ровна радиусти, мярьгихть радиана. Радианась приблизительна ровна 57°18'; сяда точнайста радианась ровна 57°17'44",8.

6 §. Кругть, секторть, сегментть площадьсна.

1. Правильнай потму и перьф тяштьф ламужекснень площадьсна ширеснон лувксснон пефтома ламокстъ кафтонзамста величинатне полафневихть. Ширетнень лувксснон пефтома ламокстъ кафтонзамста правильнай потму тяштьф ламужекстъ площадец касы, а перьф тяштьф ламужекстъ площадец — ёмлалгады. Кафцьке нят полафневи величинатне валом-валом малакстомихть фкя и сяка жа пределти молезь. Кона пределти синь молихть, ули кругть площадец.

Станя, *кругть площадец — тя правильнай потму и перьф тяштьф ламужекснень площадьснон пределсна, мзярда синь ширеснон лувксснон кафтонзасазь пефтома ламокстъ.*

Кда кругть площаденц тяштемс K-ть вельде, правильнай перьф тяштьф ламужекстъ площаденц — $S_{\text{перт}}$ вельде и правильнай потму тяштьф ламужексень площаденц — $S_{\text{пт}}$ вельде, эста минь лиси: $S_{\text{пт}}<K<S_{\text{перт}}$.

Ламужекснень ширеснон лувксснон кафтонзакшемста перьф и потму тяштьф ламужекснень площадьснон ёткса, $S_{\text{перт}}-S_{\text{пт}}$ разностьсь валом-валом сембе сяда ёмлалгады. Шарьхкедеви, што нят условиятнень пингста $K-S_{\text{пт}}$ и $S_{\text{перт}}-K$ разностьтне улихть сяда ёмлат $S_{\text{перт}}-S_{\text{пт}}$ разностьть коряс.

Сяс кругонь площадькс сявеньдсазь пяк лама шире мархта правильнай потму или перьф тяштьф ламужекстъ площаденц.

Правильнай перьф тяштьф ламужексть площадец $S_{перт} = \frac{1}{2} P_{перт}R$. Ширетнень лувкснон пефтома ламоксть кафтонзамста ламужексть $P_{перт}$ периметрац малакстоми соньцень C пределонцты — окружностьть кувалмонцты, сяка пингста и сонь $S_{перт}$ площадец малакстоми соньцень K пределонцты — кругть площаденцты. $S_{перт} = \frac{1}{2} P_{перт}R$ равенствась виде мзяра кельк шире мархта ламужексти, сон виде эстовок, мзярда n-сь пяк оцю, но эста $P_{верт}$ отличается C-ть эзда и $S_{перт}$ K-ть эзда сяшкава ёмла величинашка, што сонь ули кода аф лувомс; сяс равенствась виде эстовок, мзярда $P_{перт}$ полафтсаськ сонь C пределсонза и $S_{перт}$ сонь K пределсонза. Станя,

$$K = \frac{1}{2} C \cdot R, \tag{1}$$

лиякс мярьгемс, **кругть площадец ровна сонь окружностенц кувалмонц радиусонц лангс ламокстамать эзда лисьф произведениять пяленцты.**

Кда (1) формулати путомс $C = 2\pi R$, ули:

$$K = \frac{1}{2} CR = \frac{1}{2} 2\pi R \cdot R = \pi R^2.$$

Кда мекпяльдень равенствать эзда R-ть полафтомс $\frac{D}{2}$-ть мархта, эста кругть площаденцты лиси формула:

$$K = \pi R^2 = \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{1}{4} \pi D^2.$$

Станя,

$$\boxed{K = \pi R^2, \text{ или } K = \frac{1}{4} \pi D^2} \quad \text{кв. ед.}$$

1) Кругть площадец ровна сонь радиусонц квадратонцты π лувксть лангс ламокстафста

2) Кругть площадец ровна сонь диаметранц квадратонц нилеце пялькс онцты π лувксть лангс ламокстафста.

Следствия. **Кафта крукнень площадьсна эсь ётковаст относятся станя, кода синь радиусснон или синь диаметраснон квадратсна.**

Афкукс, K_1 и K_2 — кафта крукнень площадьсна, R_1 и R_2 — синь радиуссна, D_1 и D_2 — синь диаметрасна, сяс:

$$K_1 = \pi R_1^2 = \frac{1}{4} \pi D_1^2; \quad K_2 = \pi R_2^2 = \frac{1}{4} \pi D_2^2.$$

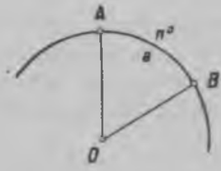
Кда максф равенстватнень явомс башка члененьчлен, лиси:

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{\pi R_1^2}{\pi R_2^2} = \frac{R_1^2}{R_2^2} = \frac{D_1^2}{D_2^2}.$$

2. *Теорема.* **Секторть площадец ровна сонь дуганц кувалмонц радиусонц лангс ламокстамать эзда лисьф произведениять пяленцты.**

Максф: R радиус мархта круг (282 тяш.); дугать кувалмоц $AB \smile = a$ AOB секторть эзда $n°$.

Эряви няфтемс: $S_{cekm} = \frac{1}{2} aR$.



282 тяш.

283 тяш.

Няфтемац. R радиус мархта кругть K площадец ровна πR^2-ти; секторть площадец, конань дугац ровна 1°-ти, ули ровна кругть площаденц $\frac{1}{360}$ пялькСонцты, и сяс сон ровна $\frac{\pi R^2}{360}$. AOB секторть площадец, конань AB дуганц эса $n°$, ровна $S_{cekm} = \frac{\pi R^2 n}{360} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi RnR}{180}$, но $AB \smile = a = \frac{\pi Rn}{180}$, а сяс

$$\boxed{S_{cekm} = \frac{1}{2} aR} \text{ кв. ед.}$$

3. **Сегментть площадец.** AMB сегментть площадец (283 тяш.), кона перяф $AMB = a$ дугаса и AB хордаса, лувондови кода стама разность, кона ули сяка жа a дугать мархта AOB секторть площаденц и равнобедреннай AOB колмужекстъ площаденц ёткса, кона колмужекссь тиевсь AB хордать и кафта радиусснень мархта.

AMB сегментть площадец ровна AOB секторть площаденцты, AOB $\triangle$ площаденцфтома. Секторть площадец ровна $\frac{1}{2} aR$, и колмужекстъ площадец ровна $\frac{1}{2} a_n h_n$, а сяс сегментть площадец ровна $\frac{1}{2} aR - \frac{1}{2} a_n h_n$.

AMB сегментть эса (283 тяш.) AB хордати мярьгихть сонь основанияц, сегментть основаниянц кучканц лангаётай $CM = h$ перпендикулярти мярьгихть сегментть серец, или стрелкац.

Кизефкст и упражненият.

1. Мзярода касы окружностьть кувалмоц, кда сонь радиусонц касфтомс 1 метрада?

2. Мзярокст правильнай колмужекстъ потму тяштьф окружностьть кувалмоц сяда ёмла перьф тяштьф окружностьть кувалмонц коряс?

3. Мзяроксть кругть площадец, конань потму тяштьф правильнай колмужекс, сяда оцю тя колмужекстъ потму тяштьф кругть площаденц коряс?

4. Лувомс, мзярода сяда оцю $R=1,0$ *м* радиусса тяштьф дугать кувалмоц, конань эса 120°, сонь кемекстай хорданц коряс.

5. 0,01 точностень мархта лувф пялеокружностьть кувалмоц приближённайста ровна a_3+a_4. Проверяндамс.

6. $R=3,0$ *м* радиусса тяштьф колма ровна окружностьтне кафтонь-кафта токайхть уше ширьде. Мумс окружностьтнень ёткста „кичкора китьксонь" колмужекстъ площаденц.

7. *Видеужень колмужекстъ 2a, 2b и 2c ширенза арсихть кругтненьди диаметракс. Гипотенузать лангса тяштьф кругть площадец ровна катеттнень лангса тяштьф круккнень площадьснон суммати. Няфтемс тянь.*

8. $R=1,0$ *м* радиусса тяштьф ровна кафта окружностьтне токайхть уше ширьде. Тяштемс колмоце окружностьть, кона явсыня максф окружностьтнень кучкава и лувомс кафта максф круккнень марстонь пяльксснон площаденц и колмоце кругть площаденц.

9. $R=2$ *м* радиусса тяштьф кругсь концентрическай окружностьса явф кучкава. Мумс концентрическай окружностьть радиусонц.

10. Няфтемс, што *кольцять площадец ровна* $\pi(R+r)(R-r)$, *коса* R и r — *ушестонь и потмостонь радиусне.*

ОТВЕТТНЕ.

II	пр. 25-це лоп.	4. 80° и 100°. 5. 76°,5; 45°. 6. 61°. 8. 90°.
III	„ 33-це „	3. 5 *см*, 5 *см* и 4 *см* или $4\frac{1}{3}$ *см*, $4\frac{1}{3}$ *см* и $5\frac{1}{3}$ *см*.
VI	„ 48-це „	1. $\frac{a}{2}$. 2. a и b.
VII	„ 60—61-це „	1. $AB \parallel CD$. 2. $CD \perp KL$. 3. 45° и 135°; 78°45′ и 101°15′; 80° и 100°; 108°,5 и 71°,5. 7. 108° и 72°; 80° и 100°; 110° и 70°; 50° и 130°; 108°; 80°; 110° и 50°. 8. 30°, 60° и 90°; аш кода.
VIII	„ 79—80-це „	2. 24,2 *см*. 11. 10 *см*.
IX	„ 93-це „	2. 9-ксть. 3. Да. 4. 250 *м*. 5. Квадратть площадец 900 *см*^{2} сяда оцю. 6. Квадратть периметрац 60 *см* сяда ёмла. 8. 25 *см*^{2}.
XI	„105—106-це„	6. Мзяра кельк. 8. 6 *см*. 12. 2) $2r$-да; 3) 3 *см* и 7 *см* радиусса тяштьфть концентрическай окружностьт. 13. Виде китькссь, кона параллельнай максф виде китьксненьди и ётай синь ётковаст кучкава; AB и CD ёткса ужетнень кафта биссектрисасна. 16. Концентрическай окружность, конань радиусоц ровна центрать эзда хордати молемс расстоянияти.
XII	„ 113-це „	1. 30°, 35° и 115°. 237°,5, 60° и 82°,5. 5. 80°. 6. 70°.
XIII	„ 119-це „	2. 8 *см* и 4 *см* кувалмоса радиусса тяштьф концентрическай окружностьт. 3. 1,5 *см* и 6,5 *см*; 3 *см*.
XIV	„ 123-це „	5. Окружностьтне, конатнень диаметрасна ровна ся керфксти, кона керфксти пекс арсихть максф точкась и максф окружностьть центрац.
XV	„ 134-це „	2. Ётафтомс биссектриса. 3. 2; 2; 0,5. 6. 12,3 *см* и 8 *см*.
XVI	„ 147-це „	9. Омбоцесь и колмоцесь. 10. 6 *см*. 11. 1,5 *см* и 4,5 *см*. 12. Видеужексне подобнайхть аньцек эста, кда синь кафцьке квадратт.
XVII	„ 155-це „	1. а) Аш кода. б) Да. 2. Оржужень; тяштемати аш кода улемс. 3. 10 *см*, $13\frac{1}{3}$ *см* и $16\frac{2}{3}$ *см*. 4. 4 *кг*.
XVIII	„ 160—161-це„	2. $5\sqrt{3}$ *см*, и $10\sqrt{3}$ *см*. 3. 4 *см*. 4. $R\sqrt{3}$; фкя колмоце пялькссонц.
XIX	„ 165-це „	1. Сяс мес $2+4\pm3+5$. 2. Сяс мес $1+3\mp2+4$. 9. 7 *см*.
XX	„ 176-це „	2. $\frac{1}{3}a\sqrt{3}$; $\frac{1}{3}a\sqrt{2}$; $\frac{1}{2}a\sqrt{2(2+\sqrt{2})}$. 3. 1) $R\sqrt{2}$; $R\sqrt{2+\sqrt{2}}$; $2R$; 2) R; $R\sqrt{2}$; $R\sqrt{3}$; $R\sqrt{2+\sqrt{3}}$; $2R$. 4. $\frac{1}{2}b\sqrt{3}$. 6. $\frac{1}{2}R\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.
XXI	„188—189-це„	1. 2π *м*-да. 2. 2-ксть. 3. 4-ксть. 4. ≈ 36 *см*-да 6. 1,4 *м*^{2} 8. $2R^2(\pi-1)\approx 4{,}3$ *м*^{2}. 9. $\frac{1}{5}R\sqrt{2}\approx 1{,}4$ *м*.

ТЕРМИНТ.

Аф параллельнайхть — не параллельные.
Афравенства — неравенство.
Аф ункставикст — несоизмеримы.
Боконь ширенза — боковые стороны.
Виде китькс — прямая линия.
Виде уже — прямой угол.
Видеужекс — прямоугольник.
Видеужень — прямоугольный.
Каршек ащи ужет—вертикальные (противоположные) углы.
Кафтонзаф — удвоенный.
Келептьф уже — развернутый угол.
Кеме (фигура) — жесткая (фигура).
Кемекснесы — стягивает.
Керы китькс — секущая (линия).
Керфкс — отрезок.
Китькс — линия.
Кичкора китькс — кривая линия.
Колмонзаф — утроенный.
Колмужекс — треугольник.
Котужекс — шестиугольник.
Кучкастонь китькс — средняя линия.
Ламужекс — многоугольник.
Ланга — поверхность.
Лапш — плоский.
Лапш ланга — плоскость.
Лезды (китькс, окружность) — вспомогательная (линия, окружность).
Меклангонь (теорема) — обратная теорема).
Мельцек-мельцек — последовательно.
Накрест ащи — накрестлежащий.
Нежеди — опирается.
Нилеужекс — четыреугольник.
Ношка уже — тупой угол.
Ношка ужень — тупоугольный.
Няфтемс — доказать.
Оржа уже — острый угол.
Оржужень — остроугольный.
Осевай симметриясь — осевая симметрия.
Ось — ось.
Пялепериметрась — полупериметр.
Перьф тяштемс — описать.
Пт — потму тяштьф (вписанный),
Перт — перьф тяштьф (описанный).
Пефтома ёмла — бесконечно малая.
Полафневи (лувкс)—переменное(число).
Подобнай (колмужекс)—подобный (треугольник).
Потмостонь ужет — внутренние углы.
Потмостонь фкя ширень уже—внутренний односторонний угол.
Потму тяштьф — вписанный.
Правильнай ламужекс — правильный многоугольник.
Пря — вершина.
Прять вакса — при вершине.
Ровнашка — равновеликий.
Ровнаширень — равносторонний.
Ровнаужень — равноугольный.
Рознаширень — разносторонний.
Серь — высота.
Серьстамс — сравнить.
Синнеф китькс — ломанная линия.
Смежнай ужет — смежные углы.
Соответственнайста ащи — соответственно расположены.
Токай китькс — касательная линия.
Туркс ётай — пересекающийся.
Тяштькс — чертёж.
Тяштемс — начертит, нарисовать.
Уже — угол.
Ужекс — угольник.
Ункстави керфкс — соизмеримый отрезок.
Ушеширьдень — внешний.
Фкякс аердф — равноудаленный.
Фкялемса — одноименный.
Фкя-фкянь туркс ётайхть — взамнопересекаются.
Фкя-фкянь вельхтяйхть — совпадут.
Фкяширень — односторонний.
Центрань вешеньдема — центроискатель.
Шарьхкедема — понятие.
Ширемф китькс — наклонная линия.
Ширемфужень — косоугольный.
Шовор китькст — смешанные линии.
Эряви няфтемс — нужно доказать.

ПРЯЗКС.

XXI. Окружностьть кувалмоц и кругть площадец.

НЯЙФ ЭЛЬБЯДЬКСНЕ:

Лопашир	Строчкась	Сёрмадф	Эряви
39	1 алулда	рхта	мархта
„	3 „	точкаса,	*С* точкаса,
118	17 „	баша	башка
„	18 „	Тяакштемань	Тяштемань

2068

Питнец 1 цал. 60 тр.
Цена 1 руб. 60 коп.
У. 2. н.

Ю. О. ГУРВИЦ и Р. В. ГАНГНУС

СИСТЕМАТИЧЕСКИЙ КУРС ГЕОМЕТРИИ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ПЛАНИМЕТРИЯ

Учебник
для 6—8 классов неполной
средней и средней школы

На мордва-мокша языке