Ju. O. Gurvic ꞅa R. V. Gangnus

GEOMETRIA

ŞISŢEMAŢIÇESKƏJ KURS

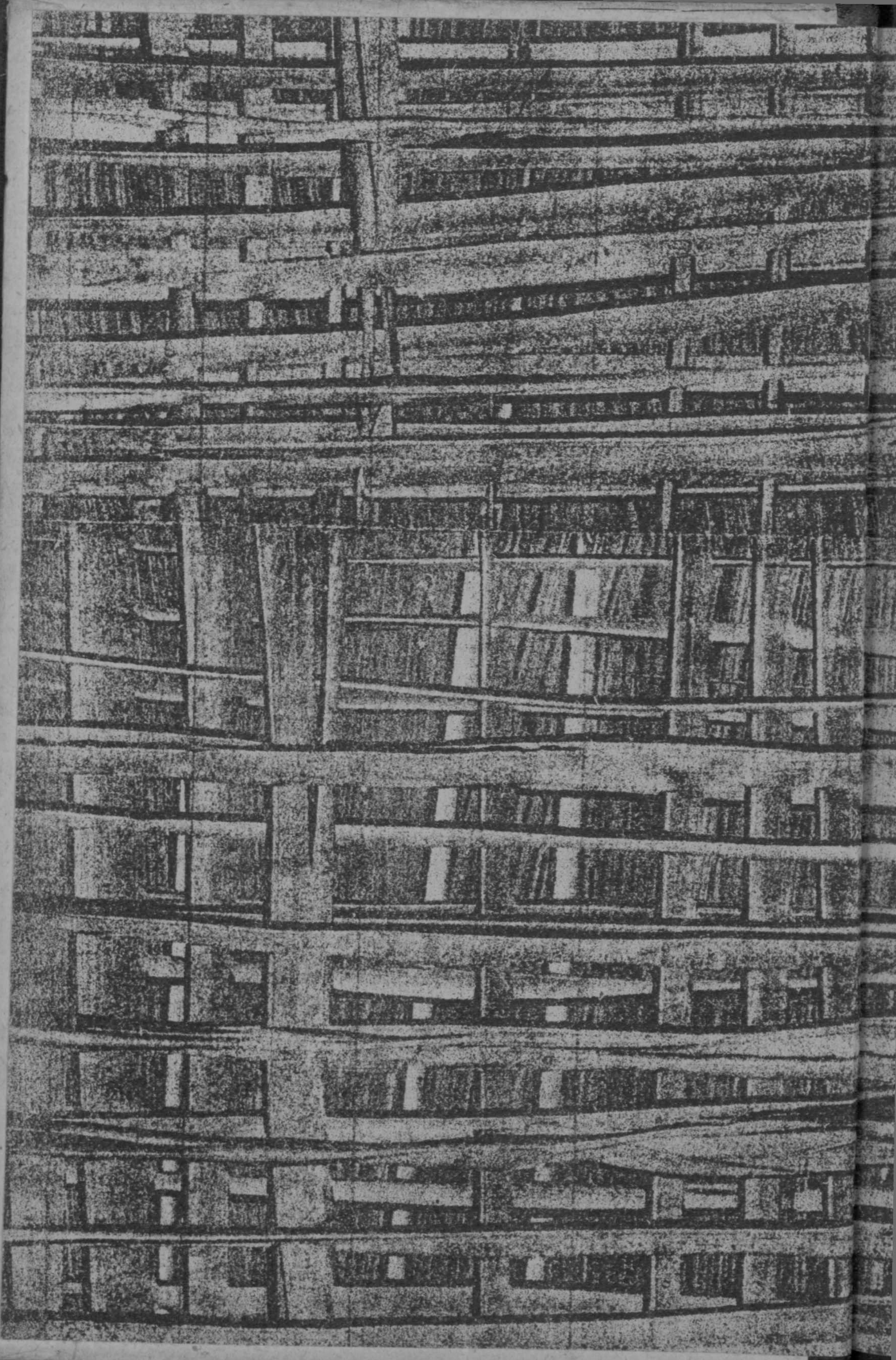
8ƏRƏT 8KOLA PONDA

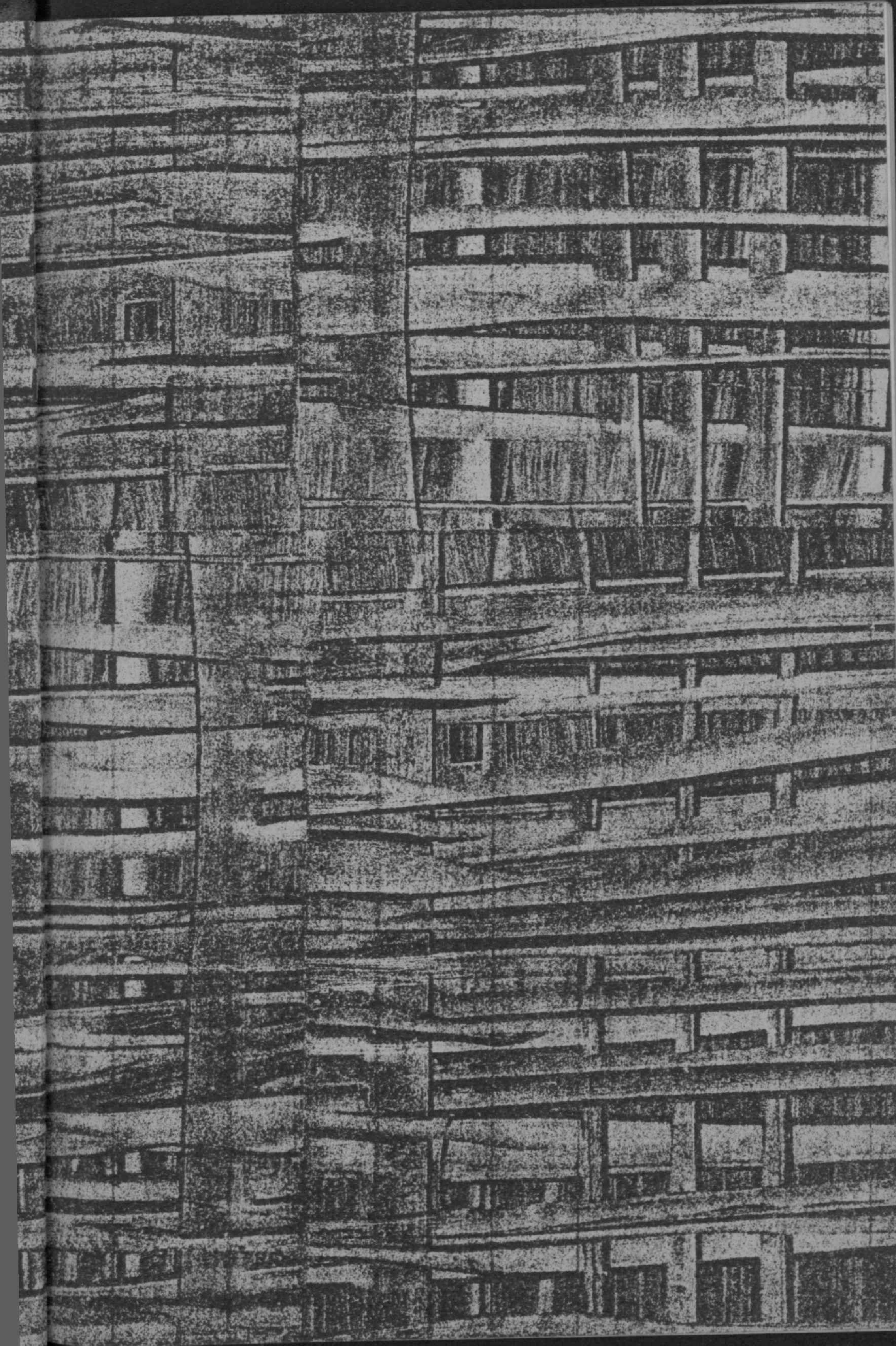
VELƏTÇAN KꞐIGA

I TOR

Plaꞑimetria

GOSUDARSTVENNƏJ
UÇEBNO-PEDAGOGIÇESKƏJ IZDAŢEĻSTVO
MOSKVA 1934





Ju. O. GURVIC da R. V. GANGNUS

GEOMETRIA

ŞISŢEMAŢIÇESKƏJ KURS

SƏRƏT SKOLA PONDA
6—8 KLASSEZLƏ
VEĻƏTÇAN KŅIGA

I TOR

Plaņimetria

Vuzətis *D. V. Mexonosin*

VUZƏTƏM 1933 VOŞA IZDAŅŅO ŞƏRTI

Viştalis lезпь RSFSR Narkomproslən koļļegia. Vuzətəmsə viştalis lезпь Komi okruglən Oţir velətan jukət

GOSUDARSTVENNƏJ
UÇEBNO-PEDAGOGIÇESKƏJ IZDAŢEĻSTVO
MOSKVA 1934

TERMINNEZ.

bərəna ţeorema — обратная теорема
centra — центр
çeglaşəm viz — ломанная
çukьla viz — кривая линия
əkşan — произведение
ətlaaləm — соединение
ətlador peləssez — односторонние углы
ətlas — сумма
ətvьlaşəm — совпадение
ətьzda (ьzda) — равный, равно
ətьzdaladora — равносторонний
ətьzdapeləsa — равноугольный
ətьzdaşəm — равенство
əтьzdaşnь — равняться
ətəriş peləs — внешний угол
gəgian — круг
gəgrəs — окружность
jugər — луч
jukəm — деление
jukəs — частное
jьv — вершина
kerəm — решение
kolan — остаток
kresta peləssez — накрестлежащие углы
krestalan viz — секущая
krestaşan veşkьt vizzez — пересекающиеся прямые
kuimpeləsa figura — треугольник
kuza — длина
lador — сторона
lьddəs — число
nolpeləsa figura — четырехугольник
merajtəm — измерение
oçakujlan — прилежащий
ordça peləssez — смежные углы
orətok — отрезок
orlьtəm proporcia — непрерывная пропорция
panьta — противоположный
panьtakujlan — противолежащий
pasjaləm — обозначение
paşkətəm peləs — развернутый угол
paşkьt peləs — тупой угол
paşkьtpeləsa — тупоугольный
paşta — ширина
pavkətçan viz — касательная
peləs — угол
petkətas — следствие
pədana — замкнутый
pəlina viz — наклонная
pod — основание
pьekiş peləs — внутрений угол
pьrtəm — вписанный
pьrttəm — описанный
sora viz — смешанная линия
stroitəm — построение
sər viz — средняя линия
sərət arifmeţiçeskəj — среднее арифметическое
sərət geometriçeskəj — среднее геометрическое
unapeləsa figura — многоугольник
veknit peləs — острый угол
veknitpeləsa — остроугольный
veşkəv — направление
veşkьt viz — прямая
veşkьtviza figura — прямолинейная фигура
veşkьtpeləsa figura — прямоугольник
veşkьtpeləsa — прямоугольный
viz — линия
ьzda — размер

Отв. редактор *Грибанов, С. Ф.*
Корректор *Тетюева, З. А.*
Техредактор *Рожин Вл.*

Книга сдана в набор 13/IV-34 г.; подписана к печати 21/VI-34 г. Учгиз № 5921. Инд. У. 2 н. Печ. л. $10^3/_4$. Бум. листов $5^6/_8$. Количество типогр. знаков на 1 бум. лист 106.080. Бумага № $3^1/_2$, формат 62×94 см фабрики „Сокол".
Уполн. Главлита № В-72407. Заказ № 2389. Тираж 3000 экз.

17 ф-ка нац. книги ОГИЗ'а РСФСР треста «Полиграфкнига»
Москва, Шлюзовая наб., д. № 10

PЬṘTAS.

GEOMETRIAIŞ OSNOVNƏJ VEƵƏRTASSEZ.

1 §. Fiẓiçeskəj da geometriçeskəj ţelo.

Mijan gəgərьn вьdəs predmettes, ļiвo ţeloes, ətikən ətkoďəş — nija zajmitənь prostranstvoiş opredeļonnəj tor. Sьşşa вьd ţelolən unaəş askoď fiẓiçeskəj svojstvoez. Ena fiẓiçeskəj svojstvoez şərti i poẓə ətik ţelo tədnь mədik ţeloez kolasiş. Seєəm fiẓiçeskəj svojstvoezən loənь: ţelolən ves, massa, ņepronicaemoş, uprugoş, rəm da mədik svojstvoez, kədna viзşənь sь şərti, kьєəm vessestvoiş kerəm ţeloьs. Fiẓiçeskəj svojstvoezşa eməş esə вьd ţelolən mədkoď, vevdəriş svojstvoez — f o r m a, ь ƶ d a d a p o l o ƶ e ņ ņ o. Ţelolən ena medвərja svojstvoes suşənь g e o m e t r i ç e s k ə j s v o j s t v o e z ə n.

Ţeloliş fiẓiçeskəj svojstvoesə veլətənь (tədmətənь) priroda tədmalan naukaez: fiẓika, ximia da məd. Geometriçeskəj svojstvoez — ţeloliş formasə, ьƶdasə da poloƶeņņosə,— kədna вьd ţeloьslən aвu ətkoďəş i kədna şərti mijə vermam ətik ţelo tədnь mədik ţeloez kolasьn, veլətə g e o m e t r i a. Geometriaьs ņekər oz viзət sь vьlə, kьєəməş ţeloьslən fiẓiçeskəj svojstvoes. Sijən geometria veլətiş mortlə loə ətkoď, boştas-ja ţeloliş formasə da sьliş geometriçeskəj svojstvoesə tədmaləm ponda kərtovəj kuв aļi graņitiş voļkьta poļirujtəm kuв, reẓinovəj sar aļi koskaiş təçitəm sar, stoķļannəj prizma aļi puovəj prizma i s. oз.

Medвь вurƶьka tədmavnь ţeloezliş formasə, geometria veլətişlə oz kov viзətnь fiẓiçeskəj svojstvoez vьlə, a kolə kuƶnь vņimaņņo inďətnь da viзətnь toko ətik svojstvo vьlə — ţeloes forma vьlə.

Вьļiş-ƶə ţeloьslən formaьs oz jansav mədik svojstvoez dьniş i geometriaьs toko ţeloliş forma veլətikə jansətə ţelo вerdşis sijə formasə, kəda вьļiş em prostranstvoьn. Unavekşa opьtən mort velalis dumajtnь otvļeçonnəj (torja) formaezən, tədmalis nьliş askoďdesə (osoвennoşşesə) da вьd torja formaliş svojstvosə pьrtə, boştə aslas olanə: ţexņikaə, proizvodstvoə.

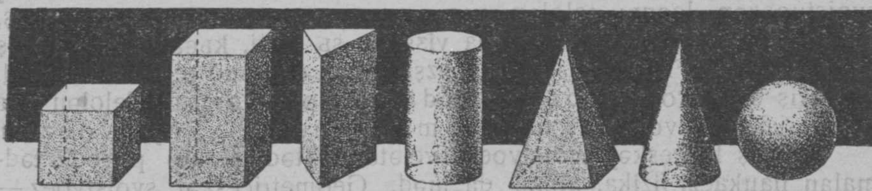
Siзkə, geometriaьs tədmalə ņe fiẓiçeskəj ţelo da sьliş fiẓiçeskəj svojstvoesə, a ţelo, kədalən kьз-вь çapkəmaş вьdəs fiẓiçeskəj svojstvoes, koļəma toko forma da ьƶdaьs sija fiẓiçeskəj ţelolən, kəda вerdiş mijan dumaən jansətəmaş, çapkəmaş fiẓiçeskəj svojstvoes. Etєəm ţeloes suşənь g e o m e t r i ç e s k ə j ţ e l o e z ə n. Tədamə-kə, sto вьd fiẓiçeskəj ţeloьs zajmitə prostranstvoiş opredeļonnəj tor, vermam sunь: **geometriçeskəj ţeloьs prostranstvo tor, kədə as uvtas viзə fiẓiçeskəj ţelo,** mədņoƶən — **geometriçeskəj ţeloьs вьd ladorşaņ graņiçitəm prostranstvo tor.**

Geometriçeskəj ţelolən, kьз i вьd fiẓiçeskəj ţelolən, kuim merajtan: kuẓa, paşta da vьlьna ļiвo kьza. Jansətam-kə ţelo вerdiş kьɛəmkə tor, to eta ţelo torьs loas sizžə ţeloən. Sija, mьj ţelosə jansətə sь gəgər prostranstvoiş da mədik ţeloez dьniş, suşə sь v e v d ə r ə n (poverxnoşən); **ţelolən graņicaьs — vevdər.**

Mijan gəgərьn unaəş вьdkoḍ vevdərres. Nьlən formaьs ovlə sь şərti, kьɛəm formaaəş ţeloes. Siз, doska, pьzan, vedra, maç, sar, ciļindra, konus aвu ətkoḍəş vevdərnanь, вьd predmetlən vevdərьs вьdsən ţelo forma şərti arkməma.

Ţelo vevdərsə poẓə juknь una tor vьlə, i вьd torьs sьlən loə sizžə vevdər.

1 risunokьn mьççaləmaş вьdkoḍ formaa ţeloez: kuв, veşkьtpeļəsa paraļļeļepiped, prizma, ciļindra, piramida, konus, sar. Enaiş ətik ţeloez — kuв, вrus, prizma, piramida — ploskəj vevdəraəş, mədik ţeloez, suam, sar, — çukьļa vevdəraəş, a kuimət ţeloez — ciļindra da konus — graņiçitəmaş ploskəj da çukьļa vevdərrezən.



1 ris.

Vevdərlən kьk merajtan: kuẓa da paşta. Vevdər graņica, mədņož sunь, sija mestaьs, kьtən ţelolən ətik vevdər tor krestaşə mədik vevdər torkət, suşə v i ẓ ə n. **Ţelo graņicaən loə viẓ.** Viẓlən toko ətik merajtan—kuẓa. 1 risunokiş vizətam kuв. Ķuвlən dorьвьs—mesta, kьtən oça loktənь kьk graņ. A вьd graņьs as şərna loə вьdsa kuв vevdərlən tor.

Viẓ poẓə juknь una torjə. Jukəm вərьn вьd viẓ torьs вəra zə loə viẓən.

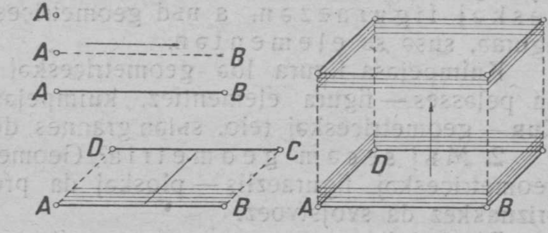
Viẓlən graņica — çut. Çut oz tuj merajtnь. Çutьs seɛəm mesta, kьtən krestaşənь kьk ļiвo unažьk viẓ. Siз, 1 risunokьn kuвlən jьвs loə kuim viẓ krestaşan mestaən. Vevdərresə, viẓẓesə da çuttesə poẓə aззьnь toko ţeloez vьliş, torjən nija oz ovlə. Geometriaьn-kə i mijə şorņitam vevdərres, viẓẓes da çuttes jьliş kьз kьɛəmkə torjaez jьliş, to etə toko sijən, mьļa mijə aslanьm dumaьn boştam nijə ņe ţeloezkət, a janьn, kьз вьţţe ţeloes вerdiş torjətəmən.

Ţelo, vevdər, viẓ da çut suşənь g e o m e t r i ç e s k ə j o в r a z z e z ə n.

2 §. Geometriçeskəj oвrazzezlən veztaşəmən sogməm.

Çutən pjatnajtənь opredeļonnəj mesta prostranstvoьn, aş kəţ eta mestaьs loə ţelo vevdərьn, ļiвo ţelo pьɛkьn, ţelo vevdərət nuətəm viẓ vьlьn, ļiвo viẓ vьlьn, kəda mijan dumaən jansətəm ţelo вerdiş.

Çut, kər sija vez̧ə prostranstvoьn mestasə (2 ris.), vez̧səmnas kьз вь çerţitə kьєəmkə viz̧. Eta şərti suənь: v i z̧ ь s v e z̧ s a n ç u t l ə n s ļ e d. Ķər mijə pemьtinьn pondam çoz̧a ətmədərə novjətnь som, kəda vaçkişə jugjalan çutlaņ, sek poz̧ə aззьvnь viz̧koḑə, kəda вьd suvtçaninə (poloz̧eņņoə) вьţţe sļedən koļə somsə prostranstvoьn novjətikə.



2 ris.

Siз-z̧ə tujə dumajtnь, sto vevdər sogmə prostranstvoьn viz̧ vez̧taləmşaņ (2 ris.), medвь toko eta dьrņi viz̧ьs ez vestaş aslas oзza mestaiş veşkəv (napravļeņņo) kuz̧a. Əddən çoz̧a bergalan koļosolən paļeççes jitşənь kьз-вь ətlaə i şetənь vevdər.

Vevdər vez̧sə-kə ņe sija veşkəv kuz̧a, kəda sьlən vəli oзza mestaas, sek vevdər vez̧taşəmşaņ loə ţelo (2 ris.).

Ḑiametra gəgər gəgļan bergalikə petə sar.

3 §. Viz̧z̧ez da vevdərrez.

1. Ţeloez vьlьn eməş veşkьt da çukьļa viz̧z̧ez.

Suam, kuвlən sija mestaьn, kьtən kьk graņ oça loktənь, loə dorьs — veşkьt viz̧; ciļindralən kьtən oça loktənь sьlən вokiş vevdərьs da podьs, loə gəgrəs — sija çukьļa viz̧.

Mьj seєəm veşkьt viz̧, toçnəja viştavnь oz poz̧. Veşkьt viz̧ jьliş vez̧ərtəmsə kolə lьddьnь osnovnəjən; etə vez̧ərtnь mort verme toko opьtiş.

Veşkəv şərti (napravļeņņo şərti) veşkьt viz̧z̧ez ovlənь gorizontaļnəjəş da verţikaļnəjəş. Gorizontaļnəj veşkьt viz̧liş veşkəvsə mьççalə вed, kər sija kujlə ram va vьlьn. Verţikaļnəj veşkьt viz̧liş veşkəvsə mьççalə otves, mədņoz̧, snur, kədalən koņeças domaləm kьєəmkə ņeьзьt giriok. Verţikaļnəj veşkьt viz̧ьs seєəm veşkьt viz̧, kəda munə mu centralaņ.

2. Ţelo vevdərrez ovlənь ploskəjəş da çukьļaəş.

P l o s k ə j v e v d ə r ə n, ļiвo prosto p l o s k o ş ə n, mijə suam seєəm vevdər, kəda вerdə veşkьt viz̧ vermə вьdņoz̧ən top loknь. Suam, ploskoşən loas əddən вura poļirujtəm pьz̧an pəv. Ķьз-вь pьz̧an pəv вerdə mijə eg vajətlə ļiņejka dorьs, ļiņejka kolasas da pьz̧an pəv kolasas oz lo ņekьєəm kolasok i ļiņejkaьs pьr pondas top pukşьnь pьz̧an pəv вerdas.

Ķuв graņņez, ciļindra poddez, konus poddez — вьdəs nija вəra-z̧ə ploskoşşez. Sarlən vevdər, ciļindralən da konuslən вokiş vevdər loənь ç u k ь ļ a v e v d ə r r e z ə n. Ļiņejka dorьs, kər sijə puktam sar вerdə, ņekər top oz lok. Puktam-kə ļiņejkasə dorьsnas ciļindra вerdə, ļiвo konus вerdə, to sija ņ e p ь r top loktə ena ţeloes vevdər вerdəз.

Gorizontaļnəj vevdərən lьddişşə ņeьзьt doz̧iş ləņ va vevdər.

4 §. Geometria da sьlən jukəttez.

1. Geometriçeskəj oвrazzez: çut, viz, vevdər, telo pozə vizətnь вьdsə torjən liво ətamədkət opredelonnəja ətlaaləmən. Kьз-вь mijə nijə eg vizətə, geometriçeskəj oвrazzes suşənь sizzə geometriçeskəj figuraezən, a вьd geometriçeskəj oвrazьs, kəda pьrə figuraə, suşə sь elementən.

Kuimpeləsa figura loə geometriçeskəj figuraən, sьlən ladorres da peləsses — figura elementtez, kuimpeləsa figuralən elementtez. Kuв — geometriçeskəj telo, sьlən grannes, dorьsses — kuв elementtez.

2. Мьj seєəm geometria? Geometriaьs nauka, kəda velətə geometriçeskəj figuraezliş — ploskəj da prostranstvennəj figuraezliş priznakkez da svojstvoez.

Ploskəj figuraezən suşənь seєəm figuraez, kədnalən вьdəs elementteznьs kujlənь toko ətik ploskoşьn: suam kuimpeləsa figura, krestaşan kьk veşkьt viz, gəgrəs — ploskəj figuraez.

Prostranstvennəj figuraezən suşənь seєəm figuraez, kədnalən вьdəs torreznьs ətik ploskoş vьlə tərnь oz vermə. Prostranstvennəj figuraezən, liво teloezən, loənь ətamədkət krestaşan kьk ploskoş, kuв, prizma, cilindra, sar i siз oз.

Geometria jukşə kьk torjə — planimetria vьlə, kəda velətə ploskəj figuraezliş svojstvoez, da stereometria vьlə, kəda velətə prostranstvennəj figuraezliş, liво teloezliş svojstvoez. Geometriaьs, kьз i вьd mədik nauka, çuzis naвludennoeziş da opьtiş i ьzdis sь şərti, kьз paşkalisə mortlən kəzajstvennəj potreвnosşes. Geometria kьlьs greçeskəj kьv. Mijan kьv vьlьn-kə viştavnь, loə mumerajtəm.

3. Geometriaьs çuzis mijan era pondətçəməз una vek sajьn. Esə Asьvvьliş kulturnəj otirrez, vavilonana da jegiptana, vel una tədəmaş geometria jьliş. Geometriasə tədəmьs пьlə kovşəm mu merajtikə, stroitçikə da sek, kər nija tədmaləmaş zvezdaez vetləm jьliş. Sьвərьn geometriaьs nauçnəja zoramis Greciaьn. Medoззa greçeskəj matematikkez, jegiptanalən velətçişşez, esə mijan eraəз 6 vek sajьn tədəmaş una geometriçeskəj figuraezliş svojstvoesə. Prostəjzьk geometriçeskəj oвrazzezliş svojstvoez tədəm şərti, kədna vəli veşkьta poluçitəməş opьtiş, nija petkətəmaş mədik una sloznəjzьk geometriçeskəj oвrazzezliş svojstvoez. Jevklidəз, kəda oləm mijan era pondətçəməз 3 vek sajьn, otirьs paşkьta tədəm-ni geometriçeskəj oвrazzez jьliş. Ədddən ьзьt zaslugaьs Jevklidlən, kəda aslas „Pondətçəmmez“ knigaьn əktəm ətik şistemaə вьdəs, mьj sija tədəm figuraes da teloes svojstvoez jьliş.

I. VEŞKЬT VIZ.

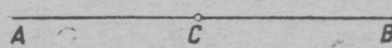
1 §. Veşkьt viz. Jugər. Orətok. Çeglaşəm viz. Çukьla viz.

Veşkьt viz — vizzez kolasiş medprostəj viz. Veşkьt vizlan vermə vaçkişnь zelьta nuzətəm sunis, pravilnəj linejka dorьs; sondi jugərrez, kər nija pьrasə pemьt zьrjə uçitik oştaokət, munənь veşkьt viz kuza.

Veşkьt viȥsə aslanьm dumaən mijə vermam вoşnь kьknan ladorə koꞑeçtəg ꞑuƶətəm viȥən.

Veşkьt viȥ pasjaşşə laţin alfavitiş kьk ьзьt sьpasən; ena sьpasses suvtətçənь veşkьt viȥ vevdəras ļiвo uvtas ətaməd dьnşaꞑ mьjkə ьlьna. 3 risunokьn çerţitəm veşkьt *AB* viȥ.

3 ris.



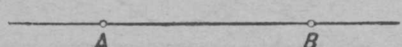
4 ris.

Кьtənkə veşkьt *AB* viȥ vьlas вoştam-kə *C* çut, to eta *C* çutьs jukas veşkьt *AB* viȥsə i loas kьk jugər: *CA* da *CB* (4 ris.).

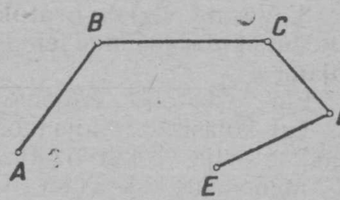
C çutьs loə jugər pondətçan ļiвo petan çutən. Pasjalikə sija suvtətçə medoзза mestaə. Jugərьs vermə koꞑeçtəg ꞑuƶavnь toko ətladorə. Siз, *CA* jugər *C* çutşaꞑ poȥə koꞑeçtəg ꞑuƶətnь toko suļgalaꞑə, *CB* jugər — veşkьtlaꞑə. Eta şərti:

kьk, *CA* da *CB*, jugəriş, kədna petənь ətik *C* çutşaꞑ da ꞑuƶalənь ətamədlə panьta veşkəvvez (napravļeꞑꞑoez) kuȥa, arkmə ətik veşkьt viȥ.

Boşnь-kə veşkьt viȥ vьlьn kьk, *A* da *B* çut, to nь kolasiş veşkьt viȥlən tor suşə **orətokən**. Veşkьt viȥlən orətokьs pasjaşşə kьk ьзьt sьpasən, kədna suvtətçənь sь koꞑeççezə: *AB* (5 ris.) — veşkьt viȥlən orətok. Ꞑesoça orətoksə pasjaləm ponda suvtətənь ətik uçət sьpas, suam *a*, kəda giƶşə orətok uvtas ļiвo vevdəras, kьtçəkə sər gəgəras; seki *a* pasjalə вoştəm mastaв ətsaezən i orətok kuȥasə.



5 ris.

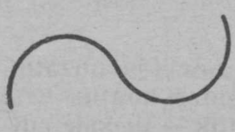


6 ris.

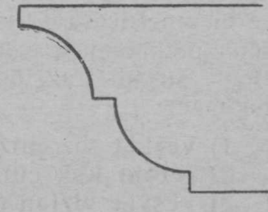
Viȥ, kəda kerəm (jitəm) ꞑe ətik veşkьt viȥ vьlьn kujlan veşkьt viȥ orətokkeziş, suşə **çeglaşəm** viȥən (6 ris.). Orətokkez, kədnaiş jitəm çeglaşəm viȥьs, suşənь sь **ladorrezən**. Çeglaşəm viȥ pasjaşşə ьзьt sьpassezən, kədna suvtətçənь sь lador koꞑeççez dьnə, suam çeglaşəm *ABCDE* viȥ.

Çukьļa viȥən suşə viȥ, kədaьn aвu veşkьt viȥlən ətik orətok (7 ris.).

Sora viȥən suşə viȥ, kəda arkməma veşkьt viȥ orətokkeziş da çukьļa viȥ torreziş (8 ris.).



7 ris.



8 ris.

2 §. Veşkьt viȥlən akşiomaez.

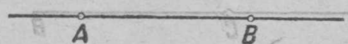
1. Veşkьt viȥ poȥə koꞑeçtəg ꞑuƶətnь kьknan ladorə.

Eta svojstvoşa veşkьt viȥlən eməş i mədik svojstvoez.

Pasjam ploskoş vьlьn kьk *A* da *B* (9 ris.) çutliş mestaez. Nuətam ena *A* da *B* çutət praviļnəj ļiꞑejka şərti veşkьt viȥ. Peslişam-kə ena-ƶə

A da *B* çutət nuətnь mədik veşkьt viz, to sija вьdsən ətvьlaşas ȯззaьskət; eta şərti vermam sunь, sto

2. Şetəm kьk çutət poz̧ə nuətnь veşkьt viz̧ i toko ətikə. Eta— veşkьt viz̧lən mədik svojstvo; sija viştalə, sto *вьd veşkьt viz̧lən mestaьs (kujlaninьs) вьdsən tədşə kьk çut şərti.*



9 ris.

Eta şərti, ətvьlavnь-kə kьk veşkьt viz̧ siз, medвь ət veşkьt viz̧şis kьk çut ətvьlaşisə medik veşkьt viz̧şis kьk çutkət, to ena kьknan veşkьt viz̧ьs ətamədkət вьdsən ətvьlaşasə. Ķər kьk veşkьt viz̧lən em toko ətik ətlasa çut, sek nija krestaşənь.

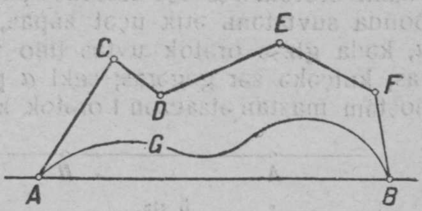
Ķrestaşan kьk veşkьt *AB* da *CD* viz̧lən ətlasa çut suşə *krestaşan çutən.*

Ətik çutət poz̧ə nuətnь veşkьt viz̧z̧esə mьmda kolə. Seєəm ətlasa veşkьt viz̧z̧es arkmətənь *veşkьt viz̧z̧eziş puçok.*

Puçokiş вьdəs veşkьt viz̧z̧ezlən ətlasa çut suşə *puçok centraən.*

Boşnь-kə ploskoş vьlьn kьk, *A* da *B* çut da nь-pьr nuətnь veşkьt, çukьla da çeglaşəm viz̧, to ena *A* da *B* çutьs əti kadə graņiçitənь *AB* orətok da çukьla viz̧liş *AGB* tor i loənь çeglaşəm *ACDEFB* koņeççezən (10 ris.). Poz̧ə aззьnь, *AB* orətok зenьtzьk çukьla viz̧iş *AGB* torşa da çeglaşəm *ACDEFB* viz̧şa, eta şərti:

3. Veşkьt viz̧lən orətok—sь kьk çut kolasьn medзenьt rasstojaņņo.



10 ris.

Eta veşkьt viz svojstvo şərti kьk çut kolasiş rasstojaņņosə pьr merajtənь sija veşkьt viz̧ kuz̧a, kəda munə ena kьk çutət. Orətok kuz̧aьs mьççalə, mьj ьzda rasstojaņņoьs koņeççeziş çuttez kolasьn.

4. Veşkьt viz̧lən, kьз geometriçeskəj figuralən, unaəş svojstvoes. Nijə svojstvoesə petkətisə opьtən, kədə oţirьs əktis as gəgərьn mir javļeņņoez naвļudajtəmiş da prakţiçeskəj voprossez resьtəmiş.

Geometriçeskəj figuraes svojstvoez jьliş etєəm şorņitəmmes, kədna petkətəmaş, ustanovitəmaş opьtiş, kədnə mijə boştamə dokazittəg, suşənь akşiomaezən. Veşkьt viz jьliş ena şorņitəmmes— akşiomaez:

1) veşkьt viz̧ poz̧ə koņeçtəg ņuzətnь kьknan ladorə;

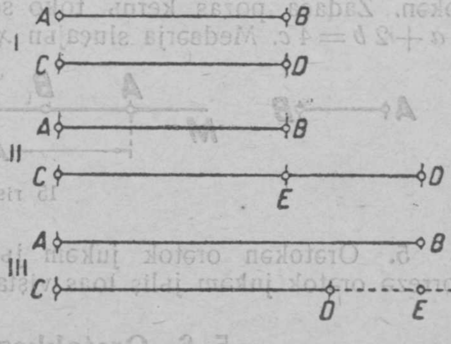
2) şetəm kьk çutət poz̧ə nuətnь veşkьt viz̧ i toko ətikə;

3) veşkьt viz̧lən orətok—sь kьk çut kolasьn medзenьt rasstojaņņo.

3 §. Orətokkez sravņitəm.

Sravņitnь veşkьt viz̧z̧ezliş kuz̧aez oz tuj. Nijə koņeçtəg poz̧ə ņuzətnь kьknan ladorə. Sijən ətaməd kolasьn sravņitəm ponda boştənь toko orətokkez.

Sravņitnь kьk orətok—znaçit visətnь, ətьzdaəş-ja nija aļi aвu ətьzdaəş i aвu-kə ətьzdaəş, to tədnь, kəda nь kolasiş ьзъtzьk. Orətokkez sravņitəmьs kerşə ət orətoksə məd orətok vьlə puktəmən.



11 ris.

Zadaça. *Sravņitnь ətaməd kolasьn кьk AB da CD orətok* (11 ris.).

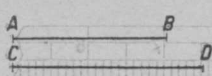
Ķerəm. Pukta n *AB* orətok *CD* orətok vьləsiз, medвь *A* çut ətlaaşis *C* çutkət da *AB* orətok munis *CD* orətok kuza. *B* çut-kə da *D* çut — *CD* orətok koņeç ətlaaşasə, sek *AB* orətok da *CD* orətok ətьzdaəş. Orətokkezliş etə ətьzdaşəmsə gizənь siз: $AB = CD$.

B çut-kə uşas *CD* orətokiş *E* çutə, sek *AB* orətok *CD* orətokşa uçətzьk. Gizəm: $AB < CD$.

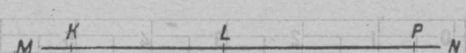
B çut-kə uşas *CD* orətok sodtət vьliş кьєəmkə *E* çutə, sek *AB* orətok *CD* orətokşa ьзъtzьk. Gizəm: $AB > CD$.

4 §. Orətokkezən ďejstviaez.

1 **Zadaça.** *Ətlaavnь AB orətok da CD orətok*; mьj ьzdaəş orətokkes, viştaləma 12 risunokьn.



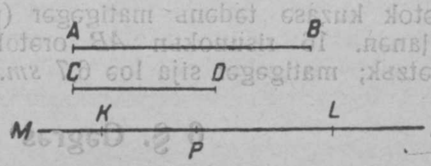
12 ris.



13 ris.

Stroitəm. Nuətam veşkьt *MN* viz (13 ris.). *K* çutşaņ eta veşkьt viz vьlə сьrkuļ şərti puktam $KL = AB$ orətok, a sьвərьn *L* çutşaņ — $LP = CD$ orətok siз, medвь medoзза orətoklən medвərja *L* çut vəli məd orətoklə medoзза çutən. *KP* orətok şetə *AB* orətokliş da *CD* orətokliş ətlas. Gizəm: $AB + CD = KL + LP = KP$.

2 **Zadaça.** *Çintnь AB orətokiş CD orətok;* mьj ьzdaəş orətokkes, viştaləma 14 risunokьn.



14 ris.

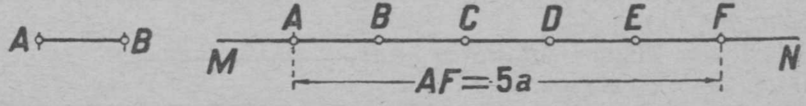
Stroitəm. Veşkьt *MN* viz vьlьn puktam $KL = AB$ orətok da sьвərьn *L* çutşaņ puktam məd ladorə $LP = CD$ orətok; orətok *KP* loə $AB - CD$ ьzda.

3 **Zadaça.** *Ьzdətnь AB otətok 5-iş, mədņoz, вoşnь sijə sodtanən 5-iş.*

Stroitəm. Veşkьt *MN* viz vьlьn puktam şərşən-вərşən 5-iş şetəm *AB* orətoksə. *AF* orətokьs 5 *AB* ьzda (15 ris.).

4 **Zadaça.** Şetəmaş orətokkez: a, b da c. Kolə stroitnь orətok $x=3a+2b-4c$.

Stroitam mьjkə kuza veşkьt viz vьlьn $3a$ kuza orətok, sьвərьn sodtam sь dьnə $2b=b+b$ orətok da medвərьn çintam ŋoliş c orətokən. Zadaça pozas kernь toko sek, kər $3a+2b>4c$ liвo kər $3a+2b=4c$. Medвərja sluçajьn $x=0$.



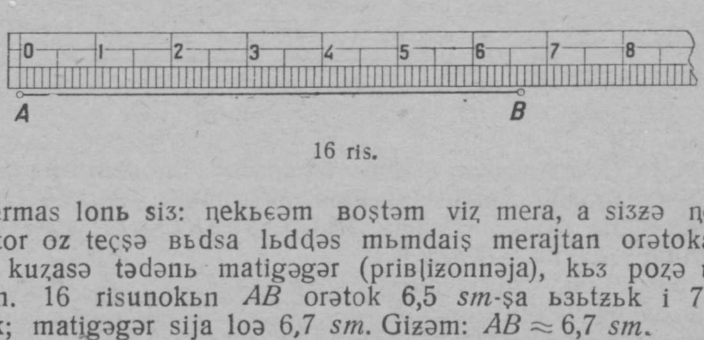
15 ris.

5. Orətokən orətok jukəm jьliş, a sizzə ətьzda da ŋeətьzda torrezə orətok jukəm jьliş loas viştaləm janьn.

5 §. Orətokkez merajtəm.

M e r a j t n ь o r ə t o k — z n a ç i t t ə d n ь, k ь n ь m i ş s i j a o r ə t o k v ь l ə t ə r ə m ə d i k o r ə t o k, k ə d a p u k t ə m a ə t s a t u j ə. Orətokkez merajtan ətsaən pozə вoşnь luвəj orətok. No kolə viştavnь, orətokьs merajtşə kuza meraezən: metraən, santimetraən, millimetraən.

Medвь merajtnь AB orətok, sь vьlьn teçlənь вoştəm viz ətsasə. Boştəm viz ətsaьs teçşə-kə AB orətok vьlas вьdsa lьddəs mьmdaiş, sek eta lьddəsьs i mьççalə, kьnьm viz ətsa kuza orətokьs. Boştəm kuza ətsaьs oz teçşь-kə AB orətok vьlas вьdsa lьddəs mьmdaiş, a petə kьєəmkə kolan, sek etə kolansə kolə merajtnь uçətzьk viz meraən; petas-kə вəra kolan, etə kolansə merajtənь esə uçətzьk viz meraən i siz oz.



16 ris.

Vermas lonь siz: ŋekьєəm вoştəm viz mera, a sizzə ŋekьєəm nьlən tor oz teçşə вьdsa lьddəs mьmdaiş merajtan orətokas, sek orətok kuzasə tədənь matigəgər (priвlizonnəja), kьz pozə uçətzьk kolanən. 16 risunokьn AB orətok 6,5 *sm*-şa ьzьtzьk i 7 *sm*-şa uçətzьk; matigəgər sija loə 6,7 *sm*. Gizəm: $AB \approx 6,7$ *sm*.

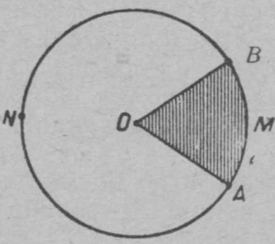
6 §. Gəgrəs da gəglan.

1. Gəgrəs da gəglan. OA orətok-kə aslas ət koŋeç gəgər, suam O çut gəgər, ploskoş vьlьn вergəttən keras вьdsa kьє (oвorot) da вəra loktas aslas vaz mestaə, to sьlən məd koŋeçьs, A çut, keras çukьla viz, kəda suşə g ə g r ə s ə n. Gəgrəs рьєkiş ploskoş tor suşə g ə g l a n ə n (17 ris.). O çut, kəda gəgər вergətçə OA orətok, suşə i gəgrəs i gəglan c e n t r a ə n; *OA* orətok suşə r a d i u s ə n da pasjaşşə *r* liвo *R* sьpasən.

Kolə viştavnь, ne toko *OA* orətoklən koneçiş *A* çut kerə gəgrəssə; orətoksə *O* çut gəgər вergətikə sьlən вьd çut kerə gəgrəs.

Gəgrəslən вьd çutьs kujlə *O* centraşanas ətьlьna. Siзkə, *O* centraşan gəgrəsiş вьd çutəз rasstojannoьs radius kuza. Gizəm: $OA = OB = r$.

Gəgrəs stroitəm şərti vermam sunь, sto **gəgrəsьs — ploskoş vьlьn ətlaətəm koneça çukьla viz, kədalən вьd çutьs sulalə ətьlьna ətik çutşan — centraşan.**



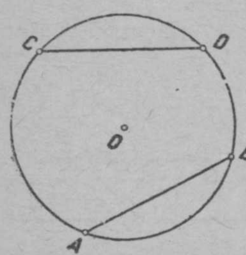
17 ris.

G ə g r ə s p o z ə в ь d s ə n a з з ь n ь, ş e t ə m a ş - k ə s ь l ə n r a d i u s d a c e n t r a l ə n m e s t a.

Gəgrəssez ətamədlə ozə vaçkişə radius kuzaən; kьnьm ьзьtzьk radius, sьnьm ьзьt zьk i açьs gəgrəsьs. Ə t ь z d a r a d i u s a kьk gəgrəs vevşən puktikə ətvьlaşənь i siзkə, nija ətьzdaəş. Gəgrəsьs çertitşə cьrkul şərti.

2. Duga. Kər *OA* orətok *O* çut gəgər munas ne вьdsa kьє, sьlən koneç, *A* çut, kerə gəgrəs tor; gəgrəs torьs suşə d u g a ə n, a вьdsa gəglan tor, suam *AOB*, kədə keras *OA* orətok, suşə ş e k t o r ə n, *AOB* — şektor (17 ris.). „Duga“ kьv gizəm tujə suvtətənь pas $\smile$. Gizəm $\smile AB$ lьddişşə: *AB* duga. Pjatnajtam-kə gəgrəs vьlьn kьєəmkə kьk çut, suam *A* da *C*, mijə jukam gəgrəssə kьk tor vьlə, kьk duga vьlə, kədna unazьk petənь neətьzdaəş. Medвь toçnəja viştavnь, kəda duga jьliş munə şornitəmьs, sijə pasjalənь ne kьk, a kuim sьpasən. Kuimət sьpasьs sek suvtətşə nija sьpassez kolasьn, kədna pasjalənь koneçiş duga çuttesə, da gizənь: $\smile AMB$ (17 ris.). Kər aвu viştaləm, ьзьtzьk ali uçətzьk gəgrəsiş *AB* duga jьliş şornitşə, sek sijə pasjalənь toko kьk sьpasən: $\smile AB$ i tədənь, sto вoştəma uçətzьk dugaьs.

Ətik liвo kьk ətьzda gəgrəslən kьk duga ətьzdaəş, ətaməd vьlə puktьtən-kə ətvьlaşənь nьlən koneçiş çuttez. Siз, puktam-kə *AB* duga *CD* duga vьlə (18 ris.), *A* çut uşas *D* çut vьlə, *B* çut — *C* çut vьlə, to $\smile AB = \smile DC$.



18 ris.

3. Xorda. *CD* orətok, kəda ətlaalə gəgrəsliş kьk çut, suşə x o r d a ə n; xorda z e l ə t ə duga; gəgrəsiş вьd xordalə ləşalə opredelonnəj duga i вərən — вьd dugalə opredelonnəj xorda. Xordaьs jukə gəgrəssə kьk tor vьlə (18 ris.). Xorda, kəda munə centrapьr, suşə d i a m e t r a ə n. Gəgrəsьn tujə nuətnь diametraesə mьmda kolə. G ə g r ə s d i a m e t r a e z ətaməd kolasьn ətьzdaəş i вьdьs nь kolasiş kьk radius kuzaəş. Diametra jukə gəgrəssə 2 зьngəgrəs vьlə, gəglan — 2 зьngəglan vьlə.

Ətik gəgrəsьn liвo ətьzda gəgrəssezьn ə t ь z d a d u g a e z z e l ə t ş ə n ь ə t ь z d a x o r d a e z ə n. Вьliş *AB* duga da *CD* duga-kə vevşən puktikə (18 ris.) ətvьlaşənь, to ətvьlaşasə i nь koneçiş çuttez, a etaşaŋ ətvьlaşənь i *AB* da *CD* xorda, kəđna munənь ena çuttez kolasət. Siʒƶə vermam ꞩunь, sto dugaes ətьƶdaəş, ətьƶdaəş-kə nьlən xordaez.

4. Duga gradus. Gəgrəs jukənь 360 ətьƶda tor vьlə, 360 ətьƶda duga vьlə; вьd seєəm dugaьs ꞩuşə duga gradusən i pasjaşşə gəgļanokən, kəda suvtətşə veşkьt lađərşaŋ sija lьdḑəs dьnə, kəda mьççalə, mьmđa gradusses dugaas, suam 360°, ļiво 180°, ļiво 90°. Gəgrəsьn 360°, зьngəgrəsьn 180°, gəgrəs ŋoļət torьn 90°.

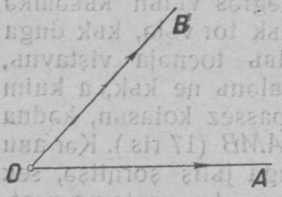
Вьd duga gradus jukənь 60 ətьƶda tor vьlə, kəđna kolasiş вьdьs ꞩuşənь duga minutaən; „minuta„ kьv giƶtəm ponda suvtətənь pas′. Giƶəm 30′ lьdḑişşə: 30 minuta.

Вьd duga minuta jukşə 60 ətьƶda tor vьlə, i вьd seєəm torьs ꞩuşə duga şekundaən. Şekunda pasjaləm ponda suvtətənь pas″. Giƶəm 45″ lьdḑişşə: 45 şekunda. Giƶəm 90° 30′ 20″ lьdḑişşə: 90 gradus 30 minuta 20 şekunda.

II. PEĻƏSSEZ.

1 §. Peļəs da sijə pasjaləm.

1. Ķьk *OA* da *OB* jugər, kəđna petənь ətik *O* çutiş, ətamədlə oz vaçkişə aslanьs veşkələn i arkmətənь figura, kəda ꞩuşə peļəsən (19 ris.).

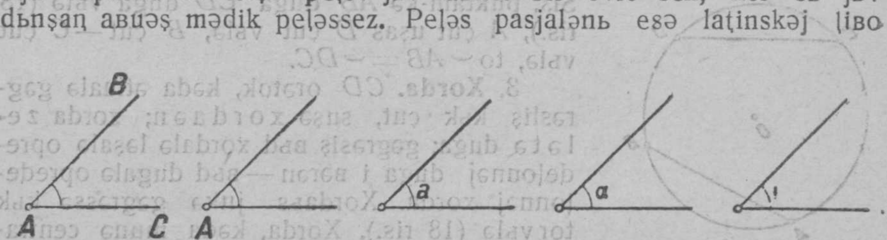


19 ris.

O çut ꞩuşə peļəs jьlən, *OA* da *OB* jugər peļəs ladorrezən.

Peļəs pasjaşşə kuim ьʒьt ꞩьpasən, kədna kolasiş ətik suvtətşə peļəs jьv dьnə, məd kьkьs sь ladorrez vьlьn. „Peļəs“ kьv giƶtən вoşşə pas ∠; peļəs jьv dьniş ꞩьpas giƶşə i ꞩuşə məd kьk ꞩьpas ꞩərьn.

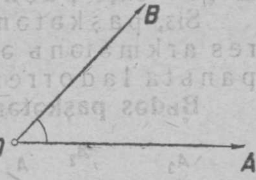
Peļəs, kəda arkməm *OA* da *OB* jugərreziş, poƶə giƶnь kьk ŋoƶ: ļiво ∠ *AOB* ļiво ∠ *BOA*. Mukəd pьrişa peļəs pasjalənь toko ətik ꞩьpasən. Sek sija ꞩьpasьs suvtətşə peļəs jьv dьnə. Siʒ ovlə sek, kər sь jьv dьnşaŋ abuəş mədik peļəssez. Peļəs pasjalənь esə laţinskəj ļiво



20 ris.

greçeskəj alfavitiş ətik uçət ꞩьpasən ļiво cьfraən; etєəm pasjaləm kosta ꞩьpasьs ļiво cьfraьs suvtətşə peļəs pьєkьn (20 ris.). Çastə peļəs pьєkas sь lađorrez kolasьn nuətənь esə i duga. Siʒ kerənь sek, kər məđənь pasjavnь, sto şorŋitəmьs munə peļəs jьliş, kəda arkməm nija kьk jugərən, kəđna kolasьn nuətəma dugaьs.

2. Viʒətam *OA* jugər, кəda вergalə aslas pondətçan *O* çut gəgər (21 ris.). Bergavtən *OA* jugərьs рьr vezə asşis mestasə, aslas oʒʒa mestaiş vuʒə viļ *OB* mestaə **da** arkmətə eta vuʒəm şərna $\angle AOB$.



21 ris.

Peļəsьs — pondətçan çut gəgərət jugər вergətçəmiş mera.

Peļəs mьççalə jugərliş kьk veşkəv kolas — medoʒʒa da medвərja veşkəv kolas.

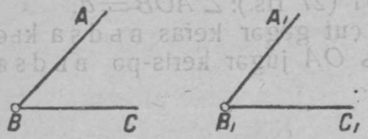
3. Krestaşan kьk veşkьt *AB* da *CD* viz pəliņtçəmaş ətaməd dьnə da arkmətənь ņol peļəs, i вьd peļəslən ьždaьs loə sь şərti, kьʒ pəliņtçəma ət veşkьt vizьs mədьs dьnə.

Şorņitənь siʒ: *peļəs mьççalə, mьj вurna ətik veşkьt viz dьnə pəliņtçəma mədik veşkьt viz.*

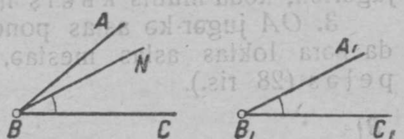
Peļəs ьždaьs oz vežşь ladorrez kuzaşaņ.

2 §. Peļəssez sravņitəm. Peļəssezlən ətьždaşəm da ņeətьždaşəm.

1. Eməş kьk peļəs: $\angle ABC$ da $A_1B_1C_1$ (22 ris.). Medвь sravņitnь da tədnь, ətaždaəş nija aļi aвu da kəda nь kolasiş ьʒьtžьk, poļzujtçam vevşən puktan sposobən.

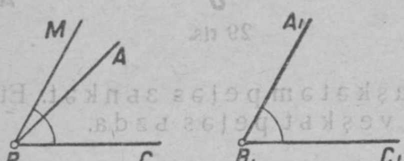


22 ris.



23 ris.

Puktam (dumaьn) $\angle A_1B_1C_1$ $\angle ABC$ vьlə siʒ, medвь B_1 jьv ətvьlaşis B jьvkət da B_1C_1 lador munis məd peļəşşis BC lador vьlət; eta dьrņi-kə B_1A_1 lador munas BA lador vьlət, to $\angle A_1B_1C_1$ ətvьlaşas $\angle ABC$-kət i, siʒkə, peļəssez ətьždaəş. Gizəm: $\angle A_1B_1C_1 = \angle ABC$.



24 ris.

2. B_1 jьv da B jьv-kə i B_1C_1 da BC lador ətvьlaşasə, a B_1A_1 lador munas peļəs pьєkət da loas BN mestaьn (23 ris.), to $\angle A_1B_1C_1$ aвu $\angle ABC$ ьžda, sija sьşşa uçətžьk. Gizəm: $\angle A_1B_1C_1 < \angle ABC$.

Medвərьn, kər $\angle A_1B_1C_1$ $\angle ABC$ vьlə puktikə B_1A_1 lador munas $\angle ABC$ dьnşaņ ətərlaņət da loas BM mestaьn (24 ris.), to $\angle A_1B_1C_1$ ьʒьtžьk ABC peļəşşa. Gizəm: $\angle A_1B_1C_1 > \angle ABC$.

3 §. Paşkətəm da veşkьt peļəs.

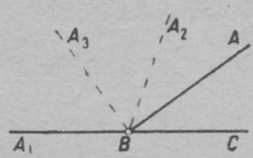
1. $\angle ABC$ (25 ris.) loas sьnьm ьʒьtžьk, kьnьm вuražьk loasə pəliņtçəməş sьlən ladorres. Pondam-kə вergətlьnь peļəsliş kədəkə ladorsə, suam *BA*, *B* jьv gəgər, a məd *BC* ladorsə koļam

vərʐəttəg, to BA lador pondas posļedovaţeļnəja vovlьnь una mestaəз: BA_2, BA_3 i siз oз. BA lador vermas loknь i BA_1 mestaəз. Sek sija loas kьз вь sodtətən BC lador dьnə; kər etaз kujlənь ladorres, $\angle A_1BC$ suşə paşkətəm peļəsən.

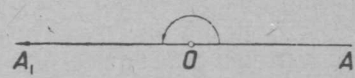
Siз, paşkətəm peļəsьs seєəm peļəs, kədalən ladorres arkmətənь ətik veşkьt viʐ dasь jьvşaņ iņdətəmaş panьta ladorrezə.

Вьdəs paşkətəm peļəsses ətaməd kolasьn ətьʐdaəş.

Medвь proveritnь etə viştaləmsə, puktьvlənь paşkətəm peļəssesə ətaməd vьlə. Paşkətəm peļəssə poʐə viзətnь kьз medoзза veşkəv da medвərja veşkəv kolas OA jugərliş, kəda keris зьnkьє aslas pondətçan O çut gəgər (26 ris.).



25 ris.



26 ris.

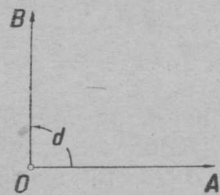
2. Paşkətəm peļəslən зьnьs suşə veşkьt peļəsən.

Veşkьt peļəs pasjalənь laţinskəj alfavitiş uçət d sьpasən (d — francuzskəj „droit“ kьliş medoзза вьpas; „droit“ kьlьs loə „veşkьt“)

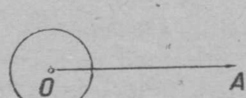
Вьdəs veşkьt peļəsses ətaməd kolasьn ətьʐdaəş.

Veşkьt peļəsьs medoзза veşkəv da medвərja veşkəv kolas OA jugərlən, kəda munis kьєiş ņoļət tor (27 ris.): $\angle AOB = d$.

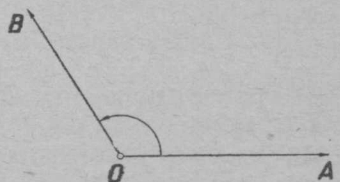
3. OA jugər-kə aslas pondətçan O çut gəgər keras вьdsa kьє da вəra loktas aslas mestaə, to suənь OA jugər keris-pə вьdsa peļəs (28 ris.).



27 ris.



28 ris.



29 ris.

Veşkьt peļəs ətьʐdaşə paşkətəm peļəs зьnkət. Eta şərti paşkətəm peļəs loə kьk veşkьt peļəs ьʐda.

Giʐəm: $\angle AOA_1 = 2d$ (26 ris.).

Вьdsa peļəs kьk paşkətəm peļəs ьʐda, ļiвo ņoļ veşkьt peļəs ьʐda; вьdsa peļəs $= 4d$.

4. Peļəs, kəda arkmə jugərsə aslas pondətçan çut gəgər kьєiş ņoļət torşa jeєaʐьk вergətəmşaņ (21 ris.), uçətʐьk veşkьt peļəşşa i suşə vekņit peļəsən; peļəs, kəda ьзьtʐьk veşkьt peļəşşa, no uçətʐьk paşkətəm peļəşşa, suşə paşkьt peļəsən (29 ris.).

5. Veşkьt peļəs вoşşə peļəs merajtan ətsa tujə.

Peļəssezliş ьʐdasə giʐənь veşkьt peļəs torrezən. Suam:

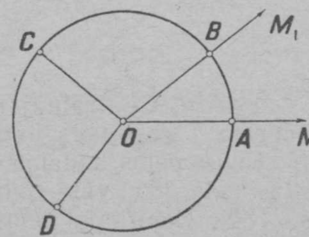
1) $0{,}3\,d$, $\frac{1}{2}\,d$, $\frac{2}{3}\,d$ — vekņit peļəssez. Nь kolasiş вьdьs veşkьt peļəşşa uçətʐьk.

2) $1{,}5\,d$, $\frac{5}{4}\,d$, $\frac{11}{8}\,d$ — paşkьt peļəssez. Bьdьs nь kolasiş veşkьt peļəşşa ьзьtƶьk da paşkətəm peļəşşa uçətƶьk.

3) $2{,}3\,d$, $\frac{11}{4}\,d$, $\frac{23}{8}\,d$ i siз oз.— paşkətəm peļəşşa ьзьtƶьk peļəssez.

4 §. Centraļnəj peļəs da sьlən svojstvoez.

1. *OM* jugər aslas pondətçan *O* çut gəgər ʙergavtən kerə $\angle MOM$ (30 ris.), a kьɛəmkə *A* çut, kəda ʙoştəm *OM* jugər vьlas, ətlaьn jugərkət muntən kerə *AB* duga sija gəgrəsliş, kədalən radiusьs *OA* ьƶda. Viзətam $\angle AOB$; sьlən *O* jьv kujlə gəgrəs centraьn, sь ladorrezən loənь *OA* da *OB* radius, sь ladorrez kolasьn kujlə sija-ƶə gəgrəslən *AB* duga.



30 ris.

P e ļ ə s, k ə d a l ə n j ь l ь s l o ə g ə g r ə s c e n t r a, з u ş ə c e n t r a ļ n ə j p e ļ ə s ə n. Bьd centraļnəj peļəslə sootvetstvujtə o p r e d e ļ o n n ə j d u g a. Poʒə veƶərtnь, sto i ʙьd dugalə sootvetstvujtə opredeļonnəj centraļnəj peļəs, kəda arkmə sek, kər duga koņeççes radiussezən ətlaətşənь centrakət.

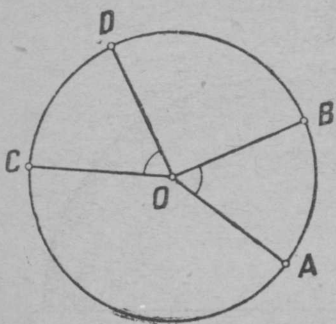
2. Centraļnəj peļəssezlən da nьlə sootvetstvujtan dugaezlən eməş to kьɛəm svojstvoez.

Ətik ļiʙo una ətьƶda gəgrəssezьn:

1) ətьƶda centraļnəj peļəssezlə sootvetstvujtənь ətьƶda dugaez.

2) ətьƶda dugaezlə sootvetstvujtənь ətьƶda centraļnəj peļəssez.

Şetəma gəgļan, kədalən centraьs *O* çutьn (31 ris.) da ətьƶdaəş kьk centraļnəj peļəs: $\angle AOB$ da $\angle COD$. Bergətam *AOB* şektor *O* centra gəgər siз, medʙь *OA* radius ətvьlaşis *OD* radiuskət; sek, mьļa *AOB* da *COD* peļəs ətьƶdaəş, *OB* radius ətvьlaşas *OC* radiuskət, ətvьlaşasə i *AOB* da *COD* şektor dugaezlən koņeçiş çuttez: *A* da *D*, *B* da *C*; dugaezlən koņeçiş çuttez-kə ətvьlaşisə, to, siзkə, ətvьlaşasə i *AB* da *CD* duga.



31 ris.

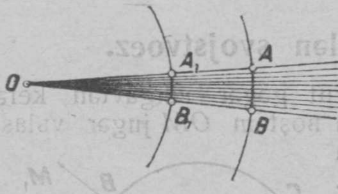
Giƶəm: kьзi $\angle AOB = \angle COD$, to $\smile AB = \smile CD$.

Ətьƶda dugaez jьliş da nь peļəssez jьliş şorņitəmьs giƶşas to kьз: kьз $\smile AB = \smile CD$, to $\angle AOB = \angle COD$.

Etɛəm şorņitəmsə proveritənь sija-ƶə vevşən puktan sposobən. Vьvod ləşalə i dugaez ponda, kədna sootvetstvujtənь ə t ь ƶ da radiusa kьk gəgrəsiş ətьƶda centraļnəj peļəssezlə.

3. Jukam-kə gəgrəs 360 ətьƶda tor vьlə da ətlaalam ʙьd jukəminsə centrakət, mijan loasə centraļnəj peļəsses 360, kədna ətaməd kolasьn ətьƶdaəş. Ətьƶdaəş nija loənь sьşaц, mьļa пьlə sootvetstvujtənь dugaez, kədna вьdьs loənь gəgrəsiş $\frac{1}{360}$ tor, ļiвo ətik duga gradus.

Centraļnəj peļəs, kədalən dugaьs loə ətik gradus ьƶda, suşə peļəs gradusən. Peļəs gradus jukşə 60 peļəs minuta vьlə da вьd peļəs minuta — 60 peļəs şekunda vьlə. Peļəs gradussez da пьliş torrez — minutaez da şekundaez — pasjaşşənь nija-ʒə passezən, kədnaən вoştəmaş pasjavnь duga gradussez da пьliş torrez.



32 ris.

Gəgrəs dugalən-kə, suam $\smile AB$ (32 ris.), 10° (duga gradus), to sь centraļnəj peļəsьn loasə 10° (peļəs gradus).

Vьvod. **Centraļnəj peļəs veştiş dugalən duga gradusa lьdd̦əs mьçç̦alə i gəgrəsliş peļəs gradusa lьdd̦əs.**

Вьdsa peļəs, kədalən *O* jьv kujlə centraьn, torjaşşə 360 centraļnəj peļəs vьlə, 360° vьlə. Centraļnəj peļəsьn, kər sija paşkətəm peļəs ьƶda, loə 180°. Centraļnəj peļəsьn, kər sija paşkətəm peļəs ʒьn ьƶda, loə 90°.

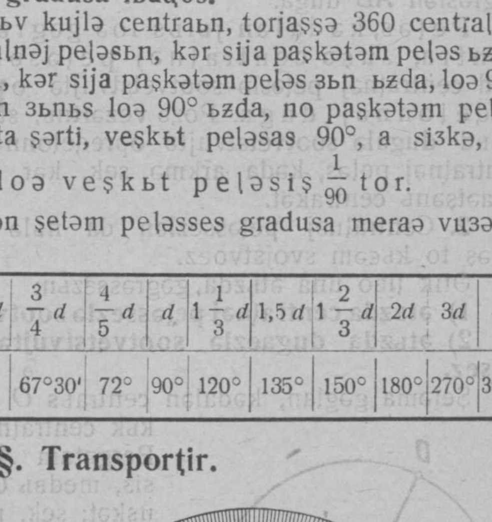
I siʒ, paşkətəm peļəslən ʒьnьs loə 90° ьƶda, no paşkətəm peļəslən ʒьnьs veşkьt peļəs, eta şərti, veşkьt peļəsas 90°, a siʒkə, to ətik peļəs gradusьs loə veşkьt peļəsiş $\frac{1}{90}$ tor.

4. Veşkьt peļəs torrezən şetəm peļəsses gradusa meraə vuʒətan taвļica:

Veşkьt peļəs torrezən peļəs	$\frac{1}{3}d$	$\frac{1}{2}d$	$\frac{2}{3}d$	$\frac{3}{4}d$	$\frac{4}{5}d$	d	$1\frac{1}{3}d$	$1{,}5\,d$	$1\frac{2}{3}d$	$2d$	$3d$	$4d$
Gradusa meraən peļəs	30°	45°	60°	67°30'	72°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°

5 §. Transporţir.

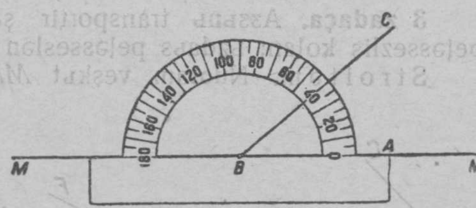
1. Peļəssez merajtikə polzujtçənь natodiļ kerəm priвorən — transporţirən. Sija vaçkişə ʒьngəgļanlaц, kədalən dugaьs torjətəm 180 duga gradus vьlə; centraьs ʒьngəgļanlən pjatnajtşə цeьʒьt eupətokən (33 ris.).


33 ris.

Medвь merajtnь şetəm peļəs, sь vьlə puktənь transporţirsə siʒ, medвь sьlən centraьs ətvьlaşis peļəs jьvkət, a diametra—kədakə peļəs ladorkət, da viʒətənь, kьeəm jukəmət transporţiras munə peļəslən məd ladorьs; sek lьdd̦əs, kəda sulalə transporţirьs jukəm dьnьn, mьçç̦alə, kьnьm gradus merajtan peļəsas.

Transporţirən poţzujtçəmьs ləşətəm sь şərti, sto вьd centraţnəj peţəslən em seϵəm duga, kədaьn sькət ətmьmdaəş вьdsa gradusses da gradus torres.

2. Transporţirən poţzujtçənь esə peţəs stroitikə. Medвь etə kernь, nuətənь veşkьt *MN* viz (34 ris.), puktənь sь vьlə transporţirsə siз, medвь sьlən diametraьs vizьskət ətvьlaşis, da pjatnajtənь peţəsliş jьv sija çutьn, kəda loə ətveştьn transporţir centrakət; nuətnь-kə eta вərьn veşkьt viz transporţirьs centraət da вoştəm çutət petas kolan peţəs.



34 ris.

3. Gəgrəslən kuzaьs zavişitə sь radius kuzaşan, i кьnьm ьзьtzьk radiusьs, sьnьm ьзьtzьk gəgrəs; estiş pozə vezərtnь, sto ə t i k duga graduslən, mədnoz gəgrəsiş $\frac{1}{360}$ torlən kuzaьs zavişitə radiusşan da vezşə ətlaьn radius vezəm şərna. Ne siз ovlə peţəs gradus stroitikə. Peţəs gradus oz vezşь radius kuza vezəmşan; peţəs gradusьs n e v e z ş a n, p ь r ş a ь z d a i loə veşkьt peţəslən $\frac{1}{90}$ tor.

32 risunok vьlьn kerəm $\angle AOB$, kəda jukəm 10 peţəs gradus vьlə da kpestaləma kьk dugaən seϵəm gəgrəsseziş, kədnalən radiussez ne ətkodəş, a centraьs *AOB* peţəs jьlьn. Risunok vьliş pozə aззьnь, sto duga gradusses aвu ətьzdaəş i zavişitənь radius kuzaşan.

6 §. Peţəssezən dejstviaez. Oçakujlan peţəssez.

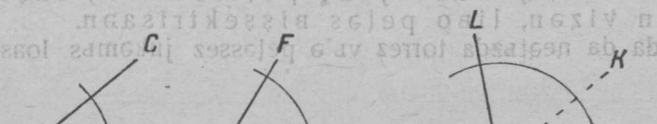
1. Tədam-kə peţəssezliş gradusa mera, to peţəssez ətlaaləm da çintəmsə pozə kernь lьddişəmən da stroitəmən.

1 zadaça. Aззьnь peţəssezliş ətlas da kolan:

$$\angle ABC = 47°\,40' \text{ da } \angle DEF = 30°\,23'\,45''.$$

K e r ə m: 1) $\begin{array}{r} 47°\,40' \\ +\;30°\,23'\,45'' \\ \hline 78°\;\;3'\,45'' \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} 47°\,40' \\ -\;30°\,23'\,45'' \\ \hline 17°\,16'\,15'' \end{array}$

Otvet: 1) $\angle ABC + \angle DEF = 78°\,3'\,45''$; 2) $\angle ABC - \angle DEF = 17°\,16'\,15''$



35 ris.

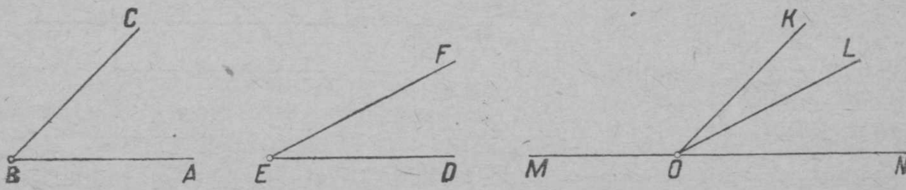
2 zadaça. Aззьnь transporţir şərti stroitəmən *ABC* da *DEF* peţəsliş ətlas; ьzdaьs peţəssəslən şetəm 35 risunok vьlьn.

Stroitəm. Nuətam veşkьt *MN* viz da kьєəmkə *O* çut gəgər eta veşkьt viz vьlьn stroitam transportir şərti $\angle NOK = \angle ABC$, a sьвərьn, jьv tujə *O* çut da məd peləs ət lador tujə *OK* boştəmən stroitam $\angle LOK = \angle DEF$, sek $\angle LON$ — ena kьk şetəm peləslən ətlas:

$$\angle ABC + \angle DEF = \angle NOK + \angle KOL = \angle LON.$$

3 zadaça. Azzьnь transportir şərti stroitəmən *ABC* da *DEF* peləssezliş kolan; ьzdaьs peləsseslən şetəm 36 risunok vьlьn.

Stroitəm. Nuətam veşkьt *MN* viz da kьєəmkə *0* çut gəgər



36 ris.

eta viz vьlьn stroitam $\angle NOK = \angle ABC$ (36 ris.), sьвərьn eta-zə *O* çut dьnşan da veşkьt *MN* viz dьnşan stroitam $\angle NOL = \angle DEF$, sek $\angle LOK$ — şetəm peləssezlən kolan:

$$\angle ABC - \angle DEF = \angle LOK.$$

4 zadaça. Boşnь $\angle ABC$ 3-iş.

Kerəm. Zadaça kerşə şetəm *ABC* peləs ьzda kuim peləs şərşən-bərşən ətlaaləmən.

2. Kьk peləs, kədnalən ətlasa jьv da ətlasa ətik lador da kədna oz vevttə ətamədsə, suşənь oçakujlan peləssezən.

35 risunok vьlьn $\angle NOK$ da $\angle KOL$ — oçakujlan peləssez. $\angle NOK$ da $\angle NOL$ oz lьddişşə oçakujlan peləssezən.

3. Peləs pьєkьn-kə jьvşaņ nuətnь veşkьt viz, sija jukas peləssə kьk oçakujlan peləs-vьlə, kədna vermasə lonь ətьzdaəş i ņeətьzdaəş ətaməd kolasьn.

Veşkьt viz, kəda jukə peləssə səri, suşə peləs sərialan vizən, libo peləs bişşektrisaən.

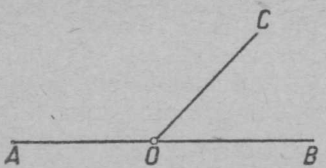
Ətьzda da ņeətьzda torrez vьlə peləssez jukəmьs loas vizətəm torjьn.

7 §. Ordça peləssez da nьlən svojstvoez. Ţeorema jьliş vezərtas.

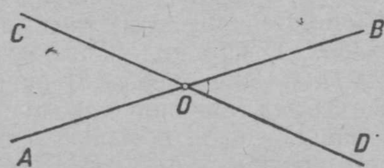
1. Kьk oçakujlan peləs: $\angle AOC$ da $\angle BOC$ (37 ris.), kьdnalən ətik *OC* lador — ətlasa, a məd kьk ladorьs, *OA* da *OB*, ətamədlə panьta munənь da arkmətənь ətik veşkьt viz, suşənь ordça peləssezən.

Boştam kьk krestaşan veşkьt *AB* da *CD* viʐ (38 ris.); nija arkmətənь 4 peļəs, kədnalən ətlasa jьv kujlə viʐʐes krestaşan *O* çutьn. Bьd para oçakujlan peļəsses: $\angle AOC$ da $\angle COB$, $\angle COB$ da *BOD* da siз oз.— ordça peļəssez.

Ordça peļəssez poʐə kernь to kьɛəm stroitəmən: şetəm $\angle AOB$ (39 ris.); ņuzətam-kə sьliş ətik lador, suam *OA*, *O* jьv sajə, loas viļ $\angle BOC$, kəda şetəm peļəsьskət ordça i sijən, mьļa sьkət loə ətlasa *O* jьv, ətik ətlasa *OB* lador da mьļa *OC* lador sьlən petəma oззa peļəsliş *OA* lador ņuzətəmşaņ i arkmətə sьkət veşkьt viʐ. $\angle AOB$ da $\angle BOC$ — ordça peļəssez.



37 ris.



38 ris.

2. Em-ja kьɛəmkə zavişimoş kьk ordça peļəs kolasьn? Aззam ətlas kьk ordça *AOB* da *BOC* peļəsliş.

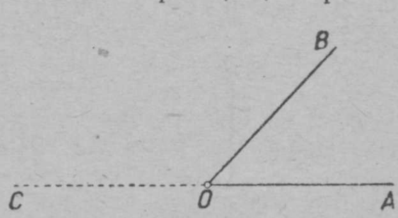
$\angle AOB + \angle BOC = AOC$ — paşkətəm peļəs, kəda 2 *d* ьʐda, mədņoʐ, kьk veşkьt peļəs ьʐda. Eta şərti,

kьk ordça peļəslən ətlasьs 2 *d* ьʐda.

Ena kьvvezən зenьta viştaləma ordça peļəsses svojstvo jьliş opredeļonnəj veʐərtas.

3. Ordça peļəssez svojstvo jьliş vьvodəз mijə loktim una şorņitəm вərьn; şorņiez mijan panşisə geometriçeskəj fakttez vьlьn.

G e o m e t r i ç e s k ə j f i g u r a s v o j s t v o e z j ь l i ş з e n ь t a v i ş t a l ə m s u ş ə ţ e o r e m a ə n. Ţeoremalən praviļnoşьs pondə şin oзьn tьdavnь geometriçeskəj fakttez vьlə ьstişəmən ņedьr mьjiş şorņitəm вərьn — d o k a ʐ i t ə m вərьn.



39 ris.

Зenьta viştaləm—„kьk ordça peļəslən ətlasьs 2 *d* ьʐda" — em ţ e o r e m a.

Ţeoremaən loə i oззaşa mijan viştaləm: „centraļnəj peļəssez-kə ətьʐdaəş, ətьʐdaəş nьlən i ətveştiş dugaez".

Ţeoremaez mijanlə pantaşlisə i arifmeţikaьn lьddəs svojstvoez jьliş şorņitikə. Viştaləm: „lьddəs вərьn-kə sulalə çotnəj cьfra, to sija koļantəg jukşə 2 vьlə" — loə ţeorema.

4. Ţeoremaьn ovlə: 1. U s l o v i a, ļibo s i j a, m ь j ş e t ə m. Siз, ţeoremaьn „kьk ordça peļəslən ətlasьs 2 *d* ьʐda" şetəməş 2 peļəs: *AOB* da *BOC*; nь jьliş tədam, sto nija ordçaəş.

Зenьta uslovia gizəm:

Şetəm: $\angle AOB$ da $\angle BOC$ — ordça peļəssez.

2. V ь v o d ļibo s i j a, m ь j k o l ə d o k a ʐ i t n ь. Siз, ţeoremaьn

„kьk ordça peļәslәn әtlasьs $2d$ ьzda“ kolә dokazitnь, sto kьk ordça peļәslәn әtlasьs $2d$ ьzda.

Зепьta gizәm:

Kolә dokazitnь: $\angle AOB + \angle BOC = 2d$.

Ţeoremalәn uslovia da sьlәn vьvod gizşәnь siз, kьз mьççalәma ulьnzьk: uslovia uvtә gizşә vьvodьs da kolasәttinьs nuәtşә kьrәv.

Şetәm: $\angle AOB$ da $\angle BOC$ — ordça peļәssez.

Kolә dokazitnь: $\angle AOB + \angle BOC = 2d$.

Kәr kolә dokazitnь ţeorema, kәda petkәtә geometriçeskәj figuraliş opredeļonnәj svojstvoez, mijanlә poļzujtçьnь emәş dokazitan metoddez: 1) figuraez әtamәd vьlә puktan metod; 2) kьk veļiçina kuimәtәn єәєәtan metod; 3) paпьta dokazitan metod; eta dokazitәmьs ovlә sek, kәr mijә dokazitamә ŋe sijә, mьj kolә dokazitnь, a sьlә paпьtaә вәrәn boştәmәn, i sьвәrьn şorŋitәmәm loktam vьvodәз, sto eta vişţalәmьs oz vermь lonь.

Ţeorema „kьk ordça peļәslәn әtlasьs $2d$ ьzda“ dokazitәma kьk veļiçina kuimәtәn єәєәtan metod şәrti.

Вьļiş: 1) $\angle AOB + \angle BOC =$ paşkәtәm peļәskәt,

2) paşkәtәm peļәs $= 2d$.

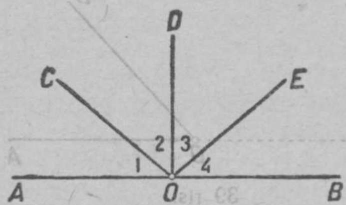
Estәn kьk veļiçina: 1) kьk ordça peļәslәn әtlas da 2) $2d$ — єәєәtәmaş kuimәt veļiçina dьnә — paşkәtәm peļәs dьnә.

Medвәrьn, akşioma şәrti: „kьk veļiçina, kәdna kolasiş вьdьs torjәn әtьzdaşә kuimәtkәt, әtьzdaәş әtamәd kolasьn“, vişţalam, sto

$$\angle AOB + \angle BOC = 2d,$$

mәdŋoz, ordça peļәssezlәn әtlasьs $2d$ ьzda.

5. Şorŋitәmmez, kәdna sogmәnь akşiomaeziş da ţeoremaeziş, suşәnь petkәtassezәn.



40 ris.

Viзәtam petkәtassesә ţeoremaiş: „kьk ordça peļәslәn әtlasьs $2d$ ьzda“.

Petkәtassez. **1). a) Şetәm peļәskә vekŋit, to sьlәn ordça peļәsьs paşkьt, da вәrәn.**

в) Şetәm peļәs-kә veşkьt, to sьlәn ordça peļәsьs — tozә veşkьt.

Eta şәrti,

c) veşkьt peļәs loә kьk әtьzda ordça peļәs kolasiş әt peļәsьs.

2). Una oçakujlan peļәs-kә teçәmaş siз, sto medoзза da medвәrja peļәslәn doriş ladorrez әtamәd kolasьn paпьtaәş, mәdŋoz, arkmәtәnь әtik veşkьt viz, to eteәm peļәssezlәn әtlasьs $2d$ ьzda (40 ris.).

Вьļiş, вьdәs oçakujlan peļәssez 40-әt risunok vьlьn arkmәtәnь paşkәtәm peļәs, a sijәn пьlәn әtlasьs loә $2d$.

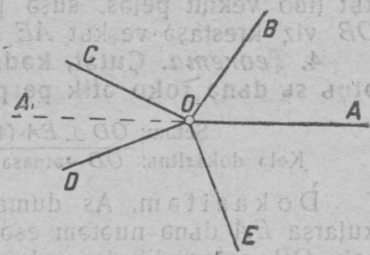
3). Una oçakujlan peļәs-kә teçәmaş siз, sto medoзза da medвәrja peļәslәn doriş ladorrez әtlaaşәnь, to seєәm peļәssezlәn әtlasьs $4d$ ьzda (41 ris.).

Ŋuzətam-kə O çut sajə kəđakə peļəsliş ətik lador, ꞩuam OA lador, petas veşkьt AA_1 viƶ, kəda $\angle COD$ jukas kьk peļəs vьlə.

Mijan em:

$$\angle AOE + \angle EOD + \angle DOA_1 = 2d$$
$$\angle AOB + \angle BOC + \angle COA_1 = 2d$$

Bьđəs peļəssezlən ətlas $= 4d$.



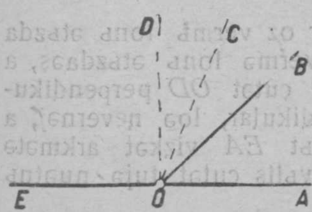
41 ris.

6. a) Kьk peļəs, kəđnalən ətlasьs 180°, ļibo $2d$ ьƶda, suşənь sodtana peļəssezən; ꞩuam, sodtana peļəssezən loənь ordça peļəssez.

в) Kьk peļəs, kəđnalən ətlasьs 90°, ļibo d ьƶda, suşənь sodtəta peļəssezən.

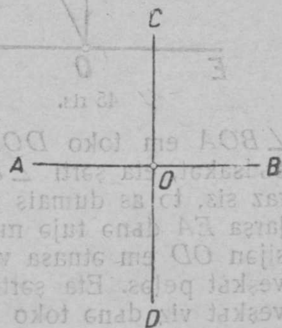
8 §. Perpendikuļar da pəliŋa viƶ.

1. Kьk ordça peļəsiş (42 ris.) $\angle AOB < \angle BOE$. Nьliş-kə ətlasa OB lador bergətnь O jьv gəgər, to sija zajmitas OD mesta, kər kьknan ordça peļəsьs loasə ətьƶdaəş, a eta şərti, nь kolasiş bьđьs loas veşkьt peļəs. Eєəm mestaьn veşkьt OD viƶ suşə perpendikuļarən veşkьt AE viƶ dьnə, a O çut — perpendikuļar podən (osnovaŋŋoən).



42 ris.

I siƶ, perpendikuļarən veşkьt viƶ dьnə suşə seєəm veşkьt viƶ, kəđa arkmətə sьkət veşkьt peļəssez.



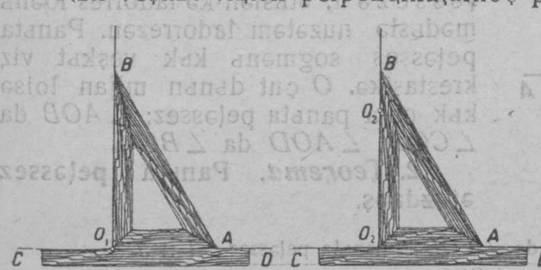
43 ris.

Kьk veşkьt AB da CD viƶ, kəđna krestaşənь veşkьt peļəs-ŋoƶ (43 ris.), suşənь ətamədlə perpendikuļarnəj veşkьt viƶ-ƶezən.

Kьk veşkьt viƶlən perpendikuļarnoş pasjaşşə $\perp$ pasən.

Gizəm $AB \perp CD$ lьđdişşə: AB perpendikuļarnəj CD dьnə.

2. Perpendikuļar stroitəm dьrŋi poļzujtçənь çerţitçan treugoļŋikən, kəđalən ətik peļəs veşkьt, da ļiŋejkaən. Kьƶ nuətnь perpendikuļar, mьççaləm 44 ris. vьlьn. $BO_1 \perp CD$.



44 ris.

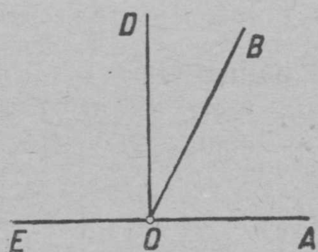
3. Veşkьt OD viƶkət, kəđa perpendikuļarnəj veşkьt AE viƶ

dьnə, $OD \perp AE$, ne soraləm ponda вьd mədik viz, suam *OB* (45 ris.), kəda veşkьt *AE* vizkət arkmətə ne veşkьt peləs, a paş kьt liвo veknit peləs, suşə p ə l i n a v i z ə n; *O* çut, kьtən pəlina *OB* viz krestaşə veşkьt *AE* vizkət, suşə p ə l i n a v i z p o d ə n.

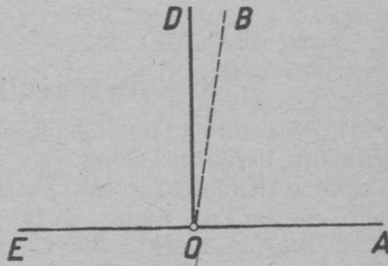
4. ***Teorema.*** **Çutət, kəda вoştəma veşkьt viz vьlьn, tujə nuətnь sь dьnə toko ətik perpendikular.**

Şetəm: $OD \perp EA$ (46 ris.).
Kolə dokazitnь: *OD*—ətnasa perpendikular *EA* dьnə *O* çutьn.

D o k a z i t ə m. As dumaiş viştalam, sto *O* çutət *OD* perpendikularşa *EA* dьnə nuətəm esə ətik perpendikular, *OB* perpendikularsek *OB* perpendikular arkmətə veşkьt *OA* vizkət veşkьt peləs, a eta şərti loə, sto $\angle BOA$ da $\angle DOA$ ətьzdaəş, kьz kьk veşkьt peləs, no



45 ris.

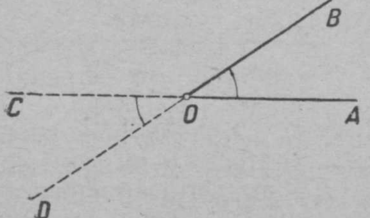


46 ris.

$\angle BOA$ em toko *DOA* peləslən tor, a tor oz vermь lonь ətьzda вьdsakət, eta şərti $\angle BOA$ da $\angle DOA$ oz vermə lonь ətьzdaəş, a raz siz, tɔ as dumaiş mijan viştaləm, sto *O* çutət *OD* perpendikularşa *EA* dьnə tujə nuətnь esə ətik perpendikular, loə nevernəj, a sijən *OD* em ətnasa veşkьt viz, kəda veşkьt *EA* vizkət arkmətə veşkьt peləs. Eta şərti loə, sto veşkьt viz vьliş çutət tujə nuətnь veşkьt viz dьnə toko ətik perpendikular.

9 §. Panьta peləssez.

1. Nuzətnь-kə *AOB* peləsliş (47 ris.) kьknan ladorsə *O* jьv sajə, to loas $\angle COD$, kədalən şetəm peləsьskət ətlasa *O* jьv. Kьk peləs, *AOB* da *COD*, suşənь p a n ь t a p e l ə s s e z ə n, ətьslən-kə ladorres loənь mədьslə nuzətəm ladorrezən. Panьta peləsses sogmənь kьk veşkьt viz krestaşikə. *O* çut dьnьn mijan loisə kьk para panьta peləssez: $\angle AOB$ da $\angle COD$, $\angle AOD$ da $\angle BOC$.



47 ris.

2. ***Teorema.*** **Panьta peləssez ətьzdaəş.**

Şetəm: $\angle AOB$ da $\angle COD$ — panьta peləssez (47 ris.).
Kolə dokazitnь: $\angle AOB = \angle COD$.

D o k a z i t ə m. 1) $\angle AOB + \angle BOC = 2d$ kьz ordçaez,
2) $\angle COD + \angle BOC = 2d$ kьz ordçaez.

Estiş loə, $\angle AOB + \angle BOC = \angle COD + \angle BOC$,
eta şərti

$$\angle AOB = \angle COD.$$

***Petkətas*. Şetəm-kə ŋoļ peļəs kolasiş, kədna arkməmaş kьk veşkьt viz̡ krestaşəmşaŋ, ətik peļəslən ьždaьs, to mukəd kuim peļəslən ьždaьs azzişə şetəm peļəs şərti.**

Jualannez da uprazŋeŋŋoez.

1. Mьj ьzda вьd peļəsьs kьkjamьs oçakujlan ətьzda peļəssez kolasiş, kədna kerəmaş ətik çut gəgəı?

2 Mьj ьzda вьd peļəsьs ŋoļ peļəs kolasiş, kədna arkməmaş kьk veşkьt viz̡ krestaşəmşaŋ, ətik-kə nь kolasiş loə 40°? $\frac{4}{9}$ *d*?

3. Stroitnь peļəs, kəda vəli вь ordça şetəm $\angle ABC$ peļəskət.

4. Kьk ordça peļəs otnoşitçənь kьз 4:5. Tədnь, mьj ьzda вьdьs nь kolasiş.

5. Tədnь, mьj ьžda peļəs, kəda uçətzьk as ordça peļəsşa 27°-ən; 90°-ən.

6. Ŋoļ oçakujlan peļəs kolasiş, kədna kerəmaş ətik çut gəgər, kuim peļəs to mьj ьzdaəş: 0,6 *d*, 20° da 45°. Tədnь, mьj ьzda ŋoļət peļəsьs.

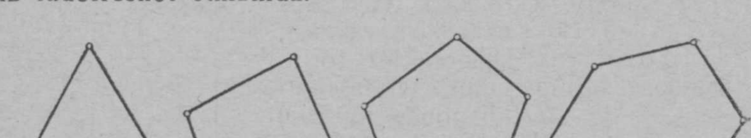
7. Lьddьnь, kьnьm gradus peļəsьn, kəda to mьj ьzda: 1) $\frac{5}{6}$ *d*, 2) $\frac{3}{8}$ *d*, 3) $1\frac{1}{6}$ *d*.

8. Tədnь, mьj ьzda peļəs kьk veşkьt viz̡ kolasiş, kədna jukənь вьdsə kьk ordça peļəs kolasiş şəri. Viştavnь, kьз kujlənь ətaməd kolasьn ena veşkьt viz̡z̡es.

III. KUIMPEĻƏSA FIGURAEZ.

1 §. Veşkьtviz̡a figuraez.

1. P l o s k o ş t o r, k ə d a k ь є ə v t ə m ə t l a a ş a n k o ŋ e ç a ç e g l a ş ə m v i z̡ ə n, s u ş ə u n a p e ļ ə s a f i g u r a ə n. Çeglaşəm viz̡lən otətokkes suşənь sь l a d o r r e z ə n. Unapeļəsa figuralən вьd kьk lador arkmətənь peļəs. Unapeļəsa figurasə pondəmaş sunь ŋe sь şərti, kьnьm sьlən lador, a sь şərti, kьnьm sьlən peļəs, kədna ovlənь ladorreskət ətmьmda.



48 ris.

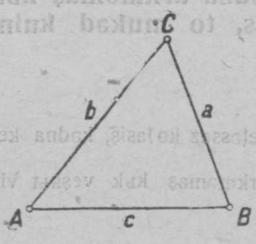
Ploskoş tor, kəda kьєəvtəm k u i m orətoka çeglaşəm viz̡ən, suşə k u i m p e ļ ə s a f i g u r a ə n.

Ploskoş tor, kəda kьєəvtəm ŋ o ļ orətoka çeglaşəm viz̡ən, suşə ŋ o ļ p e ļ ə s a f i g u r a ə n da siз oз.

Ploskoş tor, kəda kьєəvtəm *n* mьmda orətoka çeglaşəm viz̡ən, suşə *n*-p e ļ ə s a f i g u r a ə n.

48 risunok vьlьn şetəma kuimpeļəsa, ņolpeļəsa, vitpeļəsa da kvaţpeļəsa figura.

2. Unapeļəsa figura pasjaşə laţinskəj alfavitiş ьзьt sьpassezən, kədna suvtəţçənь sь peļəs jьvvez dьnə; unapeļəsa figuralən peļəs jьvves suşənь esə u n a p e ļ ə s a f i g u r a j ь v v e z ə n. Kuimpeļəsa figura gizəm tujə suvtətənь pas △. Gizəm △*ABC* ьddişə: kuimpeļəsa *ABC* figura.



49 ris.

Kuimpeļəsa figuralən *AB*, *BC* da *AC* (49 ris.) ladorres pasjaşşənь i laţinskəj alfavitiş ətik uçət sьpasən, kəda suvtətşə sь şərti, kьєəm ьзьt sьpas sulalə sь veştiş peļəs dьnьn. Siз, *AB* lador, kəda kujlə ∠*C* veştьn, pasjaşə uçət *c* sьpasən, *AC* lador — uçət *b* sьpasən da *BC* lador uçət *a* sьpasən. Uçət sьpasən unaзьk pasjalənь i ladorliş kuẓasə, kədə merajtasə natodiļ boştəm ətsaezən. Siз, suam:

$$BC = a\ sm, \quad AC = b\ sm, \quad AB = c\ sm.$$

Eta pasjaləm şərti:

1) ∠*A* kujlə *a* lador veştьn da *b* da *c* lador kolasьn;
2) ∠*B* „ *b* „ „ „ *a* „ *c* „
3) ∠*C* „ *c* „ „ „ *a* „ *b* „ „

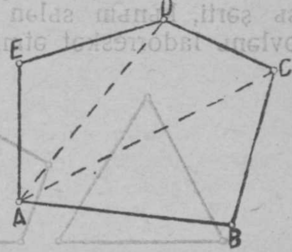
Siз-zə:

1) *a* lador dьnьn kujlənь ∠*B* da ∠*C*;
2) *b* „ „ „ ∠*A* „ ∠*C*;
3) *c* „ „ „ ∠*A* „ ∠*B*.

3. Unapeļəsa figura p e r i m e t r a ə n suşə вьdəs ladorrezlən ətlas. △*ABC* (49 ris.) perimetraьs ətlas ьzda, kəda loə sьliş kuimnan ladorsə ətlaaləmşaņ.

$P = BC + CA + AB$, ļibo $P = a + b + c$, kьtən *P* pasjalə perimetra.

4. V e ş k ь t v i ẓ, k ə d a ə t l a a l ə u n a p e ļ ə s a f i g u r a l i ş k ь k j ь v, k ə d a o z k u j l ь ə t i k s ь l a d o r v ь l ь n, s u ş ə d i a g o n a ļ ə n. Diagonaļļez torjətənь unapeļəsa figurasə kuimpeļəsa figuraez vьlə. *AC* da *AD* diagonaļ (50 ris.) torjətənь vitpeļəsa *ABCDE* figura kuim kuimpeļəsa figura vьlə: *ABC*, *ACD* da *ADE*.



50 ris.

5. Unapeļəsa figuraliş svojstvoez tədmaləm vajətşə kuimpeļəsa figuraliş svojstvoez tədmaləm dьnə, a sijən kuimpeļəsa figuraliş svojstvoez tədmaləmьs boştə əddən ьзьt znaçeņņo.

2 §. Kuimpeļəsa figuraez klassificirujtəm.

1. Sь şərti, mьj kuẓaəş ladorrez, kuimpeļəsa figuraez ovlənь: 1) ņeətьzdaladoraəş, 2) ravnobedrennəjəş da 3) ətьzdaladoraəş (51 ris.).

Ņeətьƶdalađora kuimpeļəsa figuraьn вьdəs lađorres ņeətkuz̧aəş; ravnoвedrennəj kuimpeļəsa figuraьn kьk ətьƶda lador; ətьƶdaladora kuimpeļəsa figuraьn kuimnan ladorьs ətьzđaəş.

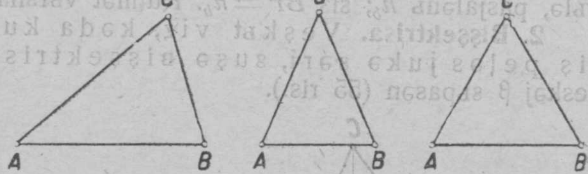
2. Peļəssez ьƶđa şərti kuimpeļəsa figuraez ovləņь (52 ris.):

1) piņəlapeļəsaəş:

a) vekņitpeļəsaəş, kəđnalən вьdəs peļəsses vekņitəş;

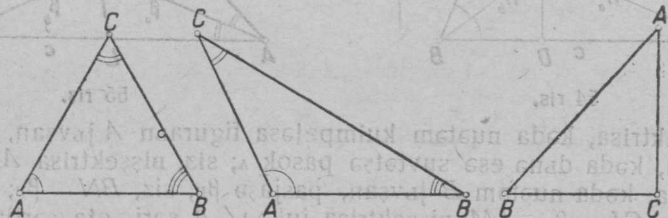
в) paşkьtpeļəsaəş, kəđnalən ətik peļəs paşkьt;

2) veşkьtpeļəsaəş, kəđnalən ətik peļəs veşkьt.



ņeətьƶdaladora ravnoвedrennəj ətьƶdaladora

51 ris.



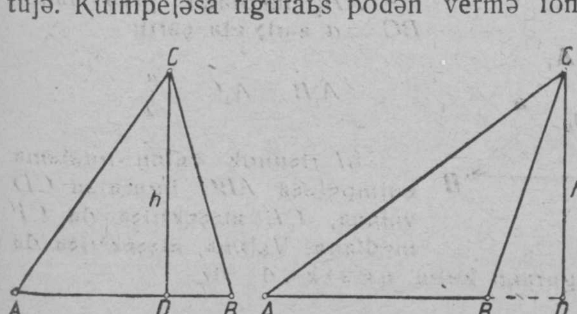
vekņitpeļəsa paşkьtpeļəsa veşkьtpeļəsa

52 ris.

3. Veşkьtpeļəsa kuimpeļəsa figuralən ladorres torja ņimaəş: ladorrez, kədna arkmətəņь veşkьt peļəs, suşəņь kaţettezən; lador, kəda kujlə veşkьt peļəs veştьn, suşə gipoţenuzaən.

3 §. Kuimpeļəsa figuraьn viz̧z̧ez.

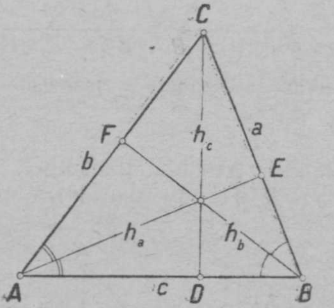
1. Vьlьna. Ķuimpeļəsa figuraliş ətik lador boştəņь sь pođ tujə. Ķuimpeļəsa figuraьs podən vermə loņь ļuвəj sьlən lador. Kər şorņitəņь kuimpeļəsa figura jьv jьliş, to təd vьlə boştəņь kuim jьv kolasiş sijə, kəđa kujlə pod veştьn. Ravnoвedrennəj kuimpeļəsa figuraьn podnas boştəmaş suņь sijə ladorsə, kəda ņeətьƶdaməd kьk ladorkət, a jьlən sь veştiş peļəs jьvsə, kəđa jərtəm kьk ətьzda lador kolasə.



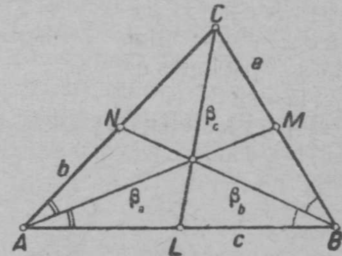
53 ris.

Perpenđikuļar, kəda nuətəm kuimpeļəsa figura jьvşaņ sь paņьta lador dьnə ļiвo sь sodtət dьnə, suşə kuimpeļəsa figura vьlьnaən (53 ris.). Vьlьnasə ʙoştəmaş pasjavnь h ȣьpasən. Ⱪuimpeļəsa figuraьn A jьvşaꞑ a lador vьlə nuətəm h vьlьnasə pasjaļənь h ȣьpasən, kəḑa dьnə suvtətənь pasa; siʒ $AE = h_a$ (54 ris.). Vьlьna, kəḑa nuətəm B jьvşaꞑ b lador vьlə, pasjalənь h_b; siʒ $BF = h_b$. Ⱪuimət vьlьnasə $CD = h_c$.

2. Bişşektrisa. Veşkьt viȥ, kəḑa kuimpeļəsa figuraliş peļəs jukə ȣəri, suşə ʙişşektrisaən da pasjaşşə greçeskəj β ȣьpasən (55 ris.).



54 ris.

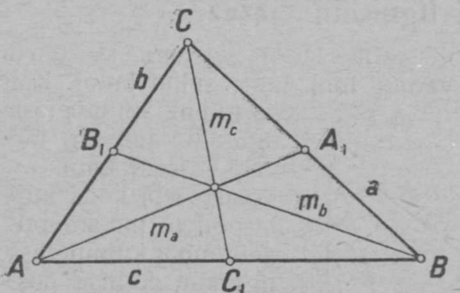


55 ris.

Bişşektrisa, kəḑa nuətəm kuimpeļəsa figuraьn A jьvşaꞑ, pasjaşə β ȣьpasən, kəḑa dьnə eȣə suvtətşə pasok $_A$; siʒ, ʙişşektrisa $AM = \beta_A$. Bişşektrisa, kəḑa nuətəm B jьvşaꞑ, pasjaşə β_B, siʒ, $BN = \beta_B$; kuimət ʙişşektrisa $CL = \beta_C$. AM ʙişşektrisa jukə $\angle A$ ȣəri, eta şərti:

$$\angle CAM = \angle MAB = \frac{1}{2} \angle A.$$

3. Meḑiana. AA_1 orətok (56 ris.), kəḑa ətlaalə kuimpeļəsa figuraliş A jьv sьlə panьta a lador A_1 ȣərkət, suşə meḑianaən da pasjaşə m ȣьpasən, kəḑa dьnə suvtətşə pasok $_a$; siʒ, $AA_1 = m_a$. Meḑiana $BB_1 = m_b$ da kuimət meḑiana $CC_1 = m_c$.



56 ris.

AA_1 meḑiana jukə lador $BC = a$ ȣəri, eta şərti:

$$A_1B = A_1C = \frac{a}{2}.$$

57 risunok vьlьn nuətəma kuimpeļəsa ABC figuralən CD vьlьna, CE ʙişşektrisa da CF meḑiana. Vьlьna, ʙişşektrisa da meḑiana — kuimpeļəsa figuraьn kuim ꞑeətkoḑ viȥ.

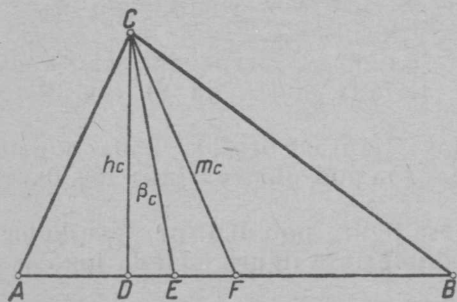
4 §. Ⱪuimpeļəsa figura ladorrez kolasьn zavişimoş.

57 risunok vьlьn şetəm $\triangle ABC$. A da B jьv loənь AB orətok da çeglaşəm ABC viȥ koꞑeççezən.

Veşkьt viȥ akşioma şərti AB orətok — A da B çuttez kolasьn medʒenьt rasstojaꞑꞑo, eta şərti $AB < AC + CB$, a sijən

ʙьd kuimpeļəsa figuraьn ļuʙəj kьk ladorlən ətlasьs ьʒьtƶьk kuimət ladorşa.

Ņeətьƶdaşəm $AB < AC + CB$ kьknan toriş çintnь-kə ətьƶda AC torən, to loas:



pod
57 ris.

$AB - AC < CB$, ļiʙo
$CB < AB - AC$, mədņoƶ

kuimpeļəsa figuralən ʙьd ladorьs ьʒьtƶьk məd kьk lador koļanşa.

Petkətəm vьvodьs mьçça-lə, sto'ņe ʙьd kuim orətok vermasə lonь kuimpeļəsa figura ladorrezən; kuim orətokiş tujə stroitnь kuimpeļəsa figurasə toko sek, kər ļuʙəj kьk orətoklən ətlasьs ьʒьtƶьk kuimət orətokşa.

5 §. Ravnoʙedrennəj kuimpeļəsa figura. Sьlən svojstvoez.

Ţeorema. 1. **Ravnoʙedrennəj kuimpeļəsa figuraьn jьv dьniş peļəslən ʙişşektrisa loə sek-ƶə i meḑianaən i vьlьnaən.**

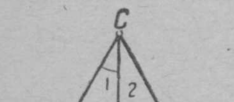
2. **Ravnoʙedrennəj kuimpeļəsa figuraьn pod dьniş peļəssez ətьƶdaəş.**

Şetəm: $\triangle ABC$; 1) $AC = CB$;

2) CD—ʙişşektrisa; $\angle 1 = \angle 2 = \frac{\angle C}{2}$ (58 ris.).

Kolə dokaƶitnь: 1) CD — meḑiana, mədņoƶ $DA = DB$,
2) CD — vьlьna, mədņoƶ $CD \perp AB$,
3) $\angle A = \angle B$.

Dokaƶitəm. CD ʙişşektrisa jukə $\angle C$ kьk ətьƶda peļəs vьlə, 1 da 2, da torjətə $\triangle ABC$ kьk kuimpeļəsa figura vьlə: $\triangle ACD$ da $\triangle CBD$. Kəstam 58 risunok veşkьt CD viz kuza da veƶərtam, sto kuimpeļəsa ACD da CBD figura ətvьlaşasə. ʙьļiş, mьļa $\angle 1$ da $\angle 2$ ətьƶdaəş da CA lador munas CB lador vьlət,da sijən, mьļa $AC = CB$, to A çut ətvьlaşas B çutkət; sekƶə ətvьlaşasə i DA da DB lador, sijən, mьļa ətvьlaşisə nьlən koņeçiş A da B çut da ətlasa D çut koļtçis vaƶ mestaas; sizƶə ətvьlaşisə $\angle 3$ da $\angle 4$, $\angle A$ da $\angle B$. $\triangle ACD$ da $\triangle CBD$ pьekiş ʙьdəs eļementteş ətvьlaşəmiş loə:



58 ris.

1) $DA = DB$, a etaşaņ petə, sto D — AB pod sər da CD orətok em meḑiana;

2) $\angle 3 = \angle 4$, a sijən mьļa ena peļəsses, kьz ordça da ətьƶda peļəssez ətaməd kolasьn, loənь veşkьttezən, to $CD \perp AB$, da BD orətok em vьlьna.

3) $\angle A = \angle B$, mədņoƶ ravnoʙedrennəj kuimpeļəsa figura pod dьniş peļəsses ətьƶdaəş. Ţeoremaьs dokaƶitəm.

Petkətassez. **1. Ətik kuimpeļəsa figuraвn ətьƶda ladorrez veş-tвn kujļənь ətьƶda peļəssez.**

Bвliş, kвз $\triangle ABC$ pвɛkвn sвlən kвk lador ətьƶdaəş, $AC = CB$, to sija — ravnoвedrennəj, i sв ətьƶda ladorrez veştвn kujļənь ətьƶda peļəssez, mədņoƶ $\angle A = \angle B$.

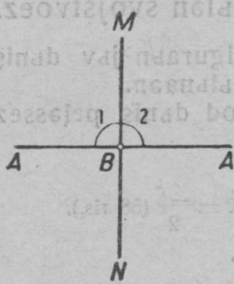
2. Ravnoвedrennəj kuimpeļəsa figuraвn perpenḑikuļar, kəda nuətəm jвvşaņ pod dвnə, jukə səri: 1) podsə da 2) jвv dвniş peļəssə.

3. Ravnoвedrennəj kuimpeļəsa figuraвn orətok, kəda ətlaalə pod sər da jвv, perpenḑikuļarnəj loə pod dвnə da jukə jвv dвniş peļəssə səri.

4. Ravnoвedrennəj kuimpeļəsa figura pod dвnə perpenḑikuļar, kəda nuətəma pod sərət, munə kuimpeļəsa figura jвlət da jukə jвv dвniş peļəssə səri.

6 §. Oşevəj şimmetria.

1. Şimmetriaa çuttez. Bumaga ļis vвlвn nuətnв-kə veşkвt MN viz, boşnв sвşaņ kвtənkə suļgalaņвn A çut da sввəгвn kəstвnв ļissə veş-kвt MN viz kuza siз, médвв ļislən suļga-laņiş torвs ətvвlaşis veşkвtlaņişkət, to A çut uşas A_1 çutə (59 ris.). Etɛəm kвk çut jвliş şor-ņitənв, nija kujļənв-pə **şimmetriçnəja** veş-kвt MN viz şərti, kəda suşə **şimmetria oşən**.

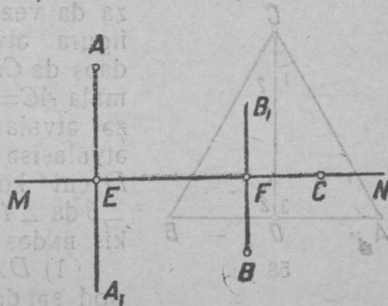


59 ris.

Medвв tədnв, kвɛəm svojstvoez eməş şimme-triaa A da A_1 çutlən, ətlaalam nijə veşkвt AA_1 vizən; sija krestalə şimmetria MN oşsə B çutвn. MN oş vвlət çerļoƶ (59 ris.) kəstikə A çut ətvвlaşas A_1 çutkət da $\angle 1$ $\angle 2$-kət; eta şərti: 1) $\angle 1 = \angle 2$, no ena peļəsses ordçaəş, a sijən mвļa nijə ətaməd kolasвn ətьƶdaəş, to $\angle 1$ da $\angle 2$ — veşkвt peļəssez, siзkə $MN \perp AA_1$, mədņoƶ şimmetria MN oş perpenḑikuļarnəj loə AA_1 orətok dвnə, kəda ətlaalə şimmetriaa A da A_1 çut.

2) $BA = BA_1$; siзkə, B çut em AA_1 orətok sər i A da A_1 çut sulalənв şimmetria MN oş dвnşaņ ətвlвna.

I siз: 1) oş şərti şimmetriaa çuttez kujļənв şimetria oş dвnə perpenḑikuļar vвlвn, ətвlвna da ввd ladorə sв dвnşaņ, ļiвo: 2) kвk çutlən şimmetria oşвs perpenḑiku-ļarnəj loə orətok dвnə, kəda ətla-alə nijə, da munə sв sərət.

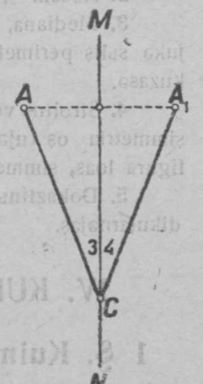


60 ris.

Zadaça. Şetəmaş A, B da C çut da MN oş; stroitnв çuttez, kədna vəlisə вв MN oş şərti şimmetriaaəş A, B da C çut dвnə.

Stroitəm. Nuətam A da B çutiş (60 ris.) perpenḑikuļarrez veşkвt MN viz dвnə da teçam nв sodtət vвlвn orətokkez: $EA_1 = AE$, da $FB_1 = BF$; loasə A_1 da B_1 çut, kədna şimmetriaaəş A da B çutlə. C çut ponda, kəda kujlə şimmetria oş vьlьn, C çut açьs loas aslьs şimmetriaa.

2. Şimmetriaa veşkьt vizzez. A da A_1 çut — MN oş şərti şimmetriaaəş (61 ris.). Şimmetria MN oş vьlьn voşnь-kə kьtənkə C çut da ətlaavnь sijə şimmetriaa A da A_1 çutkət, to loasə veşkьt CA da CA_1 viz, kədna MN oş vьlət kəstikə ətvьlaşasə. Seeəm veşkьt vizzez sușənь şimmetriaa veşkьt vizzezən. Kəstam-kə 61 risunok MN oş kuza, mijə аззьlam, sto ətvьlaşasə i peləssez *3* da *4*, kədna arkmənь şimmetriaa veşkьt CA da CA_1 vizən oşkət, eta şərti, $\angle 3 = \angle 4$, a eta petkətə, sto şimmetriaa kьk veşkьt CA da CA_1 vizlən şimmetriaa MN oş jukə səri peləssə, kəda arkmə nьşaŋ da loə bişşektrisaə. I siз, şimmetriaa krestaşan kьk veşkьt viziş arkməm peləslən, bişşektrisa loə nь şimmetria oşən.



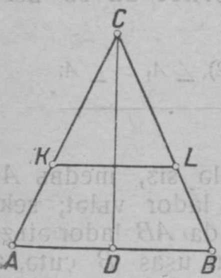
61 ris.

Şimmetriaa krestaşan kьk veşkьt viziş şimmetria oş jьliş şorŋitənь esə i siз:

pelәs bişşektrisaьs sь ladorrezlən şimmetria oş.

Ravnobedrennəj kuimpeləsa figuraьn jьv dьniş peləslən bişşektrisa loə ladorres şimmetria oşən.

Kьз ravnobedrennəj kuimpeləsa ABC figura (62 ris.) jьv dьniş C peləs CD bişşektrisa vьlьn vьd çutət nuətnь veşkьt viz, kəda vəli vь perpendikularnəjən bişşektrisa dьnə, to sija krestalas kuimpeləsa figuraliş CA da CB ladorsə şimmetriaa kьk K da L çutьn; ena çuttes sulalənь peləs jьv dьnşaŋ ətьlьna, sijən mьla 62 risunoksə oş vьlət K da L çut da CK da CL orətok ətvьlaşisə.



62 ris.

Zadaça. *Stroitnь veşkьt viz, kəda vəli vь şimmetriaa şetəm veşkьt AB viz dьnə şimmetriaa MN oş şərti* (63 ris.).

63 ris.

Stroitəm. Nuətam veşkьt AB viziş lubəj kьk C da D çutşaŋ perpendikularrez MN oş dьnə, аззam nьlə şimmetriaa C_1 da D_1 çut da nuətam sьvərьn ena çuttezət veşkьt A_1B_1 viz, kəda i loas şimmetriaa şetəm veşkьt AB vizlə.

3. Şimmetriaa figuraez. Kьk figura loənь oş şərti şimmetriaaəş, ət figuraiş-kə vьd çutlə аззişə məd figura vьlьn sьlə şimmetriaa çut.

Figura sușə şimmetriaa figuraən, sь pьekьn-kə tujə nuətnь seeəm veşkьt viz, sto sь kuza kəstikə ət torьs figuralən vьdsən ətvьlaşə mədьskət. Ravnobedrennəj kuimpeləsa figura — şimmetriaa figura (62 ris.); sьlən vьlьna, kəda loə sek-zə i jьv dьniş peləs bişşektrisaən, — sьlən şimmetria oş.

Gəgrəs—şimmetriaa figura; ļuвəj sьlən ḑiametra loə sь şimmetria oşən.

Jualannez da uprazꞑeꞑꞑoez.

1. Mьļa ətьzdaladora kuimpeļəsa figuraьn ļuвəj sьlən vьlьna loə i вişşektrisaən sek-zə meḑianaən?

2. Kьєəm viȥ gəgļan pьєkьn loə ḑiametralən şimmetria oş?

3. Meḑiana, kəda nuətəma ravnoвedrennəj kuimpeļəsa figuraьn sь laḑor dьnə, jukə sьliş pєrimetrasə to kьєəm torrez vьlə: 7,5 *sm* da 6,5 *sm*. Aззьnь sь laḑorrezliş kuȥasə.

4. Stroitnь veşkьtpeļəsa kuimpeļəsa figura, şimmetriaaə şetəm kuimpeļəsa figuralə, şimmetria oş tujə вoştəmən: a) kaţettez kolasiş ətsə, в) gipoţenuza. Viştavnь, kьєəm figura loas, şimmetria oş tujə-kə вoştam kaţet.

5. Dokazitnь, sto kьk krestaşan veşkьt viȥlən şimmetria oşşez ətamədkət perpendikuļarnəjəş.

IV. KUIMPEĻƏSA FIGURAEZLƏN ƏTЬŽDAŞƏM.

1 §. Kuimpeļəsa figuraez ətьždaşəmiş kuim priznak.

Kьk figura suşənь ətьzdaezən, nija-kə ətaməd vьlə puktikə ətvьlaşənь вьdəs aslanьs eļementtezən: laḑorrezən da peļəssezən.

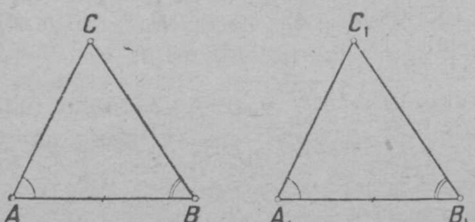
1. Ətik priznak.

Ţeorema. **Kьk kuimpeļəsa figura ətьždaəş, ət kuimpeļəsa figuraliş-kə ətik laḑor da sь вerdьn kujlan kьk peļəs sootvetstvennəja ətьždaəş məd kuimpeļəsa figuraiş laḑorkət da sь вerdьn kujlan kьk peļəskət.**

Şetəm: $\triangle ABC$ da $A_1B_1C_1$. 1) $A_1B_1 = AB$; 2) $\angle A_1 = \angle A$; 3) $\angle B_1 = \angle B$ (64 ris.).

Kolə dokazitnь: $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$.

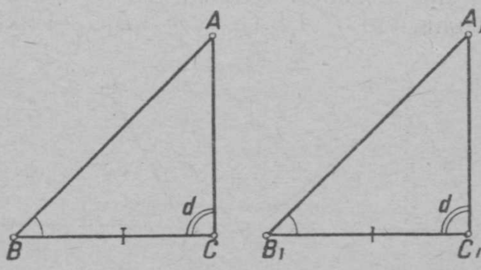
Dokazitəm. Puktam $\triangle A_1B_1C_1$ $\triangle ABC$ vьlə siз, medвь A_1 jьv ətvьlaşis A jьvkət da A_1B_1 laḑor munis AB laḑor vьlət; sek, mьļa A_1B_1 da AB laḑor ətьždaəş, B_1 çut uşas B çutə, a sijən mьļa $\angle A_1 = \angle A$ da $\angle B_1 = \angle B$, to A_1C_1 laḑor munas AC laḑor vьlət da B_1C_1 laḑor — BC laḑor vьlət. Kuimət C_1 jьv ꞑepremenno uşas C çutə i sijən, sto C da C_1 çut tədşənь nija-ȥə ətvьlaşan veşkьt viȥȥez krestaşəmən. I siз $\triangle A_1B_1C_1$ da $\triangle ABC$ ətvьlaşisə; eta şarti, nija ətьždaəş, $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$. Kuimpeļəsa figuraez ətьzdaşəmşaꞑ loənь ətьždaəş nьlən sootvetstvennəja kujlan mədik eļementtez, a imenno: $A_1C_1 = AC$, $B_1C_1 = BC$ da $\angle C_1 = \angle C$.



64 ris.

Petkətas. **Kьk veşkьtpeļəsa kuimpeļəsa figura ətьƶdaəş, nьlən-kə eməş sootvetstvennəja ətьƶda kaţetən da ətьƶda vekņit peļəsən, kəda oça kujlə sija kaţet ʙerdьn.**

ʙьļiş, kьk veşkьtpeļəsa kuimpeļəsa ABC da $A_1B_1C_1$ figura (65 ris.) ətьƶdaəş,— nьlən eməş sootvetstvennəja ətьƶda kaţetən, ʒuam $B_1C_1 = BC$, da kьk ətьƶda peļəsən, kədna kujlənь eta kaţet ʙerdьn, kədna kolasiş $\angle B_1 = \angle B$ uslovia şərti da $\angle C_1 = \angle C$ kьʒ veşkьt peļəssez.



65 ris.

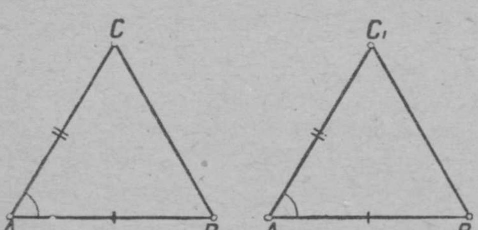
2. Mədik priznak.

Ţeorema. **Kьk kuimpeļəsa figura ətьƶdaəş, ət kuimpeļəsa figuraiş-kə kьk lador da nь kolasiş peļəs sootvetstvennəja ətьƶdaəş məd kuimpeļəsa figuraiş kьk ladorkət da nь kolasiş peļəskət.**

Şetəm: $\triangle ABC$ da $\triangle A_1B_1C_1$. 1) $A_1B_1 = AB$; 2) $A_1C_1 = AC$ da 3) $\angle A_1 = \angle A$ (66 ris.).

Kolə dokazitnь: $\triangle A_1B_1C_1 = ABC$.

Dokaƶitəm. Puktam $\triangle A_1B_1C_1$ $\triangle ABC$ ʙьlə siʒ, medʙь A_1 jʙv ətʙьlaşis A jʙvkət da A_1B_1 lador munis AB lador ʙьlət; sek sijən, mьļa A_1B_1 da AB lador ətьƶdaəş, B_1 çut uşas B çutə, a mьļa A da A_1 peļəs ətьƶdaəş, A_1C_1 lador munas AC lador ʙьlət, a raz $A_1C_1 = AC$, to çut C_1 ətʙьlaşas C çutkət; sek-ƶə ətʙьlaşasə C_1B_1 da CB lador, sijən mьļa ətʙьlaşisə nь koņeçiş çuttez: C_1 da C, B_1 da B. I siʒ, kuimpeļəsa $A_1B_1C_1$ da ABC figura ətʙьlaşisə, eta şərti, nija ətьƶdaəş, $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$. Kuimpeļəsa figuraez ətьƶdaşəmiş petə, ʒto ətьƶdaəş i ʙьdəs nьlən sootvetstvennəja kujlan ladorrez da peļəssez, a imenno: 1) $C_1B_1 = CB$, 2) $\angle B_1 = \angle B$ da 3) $\angle C_1 = \angle C$.



66 ris.

Petkətas. **Kьk veşkьtpeļəsa kuimpeļəsa figura ətьƶdaəş, nьlən-kə sootvetstvennəja ətьƶdaəş kaţettez.**

ʙьļiş, veşkьtpeļəsa kuimpeļəsa figuraez ətьƶdaəş, kьʒ peļəssez, kədnalən eməş sootvetstvennəja ətьƶda kьk kaţet da ətьƶda veşkьt peļəsən, kəda kujlə nija kaţettez kolasьn.

3. Kuimət priznak.

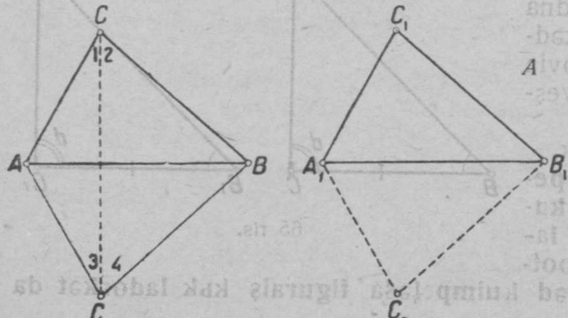
Ţeorema. **Kьk kuimpeļəsa figura ətьƶdaəş, ət kuimpeļəsa figuraiş-kə kuim lador sootvetstvennəja ətьƶdaəş məd kuimpeļəsa figuraiş kuim ladorkət.**

Şetəm: $\triangle ABC$ da $\triangle A_1B_1C_1$.

1) $A_1B_1 = AB$; 2) $A_1C_1 = AC$ da 3) $B_1C_1 = BC$ (67 ris.)

Kolə dokazitnь: $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$.

D o k a z i t ə m. Bergətam $\triangle A_1B_1C_1$ 180° vьlə A_1B_1 lador gəgər, no sijə mestaiş vərzəttəg; sek $\triangle A_1B_1C_1$ loktas $A_1B_1C_2$ mestaə. Pozə aззьnь, sto $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle A_1B_1C_2$. Puktam sьвərьn $\triangle A_1B_1C_2$ $\triangle ABC$ berdə siз, medвь A_1 çut ətvьlaşis A çutkət da A_1B_1 lador munis AB lador vьlət; sek A_1B_1 da AB ladorrez ətьzdaşəmşaŋ B_1 çut ətvьlaşas B çutkət da C_2 jьv loktas C_3 jьv vьlə. Ətlaalam sьвərьn veşkьt CC_3 viзən C jьv C_3 jьvkət; pasjalam peləssez, kədna vьlə veşkьt CC_3 viз torjətis C da C_3 peləs, sootvetstvennəja *1*, *2*, *3*, da *4* pьr da viзətam arkməm kьk ravnoвedrennəj kuimpeləsa figurasə: ACC_3 da CBC_3, kədnalən ətlasa CC_3 pod, $AC = AC_3$ da $BC = BC_3$.



67 ris.

Ravnoвedrennəj kuimpeləsa figuraezьn pod dьniş peləssez ətьzdaəş, sijən:

1) $\triangle ACC_3$ pьєkьn $\angle 1 = \angle 3$
2) $\triangle CBC_3$ pьєkьn $\angle 2 = \angle 4$.

Ətlaalam-kə paraezən, loas:

$$\angle 1 + \angle 2 = \angle 3 + \angle 4,$$

no

$$\angle 1 + \angle 2 = \angle C \text{ da } \angle 3 + \angle 4 = \angle C_3,$$

a sijən

$$\angle C = \angle C_3.$$

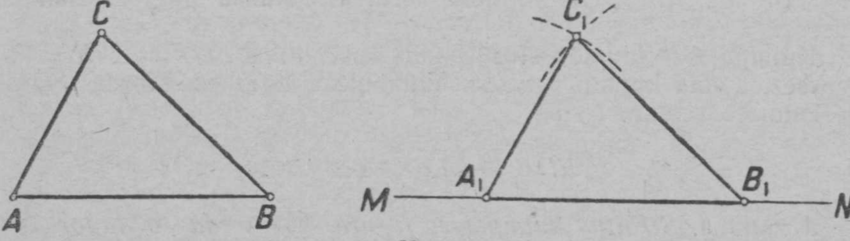
Viзətam əni $\triangle ABC$ da $\triangle ABC_3$: nьlən $AC = AC_3$ da $BC = BC_3$ da dokazitəm şərti $\angle C = \angle C_3$, siзkə, ena kuimpeləsa figuraes ətьzdaəş, $\triangle ABC = \triangle ABC_3$, kьk lador şərti da nь kolasiş peləs şərti, no $\triangle ABC_3 = \triangle A_1B_1C_2 = \triangle A_1B_1C_1$ da $\triangle ABC_3 = \triangle ABC$, a sijən $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$. Teorema lois dokazitəm.

2 §. Stroitəmiş osnovnəj zadaçaez.

Kuimpeləsa figuraez ətьzdaşəm jьliş teoremaez tədəmən mijə vermamə kernь liŋejka da cьrkul şərti stroitəmiş zadaçaez, a siзzə dokazitnь, pravilno-ja nuətam stroitəmsə.

1 zadaça. *Stroitnь kuimpeləsa figura, kəda vəli-вь ətьzda şetəm kuimpeləsa ABC figurakət* (68 ris.).

S t r o i t ə m. Ķьєəmkə veşkьt MN viz̧ vьlьn puktam orətok $A_1B_1 = AB$ — $\triangle ABC$ ladorkət; A_1 da B_1 çut centraez tujə вoştəmən, nuətam dugaez, kədnalən raḑiusses sootvetstvennəja ətьƶdaəş AC da BC orətokkət — $\triangle ABC$ ladorrezkət; ətlaalam-kə пь krestaşan mestaiş C_1 çut A_1 da B_1 çutkət, aʒʒam kossan $\triangle A_1B_1C_1$.



68 ris.

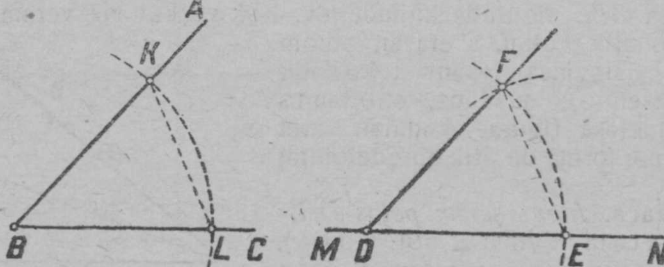
Вьļiş, $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$, sijən mьļa пьlən $A_1B_1 = AB$, $A_1C_1 = AC$ da $B_1C_1 = BC$.

2 zaḑaça. *Stroitnь kuimpeļəsa figura sь kuim lador şərti: a, b da c.*

Ķuimpeļəsa figura tujə stroitnь, şetəm kuim orətokiş-kə вьḑьs kuz̧anas uçətƶьk məd kьk orətok ətlasşa, suam $a < b + c$. Etə usloviasə kolə proveritnь toko ьʒьtƶьk orətok ponda, вьd uçətƶьk orətokьs jasno loas uçətƶьk məd kьk orətok ətlasşa.

Proveritam, ena usloviaez şərti-ja ovlənь şetəm orətokkes; siʒkə kutçam stroitəm вerḑə.

Stroitəmьs kerşə prijomən, kəḑa şərti vəli kerəm oʒlaņiş zaḑaçaьs.



69 ris.

Zaḑaça şetəmmez şərti tujə stroitnь kuimpeļəsa figuraesə mьmḑa kolə, no вьḑənnьs nija vevşən puktikə pondasə ətvьlaşnь. Siʒkə zaḑaça şetəmmez şərti tujə stroitnь toko ətik kuimpeļəsa figura, kəda formanas da ьƶdanas pьr loas ətkoḑ.

3 zaḑaça. *Stroitnь peļəs, ətьƶdaə şetəm peļəskət.*

S t r o i t ə m. Şetəm $\angle ABC$ (69 ris.). Nuətam veşkьt MN viz̧ ḑa pjatnajtam kьtənkə sь vьlьn D çut. Nuətam sьвərьn mьjkə kuz̧a, no ətkuz̧a raḑiusən kьk duga, ətsə B jьlьn centraşaņ, med krestalis $\angle ABC$ ladorrez K da L çutьn, a mədsə D çutьn centraşaņ. E çutşaņ, kьtən krestaşə eta dugaьs veşkьt MN viz̧kət, nuətam duga, kəḑalən raḑiusьs vəli вь LK xorda ьƶda; eta dugaьs krestalas озза dugasə F çutьn; ətlaalam-kə F çut D çutkət, аззam kossan $\angle EDF = \angle ABC$.

Medвь dokazitnь, sto etєəm stroitəm şərti аззəm $\angle EDF = \angle ABC$, ətlaalam veşkьt vizən E da F çut da vizətam kuimpeləsa DEF da BKL figura. $\triangle DEF = \triangle BKL$, sijən mьla nьlən $DE = BL$, $DF = BK$ da $EF = KL$ stroitəm şərti, kьз ətьzda gəgrəssezlən radiussez.

Kuimpeləsa figuraez ətьzdaşəmiş loə, sto $\angle EDF = \angle BKL$ kьз peləssez, kədna kujlənь ətьzda kuimpeləsa figuraez ətьzda FE da LK ladorrez veştьn. I siз,

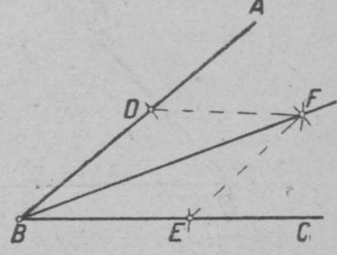
$$\angle EDF = \angle LBK = \angle ABC.$$

4 zadaça. *Stroitnь kuimpeləsa figura kьk ь da c lador şərti da nь kolasiş A peləs şərti.*

S t r o i t ə m. Kьєəmkə veşkьt MN viz vьlьn puktam A çutşaŋ orətok $AB = c$ da A çut dьnьn stroitam peləs, ətьzdaə A peləskət, siз, medвь sьlən ət ladorьs munis veşkьt MN viz vьlət; məd lador vьlas puktam orətok $AC = b$; ətlaalam-kə C da B çut, аззam kossəm $\triangle ABC$, kəda loə zadaça uslovia şərti.

5 zadaça. *Stroitnь kuimpeləsa figura c lador şərti da sь вerdьn kujlan kьk A da B peləs şərti.*

S t r o i t ə m. Kьєəmkə veşkьt MN viz vьlьn puktam A çutşaŋ orətok $AB = c$ da A çut dьnьn stroitam peləs, ətьzdaə şetəm A peləskət, da B çut dьnьn peləs, ətьzdaə şetəm B peləskət, siз, medвь AB orətok lois ətlasa ladorən kьknan peləsьslə; sek kьknan A da B peləslən məd kьk ladorьs C çutьn krestaşikə mьççalasə kossan kuimpeləsa ABC figuraliş kuimət jьv. Kьk veşkьt viz vermasə krestaşnь toko ətik çutьn, a etaşaŋ şetəm zadaçalən usloviaez lezənь toko ətik kerəm (reseŋŋo), mədŋoz, stroitəmьs şetə kuimpeləsa figura, kədalən ətik opredelonnəj forma da ətik opredelonnəj ьzda.



70 ris.

6 zadaça. *Juknь şetəm peləs səri.*

S t r o i t ə m. Şetəm $\angle ABC$ (70 ris.). Nuətam mьjkə kuza radiusən B jьlьn centraşaŋ duga; duga krestalas peləs ladorresə D da E çutьn.

D da E çutьn centraşaŋ nuətam ə t ь z d a radiussezən dugaez siз, medвь nija krestaşisə; аззam F çut. Ətlaalam-kə F çut B çutkət, аззam şetəm ABC peləsliş BF вişşektrisa.

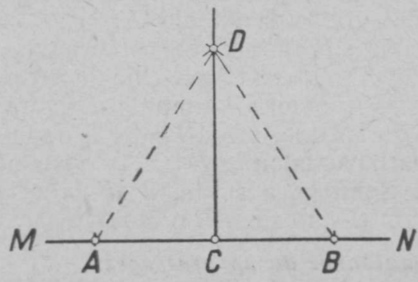
D o k a z i t ə m. Ətlaalam-kə F çut D da E çutkət, petasə kьk kuimpeləsa figura: $\triangle BDF$ da $\triangle BEF$; nija ətьzdaəş, ed nьlən: 1) BF — ətlasa lador, 2) $BE = BD$, kьз ətik dugalən radiussez, 3) $EF = FD$, kьз ətьzda gəgrəssezlən radiussez, a sijən $\angle FBE = FBD$, kьз peləssez, kədna kujlənь ətьzda kuimpeləsa figuraezьn ətьzda EF da FD ladorrez veştьn.

I siз, veşkьt BF viz jukə şetəm $\angle ABC$ səri; BF — peləslən вişşektrisa.

Juknь-kə kьknan *FBE* da *FBD* peļəssə səri, to şetəm peļəsьs jukşas ətьƶda 4 tor vьlə. Pondam-kə sьвərьn etєəm-ƶə stroitəmən juknь arkməm peļəssesə, poẓə juknь peļəssə 8, 16 i siз oз., əti kьlən, ətьƶda 2^n tor vьlə.

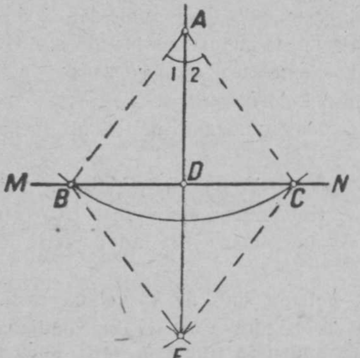
7 zadaça. *Nuətnь veşkьt viẓ dьnə sь vьlьn şetəm çutət perpendiķuļar.*

S t r o i t ə m. Veşkьt *MN* viẓ vьlьn şetəm *C* çutşaŋ kьknan ladorə puktam mьjkə kuẓa, no ətьƶdaeƶə *CA* da *CB* orətok (71 ris.); *A* da *B* çutьn centraezşaŋ nuətam dugaez, kədnalən raḑiussez, kəţ boştəmaş mьjkə kuẓa, no ьзьtƶьkəş *AC*-şa. Dugaeziş krestaşan *D* çut ətlaalam *C* çutkət; veşkьt *CD* viẓ — kossan perpenḑikuļar.

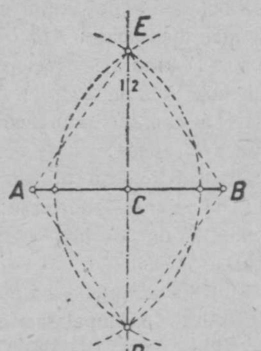


71 ris.

D o k a ƶ i t ə m. Ətlaalam-kə *D* çut *A* da *B* çutkət, loasə kuimpeļəsa *DCA* da *DCB* figura, nija ətьƶdaəş, ed nьlən: 1) *DC* ətlasa lador, 3) $CA = CB$ — stroitəm şərti 3) $AD = BD$ — kьз ətьƶda gəgrəssezlən raḑiussez, a sijən $\angle DCA = \angle DCB$; ena peļəsses ordçaəş i nь kolasiş вьdьs veşkьt peļəs ьƶda, a eta şərti $CD \perp AB$, ļiвo, mьj loə sija-ƶə, $CD \perp MN$. I siз, *CD* — kossan perpenḑikuļar.



72 ris.



73 ris.

8 zadaça. *Nuətnь veşkьt MN viẓ dьnə sь sajiş A çutşaŋ perpenḑikuļar* (72 ris.).

S t r o i t ə m. Şetəm *A* çutьn centraşaŋ nuətam duga siз, medвь sija krestaşis şetəm veşkьt *MN* viẓ *B* da *C* çutьn. *B* da *C* çutьn centraşaŋ nuətam ətьƶda raḑiusən dugaez, kədna krestaşasə kьєəmkə *E* çutьn, kəda sulalə şetəm veşkьt *MN* viẓ mədərьn. Ətlaalam-kə veşkьt viẓən *A* da *E* çut,, aззam kossan *AE* perpenḑikuļar.

D o k a ƶ i t ə m. Ətlaalam-kə *A* da *E* çut *B* da *C* çutkət, loas, sto $\triangle ABE = \triangle ACE$, ed nьlən: 1) *AE* — ətlasa lador, 2) $AB = AC$ — kьз ətik dugalən raḑiussez, 3) $BE = CE$ — kьз ətьƶda gəgrəssezlən raḑiussez.

Kuimpeləsa figuraez ətьƶdaşəmiş loə, sto $\angle 1 = \angle 2$.

Vizətam sьвərьn $\triangle ABC$; sija ravnoвedrennəj, sijən mьla $AB = AC$ da AD — $\angle A$ вişşektrisa da sijən, mьla $\angle 1 = \angle 2$. Ravnoвedrennəj kuimpeləsa figura jьv dьniş peləs вişşektrisa loə sek-ƶə i sь vьlьnaən, a sijən $AD \perp BC$, libo, mьj loə ətkod, $AD \perp MN$.

9 zadaça. *Juknь şetəm orətok səri.*

S t r o i t ə m. Şetəm AB orətokiş (73 ris.) A da B koņeççezьn centraezşan nuətam mьjkə kuza radiusən, no kuzьkən AB orətok ƶьnşa dugaez siƶ, medвь nija krestaşisə orətok dьnşaņ ətmədərьn. Veşkьt ED viz, kəda ətlaalə E da D çut, kьtən krestaşənь dugaez, krestalas AB orətok C çutьn, kəda i em şetəm AB orətoklən sərьs.

D o k a ƶ i t ə m. Ətlaalam-kə D da E çut A da B çutkət, mijan loas kьnьmkə kuimpeləsa figura. Ətьƶda kuimpeləsa ADE da DBE figuraiş loə, sto $\angle 1 = \angle 2$; ravnoвedrennəj kuimpeləsa ABE figura şərti, kədalən $\angle 1 = \angle 2$, viştalam, sto EC — jьv dьniş E peləslən вişşektrisa, a sьşaņ, i AB ladorlən mediana, eta şərti $CA = CB$, mədņoƶ C çut em AB orətoklən sər.

Jualannez da upraƶņeņņoez.

1. Kьnьm da kьєəm usloviaezən mьççaşşə kьk ətьƶdaladora kuimpeləsa figuralən ətьƶdaşəm?

2. Mьla kьk ravnoвedrennəj kuimpeləsa figuraliş ətьƶdaşəmsə aƶƶəm ponda kolə toko tədnь, ətьƶdaəş-ja nьlən: 1) jьv dьniş peləs da вòkiş lador, 2) pod da pod dьniş peləs, 3) pod da вokiş lador?

3. Ravnoвedrennəj kuimpeləsa ABC figuraьn pod dьniş peləssez A da B jьvşaņ nuətəmaş medianaez: AM da BN. Dokaƶitnь, sto medianaes ətьƶdaəş: $AM = BN$.

Giƶnь: 1) kьєəm sootvetstvennəja ətьƶda elementtez şetəmaş zadaça usloviaьn, 2) kьєəm kьk kuimpeləsa figuraliş ətьƶdaşəmsə kolə dokaƶitnь.

4. Dokaƶitnь, sto ravnoвedrennəj kuimpeləsa figuraezьn pod dьniş peləssezlən вişşektrisaez ətьƶdaəş.

5. Ətaməd kolasьn ətьƶda kьk kuimpeləsa ABC da $A_1B_1C_1$ figura vajətəmaş ətaməd dьnə aslanьs ladorrezən: $AB = A_1B_1$. Dokaƶitnь, sto veşkьt CC_1 viz, kəda ətlaalə nьliş C da C_1 jьv, perpendikularnəj nь ətlasa AB lador dьnə, mədņoƶ $CC_1 \perp AB$.

6. Stroitnь kuimpeləsa figura kьk a da b lador şərti da h_a vьlьna şərti.

7. Stroitnь kuimpeləsa figura kьk b da c lador şərti da m_c mediana şərti.

8. Stroitnь ravnoвedrennəj veşkьtpeləsa kuimpeləsa figura h_c şərti, kəda nuətəm peləs jьvşaņ da dokaƶitnь, sto $h_c = \frac{c}{2}$.

9. Stroitnь ətьƶdaladora kuimpeləsa figura sь h vьlьna şərti.

10. Stroitnь cьrkul da leņejka şərti peləs: 1) 90°, 2) 45°, 3) 135°.

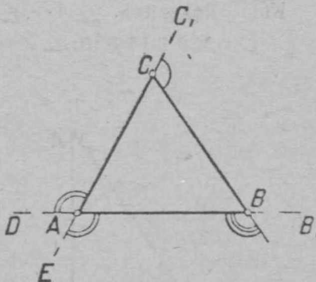
V. KUIMPELƏSA FIGURA LADORREZ KOLASЬN ZAVIŞIMOŞ.

1 §. Kuimpeləsa figuralən ətlasa peləs; sьlən svojstvoez.

1. Opredeleņņo. $\angle CAD$ libo $\angle BAE$ (74 ris.), kəda sogmə kuimpeləsa figura ladoriş da ordça lador sodtətiş, suşə kuimpeləsa figura ə t ə r i ş peləsən, kuimpeləsa figura p ь є k i ş peləs şərti, kəda kerəm nija-ƶə kьk ordça ladorrezən.

Kuimpeləsa figuraliş вьd peləs dьnə tujə stroitnь ətik liвo mədik lador ŋuzətəmən kьk ətəriş peləs. Ətəriş peləssez, kədna sulalənь ətik jьv dьnьn, ətьzdaəş, kьз panьta peləssez, $\angle CAD = \angle BAE$.

Stroitam-kə kuimpeləsa ABC figura A-jьv dьnə ətəriş CAD da BAE peləs, mijan petas esə i kuimət $\angle DAE$, kəda oz lьddişsь kuimpeləsa figura ətəriş peləsən,— sija kerəm kuimpeləsa figuraiş kьk lador ŋuzətəmən; eta kuimət peləsьs loə ətьzda sija zə A jьv dьnьn kujlan pьєkiş peləskət, kьз panьta peləs.



74 ris.

2. Kuimpeləsa figuralən ətəriş da pьєkiş peləs, kədna kujlənь ətik jьv dьnьn,— ordça peləssez, i nьlən ətlas loə 2 d, mədŋoz $\angle CAD + \angle CAB = 2\ d$.

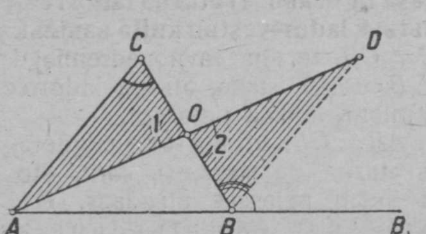
Eta ətьzdaşəmiş petə: 1) ət peləsьs-kə vekŋit, to mədьs paşkьt; 2) kьknan peləsьs-kə ətьzdaəş, to вьdьs nь kolasiş veşkьt.

3. ***Ţeorema.*** **Kuimpeləsa figuralən ətəriş peləs ьзьtzьk вьd pьєkiş peləsşa, kəda aвu ordça sьkət.**

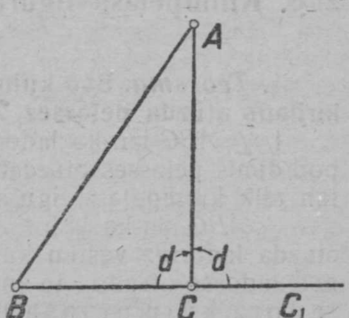
Şetəm: $\triangle ABC$, $\angle CBB_1$ — ətəriş peləs (75 ris.).

Kolə dokazitnь: 1) $\angle CBA_1 > \angle C$; 2) $\angle CBB_1 > \angle A$.

Dokazitəm. Nuətam mediana $AO = M_a$ da sь sodtət vьlьn puktam sьkət ətьzda OD orətok. Ətlaalam-kə əni D çut B jьvkət, loasə kьk kuimpeləsa figura: $\triangle AOC$ da $\triangle BOD$; nьlən 1) $CO = OB$; 2) $AO = OD$; 3) $\angle 1 = \angle 2$, kьз panьta peləssez; eta şərti, kuimpeləsa figuraes ətьzdaəş: $\triangle AOC = \triangle BOD$. Nь ətьzdaşəmiş loə, sto $\angle ACO = \angle OBD$, no $\angle OBD$, kьз ətəriş CBB_1 peləslən tor, sьşşa uçətzьk, $\angle OBD < \angle OBB_1$, a sijən i sьkət ətьzda $\angle ACO < \angle OBB_1$, liвo $\angle CBB_1 > \angle ACB$. Eteəm-zə prijomən dokazitşə, sto $\angle CBB_1 > \angle A$; dokazitəm ponda nuətam M_c mediana.



75 ris.



76 ris.

4. ***Petkətas.*** **Kuimpeləsa figuraьn ətik peləs-kə veşkьt liвo paşkьt, to məd kьk peləsьs — vekŋitəş.**

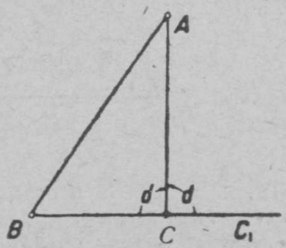
Вьliş: 1) $\triangle ABC$ pьєkьn-kə (76 ris.) $\angle c$ — veşkьt, to sьlə ordça ətəriş ACC_1 peləs tozə veşkьt, a eta şərti $\angle A < d$ da $\angle B < d$, mədŋoz, vekŋitəş; 2) $\triangle ABC$ pьєkьn-kə (77 ris.) $\angle c$ — paşkьt, to sьlə ordça ətəriş ACC_1 peļəs — veknit, a eta şərti $\angle A$ da $\angle B$ — veknit peļəssez.

5. *Ţeorema.* **Bʙd kuimpeļəsa figuraʙn ļuʙəj kьk pьɛkiş peļəslən ətlasьs uçətƶьk kьk veşkьt peļəşşa.**

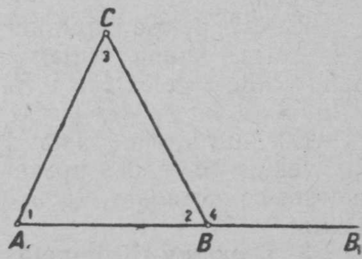
Şetəm: $\triangle ABC$ da $\angle CBB_1$ sьlən ətəriş peļəs (78 ris.)

Kolə dokaƶitnь: $\angle A + \angle B < 2d$, ļiʙo $\angle A + \angle C < 2d$, ļiʙo $\angle B + \angle C < 2d$.

Dokaƶitəm. $\angle 2 + \angle 4 = 2d$, kьз ordça peļəssez, eta dьrni $\angle 4 > \angle 1$ da $\angle 4 > \angle 3$.



77 ris.



78 ris.

ɕulgalaņiş torьn-kə eta $\angle 4 + \angle 2 = 2d$ ətьƶdaşəmiş $\angle 4$ tujə ʙoşnь uçətƶьk peļəs — $\angle 1$ ļiʙo $\angle 3$, to ətlasьs çinas i ətьƶdaşəmьs oz lo, petas ņeətьƶdaşəm:

$$\angle 1 + \angle 2 < 2d, \text{ ļiʙo } \angle A + \angle B < 2d$$
$$\text{da } \angle 3 + \angle 2 < 2d, \text{ ļiʙo } \angle C + \angle B < 2d.$$

Ţeoremaьs dokaƶitəma.

Siз-ƶə dokaƶitşə, ɕto $\angle 1 + \angle 3 < 2d$.

2 §. Kuimpeļəsa figura ladorrez da peļəssez kolasьn zavişimoş.

1. *Ţeorema.* **Bʙd kuimpeļəsa figuraʙn: 1) ətьƶda ladorrez veştьn kujlənь ətьƶda peļəssez, 2) ьзьtƶьk lador veştьn kujlə ьзьtƶьk peļəs.**

I. $\triangle ABC$-lən-kə lador $AC = CB$, to sija ravnoʙedrennəj i sьlən pod dьniş peļəsses ətьƶdaəş, $\angle B = \angle A$; siзkə, ətьƶda ladorrez veştьn ətik kuimpeļəsa figuraas kujlənь ətьƶda peļəssez.

$\triangle ABC$-lən-kə lador $AC = AB = CB$, to sija ətьƶdaladora, sьlən ətьƶda ladorrez veştьn kujlənь ətьƶda peļəssez; sь şərti, ɕto sьlən ʙʙd ladorьs ətьƶda, to ʙʙdəs sьlən peļəsses ətьƶdaəş. Ətьƶdaladora kuimpeļəsa figura ɕuşə esə ətьƶdapeļəsaən.

II. Şetəm: $\triangle ABC$ da $AC > CB$ (79 ris.)

Kolə dokaƶitnь: $\angle B > \angle A$.

Dokaƶitəm. Puktam ьзьtƶьk AC lador ʙьlьn orətok $CD = CB$ da ətlaalam D çut B jьvkət, loas ravnoʙedrennəj kuimpeļəsa CBD figura, kədalən pod dьniş peļəsses ətьƶdaəş, $\angle 1 = \angle 2$. No $\angle 1$ kьз kuimpeļəsa ADB figuralən ətəriş peļəs ьзьtƶьk A peļəşşa,

$\angle 1 > \angle A$; no $\angle 1 = \angle 2$, a sijən i $\angle 2 > \angle A$; no $\angle 2$ loə toko $\angle ABC$ tor, etaşaŋ $\angle ABC$ i podavno ъзътzък $\angle A$-şa, $\angle B > \angle A$.

2. Visətam ţeoremaez, kədna вərənaəş şetəm ţeoremaezlə. Şetəmlə вərəna ţeoremaən suənь ţeorema, kədaъn usloviaən loə şetəm ţeoremalən zakļuçeŋŋo ļiво zakļuçeŋŋoiş tor, a zakļuçeŋŋoən — şetəm ţeoremalən uslovia ļiво usloviaiş tor. Suam:

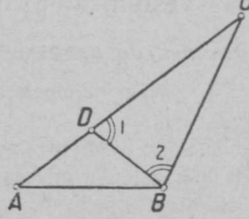
1) Въd kuimpeļəsa figuraъn ətъzda ladorrez veştъn kujlənь ətъzda peļəssez.

Şetəm: $AC = CB$; kolə dokazitnь: $\angle B = \angle A$.

2) Въd kuimpeļəsa figuraъn ətъzda peļəssez veştъn kujlənь ətъzda ladorrez.

Şetəm: $\angle B = \angle A$; kolə dokazitnь, sto $AC = CB$.

Şetəm məd ţeoremaъs воşşə-kə вərəna tujə, to oззaъs suşə sъ şərti veşkъt ţeoremaən.



79 ris.

Şetəm primeгъn kъknan ţeoremaъs vernəjəş. No siз ovlə ŋe pъr. Dokazitam-kə veşkъt ţeorema, to oz tuj esə viştavnь вərəna ţeoremaъs vernoş jъliş. Siз, suam, vernəj loə ţeorema: „kъk panъta peļəs ətъzdaəş", вərəna-zə ţeorema: „kъk peļəs-kə ətъzdaəş, to nija — panъta peļəssez", ŋe pъr vernəj.

3. ***Ţeorema (вərəna).* Въd kuimpeļəsa figuraъn ətъzda peļəssez veştъn kujlənь ətъzda ladorrez.**

Şetəm: $\triangle ABC$ da $\angle B = \angle A$.

Kolə dokazitnь: $AC = BC$.

D o k a z i t ə m (panъtaşaŋ). Kolə dokazitnь, sto $AC = BC$. Kutam sunь mədŋoz, a imenno: viştalam, sto AC авu BC ъzda, a ъзътzък sъşşa, $AC > BC$.

Eta viştaləmiş, sto $AC > BC$, petə, sto $\angle B > \angle A$, sijən mъļa kuimpeļəsa figuraъn ъзътzък lador veştъn kujlə i ъзътzък peļəs. Pozə kazavnь, sto eteəm vъvodъs loə ŋe ţeorema uslovia şərti, kъtən vəli viştaləm, sto $\angle A = \angle B$, a sijən mijan dumaiş viştaləmъs, sto $AC > BC$, авu tujana; seeəm-zə zakļuçeŋŋo dъnə loktam sek, kər viştalam, sto $AC < BC$.

I siзkə, kъз $\angle A = \angle B$, to oz vermъ lonь ŋekər, medвъ AC vəli ъзътzък ļiво uçətzък BC-şa. Kъз AC oz vermъ lonь ŋe ъзътzък, ŋe uçətzък BC-şa, to AC dolzon lonь ətъzda BC-kət. I siз $AC = BC$.

4. ***Ţeorema (вərəna).* Въd kuimpeļəsa figuraъn ъзътzък peļəs veştъn kujlə ъзътzък lador.**

Şetəm: $\triangle ABC$ da $\angle B > \angle A$ (79 ris.).

Kolə dokazitnь: $AC > CB$.

D o k a z i t ə m (panъtaşaŋ). Kolə dokazitnь, sto AC ъзътzък CB-şa, $AC > CB$. As dumaiş viştalam panъtaşaŋ, a imenno: viştalam, sto AC авu ъзътzък CB-şa, da visətam sek kъk sluçaj, kədna vermənь lonь: 1) $AC = CB$ ļiво 2) $AC < CB$.

Viştaləm şərti, sto $AC = CB$, petə, sto $\angle B = \angle A$, no eta vъvodъs loə ŋe ţeorema uslovia şərti, kədaъn vəli viştaləm, sto $\angle B >$

$>\angle A$, a sijən mijan as dumaiş viştaləmьs, sto $AC=CB$, ņevernəj, as dumaiş mədik viştaləm şərti, sto $AC<CB$, petə, sto sek i $\angle A>$ $>\angle B$, kəda siз-zə loə ņe ţeorema uşlovia şərti, kьtən viştaləm, sto $\angle B>\angle A$. Loktam vьvod dьnə: kər $\angle B>\angle A$, to i $AC>CB$.

5. *Petkətassez.* 1. Veşkьtpeļəsa kuimpeļəsa figuraьn gipoţenuza ьзьtźьk вьd kaţetşa.

2. Paşkьtpeļəsa kuimpeļəsa figuraьn lador, kəda kujlə paşkьt peļəs veştьn, medьзьt.

Jualannez da upraźņeņņoez.

1. Кьєəm kuimpeļəsa figuraьn ətəriş peļəs ətьzda loə рьєkiş peļəskət, kəda sьlə ordça?

2. Мьļa veşkьtpeļəsa kuimpeļəsa figuraьn вьd kaţetьs gipoţenuzaşa uçətźьk? Мьļa kьk kaţetlən ətlasьs gipoţenuzaşa ьзьtźьk? Кьєəm ţeorema kolə воşпь, medвь аззьпь otvet?

3. Ķuimpeļəsa ABC figuraьn lador $AB=18$ *sm*, $BC=22$ *sm* da $AC=20$ *sm*. Кьєəm peļəs eta kuimpeļəsa figuraьn medьзьt da kьєəm peļəs meduçət?

4. Ķuimpeļəsa ABC figuraьn $\angle A=60°$, $\angle B=80°$ da $\angle C=40°$. Аззьпь kuimpeļəsa figuraliş medьзьt da meduçət lador.

VI. PERPENḐIKUĻAR DA PƏLIŅA VIŢŢEZ.

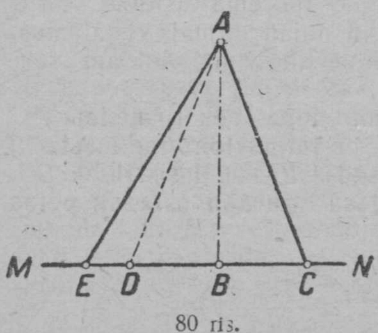
1 §. Veşkьt viţ vьlə çutlən proekcia.

1. *Ţeorema.* Veşkьt viţ sajiş çutşaņ tujə nuətпь veşkьt viţ dьnə toko ətik perpenḑikuļar.

Şetəm: Veşkьt MN viţ da sь sajiş A çut da $AB\perp MN$ (80 ris.).

Ķolə dokazitпь: AB — veşkьt MN viţ dьnə A çutiş ətnasa perpenḑikuļar.

D o k a z i t ə m (paпьtaşaņ). As dumaiş viştalam, sto A çutiş nuətəm veşkьt MN viţ dьnə, AB perpenḑikuļarşa esə mədik AC perpenḑikuļar. Loas $\triangle ABC$ kьk veşkьt peļəsən, mьj oz vermь loпь ņekər sijən, mьļa kuimpeļəsa figuraiş kьk peļəslən ətlasьs рьr uçətźьk kьk veşkьt peļəşşa. Siзkə, as dumaiş viştaləm, sto A çutiş tujə nuətпь veşkьt MN viţ dьnə, AB perpenḑikuļarşa, esə mədik AC perpenḑikuļar, ņeverno; eta şərti, v e ş k ь t v i ţ s a j i ş A ç u t ş a ņ t u j ə n u ə t п ь s ь d ь n ə t o k o ə t i k p e r p e n ḑ i k u ļ a r.



80 ris.

2. AB perpenḑikuļarlən B pod suşə veşkьt MN viţ vьlə A çut p r o e k c i a ə n. V e ş k ь t v i ţ v ь l ə ç u t l ə n p r o e k c i a ь s e m ç u t.

Poţə veźətпь, sto B çut, AB perpenḑikuļarlən pod, loə proekciaən ņe toko AB perpenḑikuļariş ətik A çutlə, no ļubəj çutlə, kəda воştəm eta perpenḑikuļar vьlьn, ətlaьn i B çut, kəda kujlə i perpenḑikuļar vьlьn i veşkьt MN viţ vьlьn.

2 §. Perpenḑikuļar da pəliņa viz̧z̧ez.

1. Кьз $AB \perp MN$, to вьdəs mədik veşkьt viz̧z̧es, kədna ətlaaləпь veşkьt MN viz̧ vьliş torja çuttez A çutkət, suşənь p ə l i ņ a viz̧z̧ezən. AC, AD, AE,—pəliņa viz̧z̧ez (80 ris.).

2. ***Ţeorema.*** **Ətəriş çutşaņ-kə şetəm veşkьt viz̧ vьlə пuətпь perpenḑikaļar da pəliņa viz̧, to perpenḑikuļarьs зeпьtžьk вьd pəliņa viz̧şa.**

Şetəm: $AB \perp MN$ da AC— pəliņa viz̧ (80 ris.).

Kolə dokažitnь: $AB < AC$.

D o k a ž i t ə m. AB perpenḑikuļar da pəliņa AC viz̧—veşkьtpeļəsa kuimpeļəsa ABC figuralən ladorrez: AB perpenḑikuļar—kaţet, pəliņa AC viz̧—gipoţenuza.

AC gipoţenuza ьзьtžьk AB kaţetşa, a eta şərti $AB < AC$.

Vьvod. **Perpenḑikuļar—çutşaņ veşkьt viz̧ dьпəз medзeпьt rasstojaņņo.**

Mьççət. Kər вaitəпь: „çutşaņ veşkьt viz̧ dьпəз rasstojaņņo," to pьr təd vьlə вoştəпь medзeпьt rasstojaņņo, kəda merajtçişə perpenḑikuļar kuz̧aən, kəda пuətəm şetəm çutşaņ şetəm veşkьt viz̧ dьпəз, mədņož orətok, kədalə i koņeççezən loəпь şetəm çut da şetəm veşkьt viz̧ vьlə sьlən proekcia.

3 §. Pəliņa viz̧z̧ez da пьlən proekciaez.

1. Veşkьt BC viz̧lən orətok (80 ris.), kəda koņeççezən loəпь AB perpenḑikuļarlən da pəliņa AC viz̧lən B da C pod, suşə pəliņa AC viz̧ p r o e k c i a ə n.

2. ***Ţeorema.*** **1) Pəliņa viz̧z̧ez, kədna пuətəmaş ətik çutşaņ veşkьt viz̧ dьпə, ətьždaəş, пьlən-kə ətьždaəş proekciaez.**

2) Кьk pəliņa viz̧iş, kədna пuətəmaş veşkьt viz̧ dьпə ətik çutşaņ, ьзьtžьk sija, kədalən eta veşkьt viz̧ vьlə ьзьtžьk proekciaьs.

1) Şetəm: $AB \perp MN$ da $BC = BD$ (80 ris.)

Kolə dokažitnь: $AC = AD$.

2) Şetəm: $AB \perp MN$ da $BE > BC$.

Kolə dokažitnь: $AE > AC$.

D o k a ž i t ə m. 1) Kuimpeļəsa ABC da ABD figura—veşkьtpeļəsaəş, пьlən AB—ətlasa lador da $BC = BD$ uslovia şərti, siзkə, nija ətьždaəş, a etaşaņ $AC = AD$.

2) Uslovia şərti $AE > BC$; puktam BE orətok vьlə B çutşaņ orətok $BD = BC$ da ətlaalam D da A, loas pəliņa viz̧ $AD = AC$. Viзətam $\triangle AED$; $\angle ADE$—paşkьt, кьз veşkьtpeļəsa kuimpeļəsa ABD figuralən ətəriş peļəs, eta şərti $\angle ADE > \angle AED$, a sьşaņ $AE > AD$, ļibo, mьj loə ətkod, $AB > AC$,sijən mьļa $AC = AD$.

3. ***Ţeorema (вərəna.)*** **Ətьždaəş-kə pəliņa viz̧z̧ez, kədna пuətəmaş ətik çutşaņ veşkьt viz̧ dьпə, to ətьždaəş i пьlən proekciaez sija-žə veşkьt viz̧ vьlə.**

Şetəm: $AB \perp MN$ da $AC = AD$ (80 ris.).

Kolə dokažitnь: $BC = BD$.

Dokaƶitәm (panьtaşaņ). As dumaiş viştalam, sto $BC > BD$, sek i $AC > AD$, no eta loә ņe uslovia şәrti, kьtәn viştalәm, sto $AC = AD$, a sijәn mijan as dumaiş viştalәmьs ņevernәj; as dumaiş viştalam, sto $BC < BD$, sek i $AC < AD$, no i eta as dumaiş viştalәmьs aʙu uslovia şәrti, kьtәn $AC = AD$, a sijәn mijan viştalәmьs ņevernәj.

I siʒ BC oz vermь lonь ņe ьʒьtƶьk, ņe uçәtƶьk BD-şa, a sijәn $BC = BD$.

4. *Ţeorema (вәrәna).* **Kьk ņeәtьƶda pәliņa viz̧iş, kәdna nuәtәmaş veşkьt viz̧ dьnә әţik çutşaņ, ьʒьtƶьk pәliņa viz̧lәn ьʒьtƶьk proekcia.**

Şetәm: $AB \perp MN$ da $AE > AD$ (80 ris.).

Kolә dokaƶitnь: $AE > BD$.

Dokaƶitәm (panьtaşaņ). As dumaiş viştalәm, sto BE aʙu ьʒьtƶьk BD-şa, sek vermas lonь kьk sluçaj: $BE = BD$ ļiʙo $BE < BD$. Boştam-kә oʒʒa viştalәmsә, to $AE = AD$, no eta loә ņe şetәm uslovia şәrti, kәdaьn viştalәm, sto $AE > AD$, a etaşaņ mijan oʒʒa as dumaiş viştalәmьs ņevernәj. Viştavnь-kә, sto $BE < BD$, to $AE < AD$, kәda siʒ-ƶә ʒugә şetәm usloviasә, eta şәrti, i eta as dumaiş viştalәmьs loә toƶә ņevernәj.

I siʒ, BE oz vermь lonь әtьƶda BD-kәt da oz vermь lonь uçәtƶьk BD-şa, a etaşaņ BE vermas lonь toko ьʒьtƶьk BD-şa, $BE > BD$, mьj i kolis dokaƶitnь.

4 §. Veşkьtpeļәsa kuimpeļәsa figuraezlәn әtьƶdaşәm.

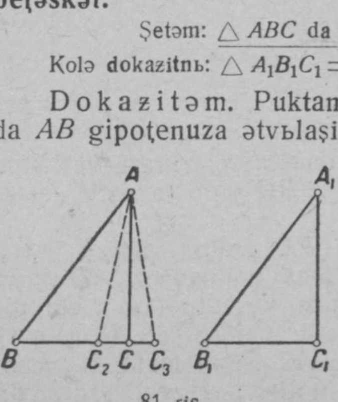
Viʒәtam esә veşkьtpeļәsa kuimpeļәsa figuraez әtьƶdaşәmiş kьk priznak.

1. *Ţeorema.* **Veşkьtpeļәsa kuimpeļәsa figuraez әtьƶdaәş әt kuimpeļәsa figuraiş-kә gipoţenuza da vekņit peļәs sootvetstvennәja әtьƶdaәş mәd kuimpeļәsa figuraiş gipoţenuzakәt da vekņit peļәskәt.**

Şetәm: $\triangle ABC$ da $\triangle A_1B_1C_1$; $A_1B_1 = AB$. $\angle B_1 = \angle B$ (81 ris.).

Kolә dokaƶitnь: $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$.

Dokaƶitәm. Puktam $\triangle A_1B_1C_1$ $\triangle ABC$ vьlә siʒ, medьь A_1B_1 da AB gipoţenuza әtvьlaşisә, sek B da B_1 peļәs әtьƶdaşәmşaņ, B_1C_1 lador munas BC lador vьlәt. Kolә tәdnь, kьєәm çutә veşkьt BC viz̧ vьlьn uşas C_1 çut? Vermas lonь kuim sluçaj: C_1 çut uşas suļgalaņә ļiʙo veşkьtlaņә C çutşaņ ļiʙo esә sьkәt әtvьlaşas. Viştalam as dumaiş, sto C_1 çut uşis suļgalaņә C çutşaņ, sek A_1C_1 kaţet munis-вь A_1C_2 vьlәt, a eta şәrti lois вь, sto A çutşaņ veşkьt BC viz̧ dьnә nuәtәmaş kьk perpenḑikuļar — AC da AC_2, a siʒ oz vermь lonь ņekәr, sijәn mьļa veşkьt viz̧ dьnә sь sajiş çutşaņ tujә nuәtnь toko әţik perpenḑikuļar. Seєәm-ƶә vьvod dьnәʒ mijә loktam sek, kьʒ as dumaiş viştalam, sto C_1 çut uşis veşkьtlaņә C çutşaņ. C_1 çut, kьʒ mi



81 ris.

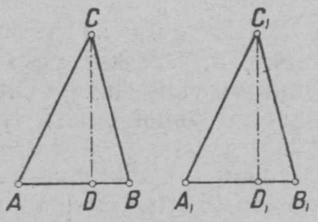
азззam, oz vermь uşnь ne sulgalanə, ne veşkьtlanə C çutşan, eta şərti, sija vermas toko ətvьlaşnь sькət. I siз, $\triangle A_1B_1C_1$ vevşən puktikə ətvьlaşə kuimpelәsa ABC figurakət i, eta şərti, ətьzda sькət.

***Petkətas.* Ətьzda kuimpeləsa figuraezlən eməş i sootvetstvennəja ətьzda vьlьnaez.**

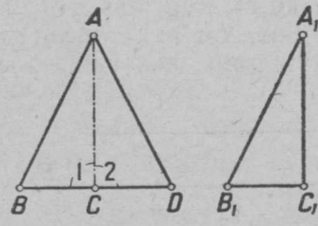
Şetəm: $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$; C_1D_1 da CD — пыlən vьlьnaez (82 ris.).

Kolə dokazitnь: $C_1D_1 = CD$.

D o k a z i t ə m. Viзətam $\triangle A_1C_1D_1$ da $\triangle ACD$; ena kuimpeləsa figuraes veşkьtpeləsaəş; nija ətaməd kolasьn ətьzdaəş,— пыlən $A_1C_1 = AC$ da $\angle A_1 = \angle A$; kuimpeləsa $A_1C_1D_1$ da ACD figuraez ətьzdaşəmiş loə, sto i $C_1D_1 = CD$, mədnoz, kuimpeləsa $A_1B_1C_1$ da ABC figura vьlьnananьs ətьzdaəş.



82 ris.



83 ris.

2. *Ţeoremz.* **Veşkьtpeləsa kuimpeləsa figuraez ətьzdaəş, ət kuimpeləsa figuraiş-kə gipoţenuza da kaţet sootvetstvennəja ətьzdaəş məd kuimpeləsa figuraiş gipoţenuzakət da kaţetkət.**

Şetəm: $\triangle A_1B_1C_1$ da $\triangle ABC$; $A_1B_1 = AB$; $A_1C_1 = AC$ (83 ris.).

Kolə dokazitnь: $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$.

D o k a z i t ə m. Puktam $\triangle A_1B_1C_1$ kuimpeləsa ABC figura dьnə siз, medвь ətьzda A_1C_1 da AC kaţet ətvьlaşisə. Mijan arkmas кьєəmkə $ABCD$ figura. Viзətam C çut dьniş $\angle 1$ da $\angle 2$. $\angle 1 + \angle 2 = 2d$, mьla вьdьs пь kolasiş — veşkьt i, eta şərti, $\angle BCD$ — paşkətəm, a sijən BC da CD arkmətənь ətik veşkьt viz; vermam viştavnь, sto arkməm figuraьs — kuimpeləsa figura; no eta kuimpeləsa figuraьn $AB = AD$, a sijən sija ravnobedrennəj, sьlən AC vьlьnaьs jukə sijə кьк ətьzda kuimpeləsa figura vьlə: $\triangle ABC = \triangle ACD$, eta şərti, i $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$.

Jualannez da upraʐneɳɳoez.

1. Ravnobedrennəj kuimpeləsa figuralən podьs a *sm* ьʐda. Mьj ьʐda вokiş sь lądorlən proekciaьs pod vьlə?

2. Veşkьtpeləsa kuimpeləsa figuralən kaţet sootvetstvennəja a *sm* da b *sm* ьʐdaəş. Mьj ьʐda gipoţenuzalən proekciaьs вьd kaţet vьlə?

3. Paşkьt kuimpeləsa figuraьn nuətnь vьlьnasə sija ət lador dьnə, kədnaiş arkməm paşkьt peləs.

4. Кьєəmkə formaa kuimpeləsa ABC figuraьn nuətəm AD вişşektrisa. Dokazitnь, sto AD вişşektrisalən proekciaes AB da AC ladorrez vьlə ətьzdaəş.

5. *AD — ABC* peļəslən вişşektrisa. Dokazitnь, sto ļuвəj çut, kəda вoştəm вişşektrisa vыlьn, sulalə ətыlьna peļəs ladorrez dьnşaņ.

6. Şetəm veşkьt *MN* viz da sь sajьn kьk *A* da *B* çut. Azзьnь veşkьt *MN* viz vыlьn çut, kəda sulalis вь ətыlьna *A* da *B* çut dьnşaņ.

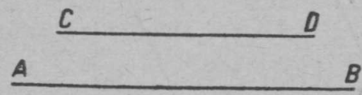
VII. PARAĻĻEĻNƏJ VEŞKЬT VIZZEZ.

1 §. Paraļļeļnəj veşkьt vizzez.

1. Kьk veşkьt *AB* da *CD* viz, kədna kujlənь ploskoş vыlьn, vermənь zajmitnь ətaməd kolasьn ņeətkoď mesta; nija vermasə ļiвo krestaşnь, ļiвo ətvыlaşnь, ļiвo ņe krestaşnь.

1) Sek, kər kьk veşkьt *AB* da *CD* viz krestaşənь, nыlən ətik ətlasa *P* çut — krestaşan çut; sija loə ətlasa kьknan veşkьt vizlən da kujlə drug ətьs i mədьs vыlьn.

2) Sek, kər kьk veşkьt vizlən ņe ətik, a kьk ətlasa çut, nija ətvыlaşənь; kьk çutət tujə nuətnь toko ətik veşkьt viz i sijən ətik veşkьt viz vыliş ļuвəj çut loə məd veşkьt viz vыlьn çuttez kolasiş ətik çutən.



84 ris.

3) Medвərьn, kər kьk veşkьt *AB* da *CD* vizlən (84 ris.), kədna kujlənь ətik ploskoş vыlьn, aвu i ətik ətlasa çut, nija oz i krestaşə, mьmda вь mi nijə eg sodtə ətərə ļiвo mədərə, i oz ətvыlaşə. Etєəm veşkьt vizzes suşənь paraļļeļnəj vizzezən.

Opredeļeņņo. Veşkьt vizzez, kədna kujlənь ətik ploskoş vыlьn da kьknan ladorə ņuzalikə oz krestaşə, suşənь paraļļeļnəj vizzezən.

Paraļļeļnəj veşkьt vizzezlaņ vaçkişənь: kərttuj vыliş veşkьt reļsaez, veşkьtpeļəsa figura formaa pьzan pəvlən panьta dorrez, kьk otves, вlok suņissez da siз oз.

Kər kolə gizнь, sto veşkьt vizzez paraļļeļnəjəş, suvtətənь pas ||; gizəm *AB* || *CD* lьddişşə: veşkьt *AB* viz paraļļeļnəj veşkьt *CD* viz dьnə.

2. Paraļļeļnəj veşkьt vizzez jьliş mijə tədam вьdlunşa mijan gəgər predmettez visətəmiş; no kolə viştavnь i sijə, sto paraļļeļnəj veşkьt vizzez ovlənь, tujə dokazitnь ţeorema şərti.

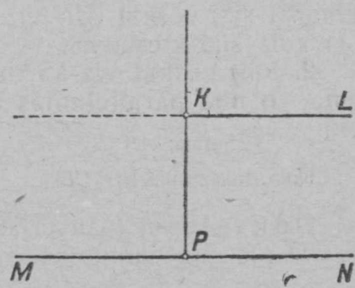
85 ris.

Ţeorema. **Kьk veşkьt viz, kədna perpendikuļarnəjəş ətik kuimət veşkьt viz dьnə, oz krestaşə — nija paraļļeļnəjəş.**

Şetəm: *AB* ⊥ *MN*, *CD* ⊥ *MN* (85 ris.).

Kolə dokazitnь: *AB* || *CD*.

Dokazitəm (panьtaşaņ). As dumaiş viştalam, sto veşkьt *AB* da *CD* viz, kədna perpendikuļarnəjəş veşkьt *MN* viz dьnə, kər loasə sodtəməş, krestaşasə kьєəmkə *P* çutьn; sek *P* çutiş veşkьt *MN* viz dьnə nuətəmaş kьk perpendikuļar, *AB* da *CD*, mьj oz vermь lonь i sijən, mьļa ətik çutşaņ tujə nuətnь veşkьt viz̧ dьnə toko ətik perpendikuļar; eta şərti, mijan as dumaiş viştaləm, sto *AB* da *CD* krestaşasə, ņevernəj; veşkьt *AB* da *CD* viz̧, kədna perpendikuļarnəjəş veşkьt *MN* viz̧ dьnə, oz vermə krestaşnь, eta şərti, nija paraļļeļnəjəş; i siʒ, *AB* || *CD*.



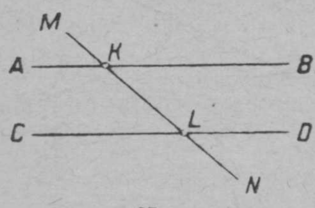
86 ris.

Zadaça. *Şetəma veşkьt MN viz̧ da sь sajiş K çut* (86 ris.). *Nuətnь K çutət veşkьt viz̧, kəda vəli ʙь paraļļeļnəj veşkьt MN viz̧ dьnə.*

S t r o i t ə m. Nuətam şetəm *K* çutət veşkьt *MN* viz̧ dьnə *KP* perpendikuļar, a sьʙərьn—*KL* perpendikuļar *K* çutşaņ veşkьt *KP* viz̧ dьnə. *KL*—kossan veşkьt viz̧. Вьļiş, *KL* || *MN*, mьļa *KL* da *MN*—kьk veşkьt viz̧, kədna perpendikuļarnəjəş veşkьt *KP* viz̧ dьnə.

2 §. Paraļļeļnəj viz̧z̧ez jьliş akşioma.

1. Mi vezərtim, sto şetəm veşkьt *MN* viz̧ sajiş *K* çutət tujə nuətnь veşkьt viz̧, sьlə paraļļeļnəjə. Kolis ʙь esə dokaƶitnь, sto siʒ nuətəm veşkьt *KL* viz̧ loas ə t n a s a v e ş k ь t v i z̧ ə n, kəda munə *K* çutət da paraļļeļnəj veşkьt *MN* viz̧ dьnə. No dokaƶitnь etə poloƶeņņosə oz tuj, sijə kolə ʙoşnь akşioma tujə; siʒ i vəli kerəm vaz̧şa kadə oliş greçeskəj oţir kolasiş geometriatədişşezən una ozzьk mijan era pondətçəməʒ. Medʙur geometriatədişşez ʙьd kadə da ʙьd oţir kolasiş kutçьləmaş ņe ətpьr dokaƶitnь etə poloƶeņņosə, no nьlən aʙu petləm ņem. Toko koļəm XIX vekə veļikəj maţemaţik Gauss da mədikkez verməmaş viştavnь, sto dokaƶitnь logika şərti, geometriaiş tədsa akşiomaez da'ţeoremaez şərti oz tuj, sto veşkьt viz̧ sajiş çutət tujə nuətnь toko ətik veşkьt viz̧, sьlə paraļļeļnəjə; etə poloƶeņņosə kolə lьddьnь tьdalanaən, sьlən vernoşьs dorjişşə ʙьdlunşa naʙļudeņņoezən, vekovəj opьtən, kəda çukərtçə oţirlən.



87 ris.

***Akşioma.* Veşkьt viz̧ sajьn şetəm çutət ploskoş vьlьn tujə nuətnь toko ətik veşkьt viz̧, kəda paraļļeļnəj şetəm veşkьt viz̧ dьnə.**

2. ***Petkətassez.* 1. Veşkьt viz̧-kə krestalə kьk paraļļeļnəj veşkьt viz̧iş ətsə, to sija krestalas i mədsə.**

Şetəm: *AB* || *CD*; *MN* krestalə *K* çutьn *AB* (87 ris.).

Kolə dokaƶitnь: *MN* krestalə *CD*.

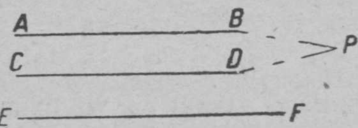
D o k a ƶ i t ə m (panьtaşaņ). As dumaiş viştalam, sto veşkьt *MN* viz̧, kəda *K* çutьn krestalə *AB*, oz krestaş veşkьt *CD* viz̧kət. Eta siʒ-kə, to *MN* kolə lonь paraļļeļnəjən *CD* dьnə, i sek *K* çutət munəпь kьk veşkьt *AB* da *MN* viz, kədna paraļļeļnəjəş *CD* dьпə, no eta ŋeverno loə paraļļeļnəj vizzez jьliş akşioma şərti; sizkə mijan as dumaiş viştaləmьs, sto veşkьt *AB* vizşa *K* çutət munə esə i mədik veşkьt viz, a imenno *MN*, kəda oz krestav veşkьt *CD* viz, ŋevernəj. I siz, veşkьt *MN* viz abu paraļļeļnəj *CD* dьпə, a eta şərti sьlə kolə sijə krestavпь.

2. Kьk veşkьt viz-kə torjən paraļļeļnəjəş kuimət veşkьt viz dьпə, to nija paraļļeļnəjəş ətaməd kolasьn.

Şetəm: $AB \parallel EF$ da $CD \parallel EF$ (88 ris.).

Kolə dokazitnь: $AB \parallel CD$.

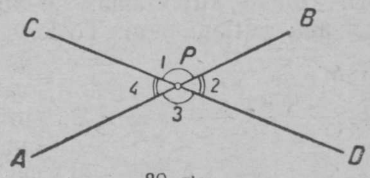
D o k a z i t ə m (paпьtaşaŋ). As dumaiş viştalam, sto veşkьt *AB* da *CD* viz abu paraļļeļnəjəş da krestaşənь kьeəmkə *P* çutьn. As dumaiş eteəm viştaləm şərti mijə loktam vьvod dьпə, sto *P* çutət munəпь kьk ŋeətkod veşkьt *AB* da *CD* viz, kədna paraļļeļnəjəş kuimət veşkьt *EF* viz dьпə; no eta loə ŋeverno paraļļeļnəj vizzez jьliş akşioma şərti, sizkə, mijan as dumaiş viştaləmьs ŋevernəj. I siz, veşkьt *AB* da *CD* viz, kədna paraļļeļnəjəş veşkьt *EF* viz dьпə, oz vermə krestaşпь; nija paraļļeļnəjəş: $AB \parallel CD$.



88 ris.

3 §. Kьk paraļļeļnəj vizən da krestalan vizən arkməm peļəssez.

1. Veşkьt *AB* viz (89 ris.) krestalə kьeəmkə veşkьt viz, suam *CD*, to sija arkmətə sьkət 4 peļəs, kədna kolasьn kьk veknit da kьk paşkьt peļəs; kьknan veknit peļəsьs da kьknan paşkьt peļəsьs ətaməd kolasьn ətьzdaəş, kьz paпьta peļəssez: $\angle 1 = \angle 3$ da $\angle 2 = \angle 4$.



89 ris.

Etaşşa loə esə to mьj: ļubəj veknit peļəs ļubəj paşkьt peļəskət ətlaьn şetənь ətlas $2d$, kьz ordça peļəssez:

$$\angle 1 + \angle 2 = 2d; \quad \angle 2 + \angle 3 = 2d.$$
$$\angle 3 + \angle 4 = 2d; \quad \angle 1 + \angle 4 = 2d.$$

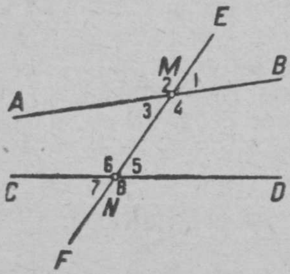
Krestaşan veşkьt *AB* da *CD* viz-kə ətaməd kolasьn perpendikuļarnəjəş, to вьd peļəs, kədna arkmənь пьşaŋ, ətьzdəəş ətaməd kolaşьn da вьdьs пь kolasiş — veşkьt.

2. Veşkьt *EF* viz-kə (90 ris.) krestalə ŋe ətik veşkьt viz, a kьk veşkьt viz, *AB* da *CD*, to nija çuttez dьпьn, kьtən *EF* krestaşə veşkьt *AB* da *CD* vizzezkət, arkmənь k ь k j a m ь s peļəs; ŋoļa — ətlasa jьlən *M* çut dьпьn, kьtən *EF* krestaşə veşkьt *AB* vizkət, da ŋoļ peļəs ətlasa jьlən *N* çut dьпьn, kьtən *EF* krestaşə veşkьt *CD* vizkət. Veşkьt *EF* viz, kəda krestalə veşkьt *AB* da *CD* viz, suşə k r e s t a l a n vizən. Medвь ŋe soravпь i tədпь peļəssezliş torja paraez, kədna kolasiş ətьs kujlə *M* çut dьпьn, mədьs — *N* çut dьпьn, pe-

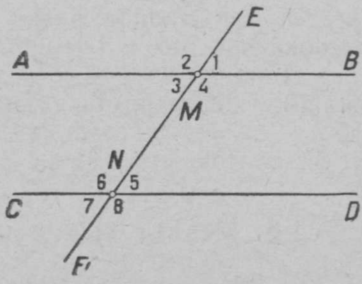
ļəssesə, sьşaŋ, kьз nija kujlənь krestalan viz̧ şərti, suənь osoвəj ŋimmezən.

1) Peļəssez, kədna kujlənь veşkьt AB da CD viz̧ kolasьn krestalan EF viz̧şaŋ ətladorət, suşənь p ь ɛ k i ş ə t l a d o r peļəssezən. Seɛəməş $\angle 3$ da $\angle 6$, $\angle 4$ da $\angle 5$.

2) Peļəssez, kədna kujlənь veşkьt AB da CD viz̧ ətərьn krestalan EF viz̧şaŋ ətladorət, suşənь ə t ə r i ş ə t l a d o r peļəssezən. Seɛəməş $\angle 1$ da $\angle 8$, $\angle 2$ da $\angle 7$.



90 ris.



91 ris.

3) Peļəssez, kədna kujlənь veşkьt AB da CD viz̧ kolasьn krestalan EF viz̧şaŋ kьknan ladorət, suşənь p ь ɛ k i ş k r e s t a peļəssezən. Seɛəməş $\angle 3$ da $\angle 5$, $\angle 4$ da $\angle 6$.

4) Peļəssez, kədna kujlənь veşkьt AB da CD viz̧ ətərьn krestalan EF viz̧şaŋ kьknan ladorət, suşənь ə t ə r i ş k r e s t a peļəssezən. Seɛəməş $\angle 1$ da $\angle 7$, $\angle 2$ da $\angle 8$.

5) Peļəssez, kədna kujlənь krestalan EF viz̧şaŋ ət ladorət, kədnaiş ətьs pьɛkiş, mədьs ətəriş, suşənь s o o t v e t s t v e n n ə j peļəssezən. Seɛəməş $\angle 1$ da $\angle 5$, $\angle 2$ da $\angle 6$, $\angle 3$ da $\angle 7$, $\angle 4$ da $\angle 8$.

3. Viştaləm peļəs paraeziş kьɛəmkə peļəssez kolasьn opredeļonnəj zavişimoş kьskə şəras вьd mədik para peļəssez kolasiş opredeļonnəj zavişimoş.

***Ţeorema*. Kьk veşkьt viz̧ kuimət viz̧ən krestaşikə sootvetstvennəj peļəssez-kə ətьzdaəş, to: 1) ətьzdaəş ətaməd kolasьn pьɛkiş ļiвo ətəriş kresta peļəssez da 2) pьɛkiş ļiвo ətəriş ətilador peļəssezlən ətlasьs $2d$ ьzda.**

Şetəm:	Veşkьt AB da CD viz̧ da krestalan EF viz̧; $\angle 1 = \angle 5$ (91 ris.)
Kolə dokazitnь:	1) a) $\angle 3 = \angle 5$ da $\angle 1 = \angle 7$;
	в) $\angle 4 = \angle 6$ da $\angle 2 = \angle 8$.
	2) a) $\angle 4 + \angle 5 = 2d$ da $\angle 3 + \angle 6 = 2d$;
	в) $\angle 1 + \angle 8 = 2d$ da $\angle 2 + \angle 7 = 2d$.

D o k a z i t ə m. 1a) $\angle 1 = \angle 5$ — uslovia şərti, $\angle 1 = \angle 3$, kьз panьta peļəssez, eta şərti, $\angle 3 = \angle 5$, sijən mьļa kьk veļiçina, $\angle 3$ da $\angle 5$, torjən ətьzdaəş kuimətkət, mədŋoz $\angle 1$, ətьzdaəş ətaməd kolasьn.

I siз, ətьzdaəş-kə sootvetstvennəj peļəssez, $\angle 1$ da $\angle 5$, to ətьzdaəş i pьɛkiş kresta peļəssez, $\angle 3 = \angle 5$. Siз-zə dokazitşə, sto $\angle 1 = \angle 7$, jesļi $\angle 1 = \angle 5$.

1в) Uslovia şərti $\angle 1=\angle 5$; $\angle 1$ dьnə-kə sodtьnь $\angle 4$ da $\angle 5$ dьnə sodtьnь $\angle 6$, to $\angle 1+\angle 4=2d$ da $\angle 5+\angle 6=2d$, kьз ordça peļəssez. I siз, kər вьd ətьzda peļəs dьnə, $\angle 1$ dьnə da $\angle 5$ dьnə, sodtam peļəsən, mijan petə sija-zə ətlasьs, a imenno $2d$, a eta vermas loņь toko sek, kər $\angle 4=\angle 6$, i eta viştalə, sto pьekiş kresta peļəssez ətьzdaəş. Siз-zə dokazitşə, sto $\angle 2=\angle 8$, jesļi $\angle 1=\angle 5$.

2a) Uslovia şərti $\angle 1=\angle 5$; $\angle 1+\angle 4=2d$, kьз ordçaez. Suvtətam-kə medвərja ətьzdaşəmьn $\angle 1$ tujə sьkət ətьzda $\angle 5$, loas, sto $\angle 5+\angle 4=2d$, mədņoz, pьekiş ətilador peļəssezlən ətlasьs $2d$ ьzda. Siз-zə dokazitşə, sto $\angle 3+\angle 6=2d$, jesļi $\angle 1=\angle 5$.

2в) Uslovia şərti $\angle 1=\angle 5$, $\angle 5+\angle 8=2d$, kьз ordçaez. Suvtətam-kə medвərja ətьzdaşəmьn $\angle 5$ tujə sьkət ətьzda $\angle 1$, loas, sto $\angle 1+\angle 8=2d$, mədņoz ətəriş ətilador peļəssezlən ətlasьs $2d$ ьzda. Siз-zə dokazitşə, sto $\angle 2+\angle 7=2d$, jesļi $\angle 1=\angle 5$.

4 §. Veşkьt viţţez paraļļeļnoşiş priznakkez.

1. Ķьk veşkьt viţ paraļļeļnoş jьliş ətik priznakən loə sija, sto kьk veşkьt viţ, kədna perpendikuļarnəjəş ətik veşkьt viţ dьnə, paraļļeļnəj viţţez. Viзətam mədik priznakkez, kədna loənь nija peļəsses svojstvoez vьlьn, kədna arkmənь kьk veşkьt viţ kuimətən krestalikə.

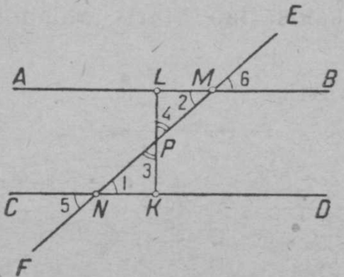
Ţeorema. **Kьk veşkьt viţ, kədna krestaləmaş kuimətən, paraļļeļnəjəş, nьlən-kə: 1) pьekiş da ətəriş kresta peļəssez ətьzdaəş; 2) sootvetstvennəj peļəssez ətьzdaəş; 3) pьekiş da ətəriş ətilador peļəssez şetənь ətlasьn** $2d$.

Dokazitam eta ţeoremaliş medoʒʒa torsə.

Şetəm: veşkьt AB da CD viţ da krestalan EF viţ; $\angle 1=\angle 2$ (92 ris.).

Ķolə dokazitnь: $AB \parallel CD$.

Dokazitəm. Ķrestalan EF viţ krestalə veşkьt AB da CD viţ M da N çutьn. Jukam MN orətok səri da nuətam sь P sərət veşkьt CD viţ dьnə PK perpendikuļar da nuzətam sijə veşkьt AB viţkət L çutьn krestaşəməз; loas kьk kuimpeļəsa figura: $\triangle PLM$ da $\triangle PKN$. Ena kuimpeļəsa figuraezьn: 1) $PM=PN$ — stroitəm şərti, 2) $\angle 1=\angle 2$ — uslovia şərti, 3) $\angle 3=\angle 4$, kьз panьta peļəssez, eta şərti $\triangle PLM=\triangle PKN$. Nь ətьzaşəmiş petə, sto $\angle K=\angle L$; uslovia şərti $\angle K=d$, sijən mьļa $PK \perp CD$, a eta şərti i $\angle L=d$, a raz siз, to $PL \perp AB$. I siз, veşkьt AB da CD viţ perpendikuļarnəjəş ətik veşkьt KL viţ dьnə, eta şərti nija paraļļeļnəjəş, $AB \parallel CD$.



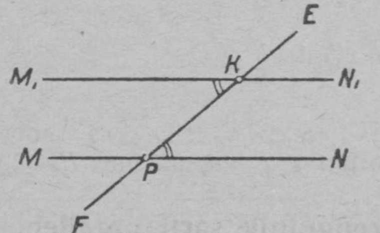
92 ris.

Ţeorema dokazitəmьs sija sluçaj ponda, kər ətьzdaəş ətəriş kresta peļəssez, suam $\angle 5=\angle 6$, vajətşə viзətəm sluçaj dьnə.

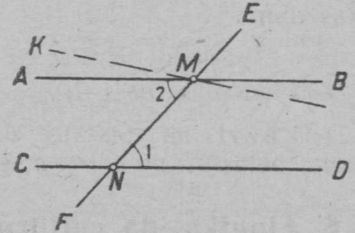
Şetəm, sto $\angle 5=\angle 6$. Sijən, mьļa $\angle 5=\angle 1$ da $\angle 6=\angle 2$, kьз panьta pęlәssez, to $\angle 1 = \angle 2$; no eta pьєkiş kręsta pelәssez i әtamәd kolasьn әtьƶdaәş, a sijәn $AB \parallel CD$.

Etєәm-ƶә teorema dokaƶitәmьs, kәr şetәm, sto әtьƶdaәş sootvetstvennәj pelәssez, libo şetәm, sto әtilador pelәssez, pьєkişşez libo әtәrişşez, әtlasьn şetәnь $2d$.

Zadaça. *Nuәtnь veşkьt viz, kәda-вь munis K çutәt da vәli parallelnәj şetәm veşkьt MN viz dьnә* (93 ris.).



93 ris.



94 ris.

S t r o i t ә m. Şetәm veşkьt MN viz da sь sajьn K çut. Nuәtam K çutәt mьjkә ьƶda pelәs şәrna MN dьnә krestalan EF viz; sija arkmәtә veşkьt MN vizkәt $\angle KPN$. Stroitam eta вәrьn K çut dьnьn krestalan EF vizşan mәdladorә $\angle M_1KP = \angle KPN$, sek eta pelәslәn M_1K lador loas kossan veşkьr vizәn, kәda parallelnәj MN dьnә, $M_1K \parallel MN$. Вьliş, stroitәm şәrti $\angle M_1KP = \angle KPN$, a ena — pьєkiş krestapelәssez, eta şәrti, $M_1N_1 \parallel N.M$

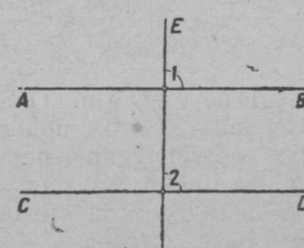
2. *Teorema (вәrәna).* Кьk parallelnәj veşkьt viz-kә krestalәmaş kuimәtәn, to әtьƶdaәş: 1) pьєkiş kresta pelәssez, 2) әtәriş kresta pelәssez, 3) sootvetstvennәj pelәssez da 4) әtlas kьз pьєkiş, siз i әtәriş әtilador pelәssezlәn $2d$ ьƶda.

Dokaƶitam teoremaliş medoзза torsә.

Şetәm: $AB \parallel CD$; EF — krestalan viz (94 ris.).

Kolә dokaƶitnь: $\angle 1 = \angle 2$.

D o k a ƶ i t ә m (panьtaşan). As dumaiş viştalam, sto $\angle 1$ авu $\angle 2$ ьƶda, a ьзьtƶьk sьşşa, $\angle 1 > \angle 2$. Stroitam M çut dьnьn da krestalan EF viz dьnьn $\angle KMN = \angle 1$. Siзkьз $\angle KMN = \angle MND$, to $KM \parallel CD$, da M çutәt munәnь kьk veşkьt viz, KM da AB, kәdna parallelnәjәş CD dьnә; no etєәm viştalәmьs munә panьt parallelnәj vizzez aksiomalә, etaşan, sto $\angle 1 > \angle 2$, nevernәj.



95 ris.

As dumaiş viştalam-kә, sto $\angle 1 < \angle 2$, to M çutәt da krestalan EF viz dьnьn seєәm pelәs stroitikә, kәda вь vәli $\angle 1$ ьƶda, mijә вәra loktam zakluçenno dьnә, sto M çutәt munәnь kьk veşkьt viz, parallelnәjәş CD dьnә, mьj oz vermь lonь parallelnәj vizzez jьliş akşioma şәrti. I siз, $\angle 1$ oz vermь-kә lonь ne ьзьtƶьk, ne uçәtƶьk $\angle 2$ şәrti, to $\angle 1 = \angle 2$, a eta loә, sto pьєkiş kresta peləssez, kədna arkməmaş kьk paraļļeļnəj veşkьt viz kuimət vizən krestaşikə, ətьzdaəş.

Ţeoremaiş mukəd torrezlən spravedļivoşьs petə dokazitəmiş, sijən sto ətьzdaəş-kə рьєkiş kresta peləssez, ətьzdaəş i ətəriş kresta peləssez, sootvetstvennəj peləssez da ətlas kьз рьєkiş, siз i ətəriş ətilador peləssezlən $2d$ ьzda.

3. ***Petkətas.*** **Veşkьt viz-kə perpendikuļarnəj loə kьk paraļļeļnəj veşkьt viz kolasiş ətьs dьnə, to sija perpendikuļarnəj i mədьs dьnə.**

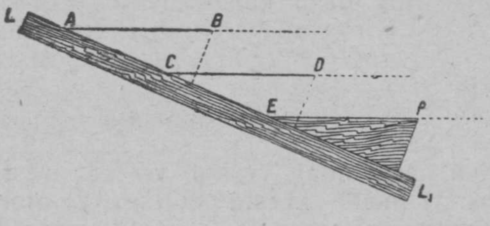
Şetəm: $AB \parallel CD$; $EF \perp AB$ (95 ris.).

Kolə dokazitnь: $EF \perp CD$.

Dokazitəm. Siз-kьз $AB \parallel CD$, to $\angle 1 = \angle 2$, kьз sootvetstvennəj peləssez; no $\angle 1 = d$, eta şərti i $\angle 2 = d$, mədnoz $EF \perp CD$.

5 §. Ļiņejka da çerţitçan treugoļņik şərti paraļļeļnəj veşkьt vizzez stroitəm.

Paraļļeļnəj veşkьt vizzez medprostəj sposoвən nuətnь kuzəmьs əddən вura kolə çerţitçikə. Medprostəj sposoвən stroitəmьs kerşə ļiņejka da çerţitçan treugoļņik şərti da panşə seєəm sootvetstvennəj peləssez ətьzdaşəm şərti, kədna arkmənь kьk paraļļeļnəj veşkьt viz kuimətən krestalikə (96 ris.).



96 ris.

6 §. Sootvetstvennəja paraļļeļnəj ladora peləssezlən svojstvo.

Ţeorema. **Paraļļeļnəj ladora peləssez ļiвo ətьzdaəş, nija-kə kьknan peləsьs vekņitəş, ļiвo ətlasьn şetənь $2d$, peləssez kolasiş-kə ətьs vekņit, mədьs paşkьt.**

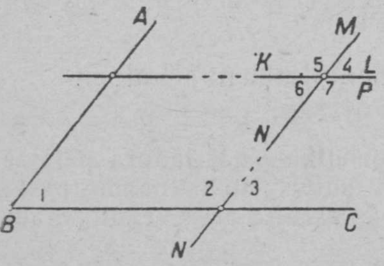
Şetəm: $\angle B$ — vekņit; $MN \parallel AB$ da $KL \parallel BC$ (97 ris.).

Kolə dokazitnь: 1) $\angle B$ ətьzda P çut dьniş ļuвəj vekņit peləskət;
2) $\angle B + P$ çut dьniş ļuвəj paşkьt peləs şetənь $2d$.

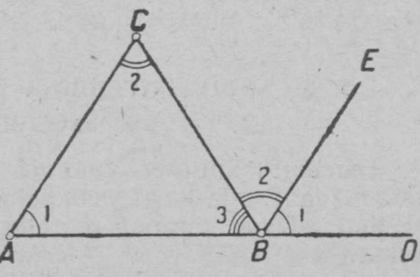
Dokazitəm. 1) Sodtam P çut dьniş peləsliş ət ladorsə, suam MN lador, setçəз, medвь sija krestaşis BC ladorkət, sek $\angle B = \angle 3$, kьз sootvetstvennəj peləssez paraļļeļnəj AB da MN viz da krestalan BC viz dьnьn, no $\angle 4 = \angle 3$, kьз sootvetstvennəj peləssez paraļļeļnəj BC da KL viz da krestalan MN viz dьnьn.

I siз, $\angle B$ da $\angle 4$ torjьn $\angle 3$ ьzdaəş, eta şərti, nija ətьzdaəş ətaməd kolasьn: $\angle B = \angle 4$. No $\angle 4 = \angle 6$, kьз panьta peləssez, eta şərti, i $\angle B = \angle 6$. I siз, $\angle B = \angle 4 = \angle 6$; вьdəs ena peləsses—vekņitəş, eta şərti, vekņit $\angle B$ ətьzda P çut dьniş ļuвəj veşkьt peləskət, kədnalən ladorrez paraļļeļnəjəş $\angle B$ ladorrezlə.

2) Dokazitam, sto $\angle B$ ətlaʙn P çut dʙniş ļuʙəj paşkʙt peļəskət şetə $2d$. $\angle 4+\angle 7=2d$, kʙз ordçaez, da $\angle 4=\angle B$, kʙз paraļļeļnəj ladora veknit peļəssez. Suvtətam-kə medoззa ətʙzdaşəmʙn $\angle 4$ tujə sʙkət ətʙzda $\angle B$, loas $\angle B+\angle 7=2d$. Suvtətam-kə sʙвərʙn medвərja ətʙzdaşəmʙn $\angle 7$ tujə sʙkət ətʙzda $\angle 5$, laas $\angle B+\angle 5=2d$. I siз, veknit $\angle B$ P çut dʙniş ļuʙəj paşkʙt peļəskət loə $2d$ ʙzda.



97 ris.



98 ris.

7 §. Kuimpeļəsa figura peļəssezlən svojstvoez.

Teorema. **Ļuвəj kuimpeļəsa figura pʙєkiş peļəssezlən ətlasʙs** $2d$ **ʙzda.**

Şetəm: $\triangle ABC$ (98 ris.).

Kolə dokazitnʙ: $\angle A+\angle B+\angle C=2d$.

Dokazitəm. Nuzətam kuimpeļəsa ABC figuraliş AB lador da nuətam sʙ B jʙlət veşkʙt viz $BE \parallel AC$.

B çut dʙniş peļəssezlən ətlasʙs $2d$ ʙzda, mədnoz $\angle 1+\angle 2+$ $+\angle 3=2d$.

Stroitəm şərti: 1) $\angle 1=\angle A$ kʙз sootvetstvennəj peļəssez, 2) $\angle 2=$ $=\angle C$ kʙз kresta peļəssez, 3) $\angle 3=\angle B$.

No $\angle 1+\angle 2+\angle 3=2d$, eta şərti i $\angle A+\angle B+\angle C=2d$.

Petkətassez. 1. **Kuimpeļəsa figuraʙn oz vermʙ lonʙ unazʙk ətik veşkʙt ļiвo paşkʙt peļəşa.**

Вʙļiş, kuimpeļəsa figuraiş kuimnan peļəslən ətlasʙs $2d$ ʙzda, i nʙ kolasiş ətik peļəs-kə d ʙzda ļiвo ʙзʙtzʙk d şərti, to məd kʙk peļəslən ətlasʙs sootvetstvennəja loas d ʙzda ļiвo d şərti uçətzʙk, i eta şərti məd kʙk peļəsiş вʙdʙs loas d-şa uçətzʙk.

2. **Veşkʙtpeļəsa kuimpeļəsa figuraiş veknit peļəssezlən ətlasʙs** d **ʙzda.**

3. **Ətik kuimpeļəsa figuraiş-kə kʙk peļəs ətʙzdaəş mədik kuimpeļəsa figuraiş kʙk peļəskət, to ena kuimpeļəsa figuraeziş i kuimət peļəsses ətaməd kolasanʙs ətʙzdaəş.**

4. **Kuimpeļəsa figuralən ətəriş peļəsʙs ətʙzda sʙlə neordça, pʙєkiş peļəssez ətlaskət.**

I eta şərti,

5. **Kuimpeļəsa figuralən ətəriş peļəsʙ ʙзʙtzʙk sʙlə ne ordça вʙd pʙєkiş peļəşa.**

Bьļiş $\angle A+\angle B+\angle C=2d$

$\angle CBD+\angle B=2d$

Eta şərti $\angle CBD=\angle A+\angle C$ da $\angle CBD>\angle A$ da $\angle CBD>\angle C$.

6. Kuimpeļəsa figura ətəriş peļəssezlən ətlasьs $4d$ ьƶda.

Bьļiş, kuimpeļəsa figuraas вьd jьv dьпьп ətəriş da pьɛkiş peļəslən ətlasьs $2d$ ьƶda; eta şərti kuimpeļəsa figura pьɛkiş da ətəriş вьdəs peļəssezlən ətlasьs petə $6d$, a siз-kьз pьɛkiş peļəssezlən ətlasьs $2d$ ьƶda, to вьdəs ətəriş peļəssezlən ətlasьs $6d-2d=4d$.

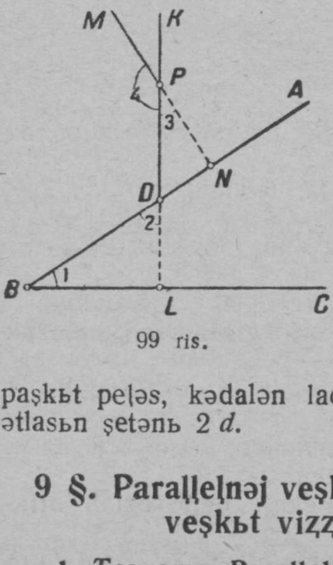
8 §. Sootvetstvennəja perpenḑikuļarnəj ladora peļəssezlən svojstvo.

Ţeorema. **Sootvetstvennəja perpenḑikuļarnəj ladora peləssez ļiвo ətьƶdaəş, nija-kə kьknan peļəsьs vekņitəş ļiвo kьknanпьs paşkьtəş, ļiвo ətlasьп şetəпь 2 d, peļəssez kolasiş-kə ətьs vekņit, mədьs paşkьt.**

Şetəm: $\angle B$ — vekņit; $MN \perp AB$ da $KL \perp BC$ (99 ris.).

Kolə dokaƶitпь: 1) $\angle B$ ətьƶda P çut dьniş ətik vekņit peļəskət;
2) $\angle B+P$ çut dьniş ətik paşkьt peləs şetəпь $2d$.

Dokaƶitəm. 1) Viзətam veskьtpeļəsa kuimpeļəsa BDL da PDN figura, пьlən $\angle B+\angle 2=d$ da $\angle 3+\angle 2=d$; pondam-kə sravņitlьпь enə kьk ətьƶdaşəmsə, aззam, sto $\angle B=\angle 3$, kəda sulalə P çut dьпьп; i siз, ena peļəsses vьkņitəş da ətьƶdaəş.



99 ris.

Viзətпь torjən sluçajjez, P peļeslən-kə jьv kujlə: 1) şetəm B peļəs pьɛkьп, 2) B peļəs sajьп siз, sto sьlən ladorres krestaləпь şetəm peļəsliş ladorrez sodtəttesə.

2) Medвь dokaƶitпь, sto vekņit $\angle B$ da P çut dьniş ļuвəj paşkьt peļəs ətlaвьп şətəпь 2 d, viзətam P çut dьniş peļəssez: 3 da 4. $\angle 3+\angle 4=2d$, no $\angle 3=\angle B$; suvtətam-kə medoззa ətьƶdaşəmьп $\angle 3$ tujə sьkət ətьƶda $\angle B$, loas, sto $\angle B+\angle 4=2d$, mədņoƶ, şetəm $\angle B$ da P çut dьniş paşkьt peļəs, kədalən ladorres perpenḑikuļarnəjəş $\angle B$ loḑorrezlə, ətlasьп şetəпь 2 d.

9 §. Paraļļeļnəj veşkьt viz̧z̧ezən krestaləm paraļļeļnəj veşkьt viz̧z̧ez orətokkezlən svojstvo.

1. *Ţeorema.* Paraļļeļnəj veşkьt viz̧z̧ezən krestaləm kьk paraļļeļnəj veşkьt viz̧lən orətokkezпьs ətьƶdaəş.

Şetəm: $MN \parallel M_1N_1$ da $KL \parallel K_1L_1$ (100 ris.).

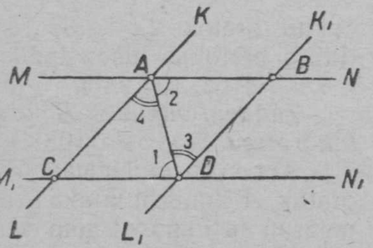
Kolə dokaƶitпь: $AB=CD$ da $AC=BD$.

Dokaƶitəm. Ətlaalam veşkьt viz̧ən A da B çut da viзətam kuimpeļəsa ABD da ACD figura. Nija ətьƶdaəş, ed пьlən: 1) AD —

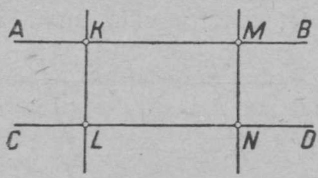
ətlasa lador, 2) $\angle 1 = \angle 2$, kьз kresta peļəssez, 3) $\angle 3 = \angle 4$, kьз kresta peļəssez.

Ķuimpeļəsa figuraez ətьzdaşəmiş petə, sto ətьzdaəş sootvetstvennəj ladorrez, a sijəņ: 1) $AB = CD$ kьз ladorrez, kədna kujlənь ətьzda *3* da *4* peļəs veştьn da 2) $AC = BD$ kьз ladorrez, kədna kujlənь ətьzda *1* da *2* peļəssez veştьn.

2. Ət paraļļeļnəj veşkьt viz vьliş kьєəmkə çutşaņ məd paraļļeļnəj veşkьt viz vьlə nuətəm perpendikuļarlən kuzaьs mьççalə aşnas kьk paraļļeļnəj viz kolasьn rasstojaņņo.



100 ris.



101 ris.

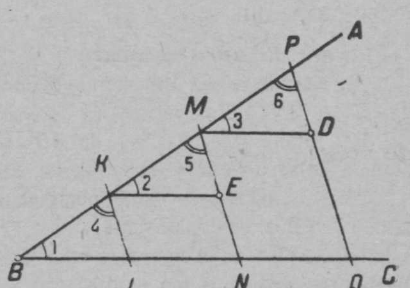
Petkətas. **Paraļļeļnəj veşkьt vizzez, mьj kuza вь nijə eg nuətə, ətaməd dьnşaņ kujlənь pьr ətьlьna.**

Şetəm: $AB \parallel CD$ (101 ris.).

Kolə dokazitnь: $KL = MN$.

Dokazitəm. KL da MN perpendikuļar, kədna nuətəmaş veşkьt CD viz dьnə veşkьt AB viz vьliş kьєəmkə kьk K da M çutşaņ, paraļļeļnəjəş, $KL \parallel MN$. No kьзi $KL \parallel MN$, to nija loənь paraļļeļnəj orətokkezən paraļļeļnəj veşkьt AB da CD viz kolasьn i, eta şərti, ətьzdaəş: $KL = MN$.

3. *Ţeorema.* Peļəsiş ətik lador vьlьn-kə puktьnь sь jьv dьnşaņ ətьzda orətokkez da nuətnь nь koņeççezət paraļļeļnəj veşkьt vizzez setçəз, medвь nija krestaşisə peļəsiş məd ladorkət, to eta lador vьlьn loasə ətaməd kolasьn ətьzda orətokkez.



102 ris.

Puktam ABC peļəs BA lador vьlə ətьzda orətokkez, $BK = KM = MP$ (102 ris.), da nuətam K, M da P çutət paraļļeļnəj veşkьt vizzez: $KL \parallel MN \parallel PQ$.

Şetəm: $BK = KM = MP$; $KL \parallel MN \parallel PQ$.

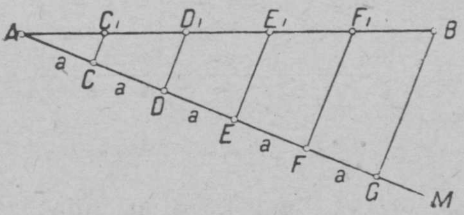
Kolə dokazitnь: $BL = LN = NQ$.

Dokazitəm. Nuətam K da M cutət veşkьt vizzez $KE \parallel BC$ da $MD \parallel BC$ da visətam arkməm kuimpeļəsa figuraez: BKL, KME da MPD. Nija ətьzdaəş lador da kьk oçakujlan peļəs şərti, ed пьlən $BK = KM = MP$ stroitəm şərti, $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$ da $\angle 4 = \angle 5 = \angle 6$, kьз sootvetstvennəj peļəssez.

Ķuimpeļəsa figuraez ətьƶdaşəmşaņ petənь ətьƶdaəş ladorrez, kədna kujlənь ətьƶda peļəssez veştьn; 4, 5 da 6, a sijən $BL = KE = MD$. No ed 1) $KE = LN$ da $MD = NQ$, kьз paraļļeļnəj viẓẓez kolasiş paraļļeļnəjjezlən orətokkez da 2) dokaƶitəm şərti $KE = MD = BL$, to $LN = NQ = BL$.

10 §. Ətьƶda torrez vьlə orətok jukəm.

Cьrkuļ da ļiņejka şərti mi kuƶam juknь orətok 2, 4, 8, 16 i siз oз. ətьƶda tor vьlə. Visətam, kьз jukşə orətokьs ļuвəj lьdḑəs mьmda ətьƶda tor vьlə, suam 3, 4, 5, 6, 7 i siз oз. tor vьlə.



103 ris.

Zadaça. *Juknь AB orətok 5 ətьƶda tor vьlə* (103 ris.).

S t r o i t ə m. Nuətam AB orətok A koņeçət mьjkə ьƶda peļəsən sь dьnə otsalan veşkьt AM viẓ da A jьvşaņ puktam sь vьlьn 5-iş mьjkə kuẓa orətok $AC = a$: $AC = CD = DE = EF = FG = a$. Medвərja okətokliş G koņeç ətlaalam şetəm AB orətok B koņeçkət da nuətam jukan C, D, E da F çutət veşkьt viẓẓez, paraļļeļnəjjezə BG dьnə, kədna jukasə AB orətok ətaməd kolasьn ətьƶda 5 tor vьlə: $AC_1 = C_1D_1 = D_1E_1 = E_1F_1 = F_1B$.

Stroitəmsə praviļnəja kerəm jьliş dokaƶitəmьs panşə oзlaņiş ţeorema vьlьn.

Jualannez da upraƶņeņņoez.

1. Ķьєəm vьvod tujə kernь to eta giƶəm şərti: ploskoş vьlьn şetəm: $AB \perp MN$ da $CD \perp MN$? Ķernь çerţoz.

2. Şetəm, sto $AB \perp KL$ da $AB \parallel CD$. Ķьєəm vьvod tujə kernь ena veşkьt viẓẓez ətaməd kolasьn kujləm jьliş, nija-kə ətik ploskoş vьlьn? Otvetsə tədmətnь çerţozən.

3. Aззьnь ьƶdasə вьdəs peļəssezliş, kədna arkməmaş kьk paraļļeļnəj veşkьt viẓ kuimət veşkьt viẓən krestalikə, kьз: 1) ena peļəsseziş ətik peļəs-kə kuimiş ьзьtƶьk sьkət ordça peļəşşa; 2) ena peļəsseziş ətik peļəs-kə 22°30′-ən uçətƶьk mədik peļəşşa; 3) ena peļəsseziş ətik peļəs loə mədik şərti 0,8; 4) kьk ordça peļəslən koļanьs loə 37°.

4. Şetəm: $AB \parallel CD$ da krestalan EF viẓ. Dokaƶitnь, sto вişşektrisaez: 1) kьk ətьƶda peļəslən, kədna kujlənь AB da CD dьnьn, paraļļeļnəjəş; 2) kьk ņeətьƶda peļəslən — perpenḑikuļarnəjəş.

5. Dokaƶitnь, sto veşkьtpeļəsa kuimpeļəsa figuraьn lador, kəda kujlə 30° ьƶda peļəs veştьn, loə gipoţenuza зьn ьƶda.

6. Veşkьtpeļəsa kuimpeļəsa figuraьn nuətnь sь vekņit peļəssezliş вişşektrisaez da dokaƶitnь, sto вişşektrisaez kolasьn peļəsьs 135° ьƶda.

7. Ķuimpeļəsa figuraьn aззьnь ətəriş da sьkət ordça pьєkiş peļəsliş ьƶda (veļiçina), tədam-kə, sto nija ətaməd kolasьn otnoşitçənь, kьз 3:2; 4:5; 11:7; 5:13, da giƶnь, kьєəm loas məd kьk pьєkiş peļəslən ətlasьs.

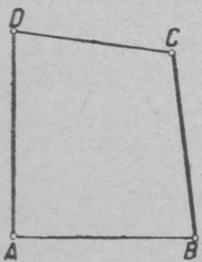
8. Tednь kuimpeļəsa figura peļəssezliş ьƶdasə, tədam-kə, sto nija otnoşitçənь, kьз 1:2:3. Vişţavnь, vermasə-ja kuimpeļəsa figuralən ladorres otnoşitçьnь, kьз 1:2:3.

VIII. ŊOĻPEĻƏSA DA UNAPEĻƏSA FIGURAEZ.

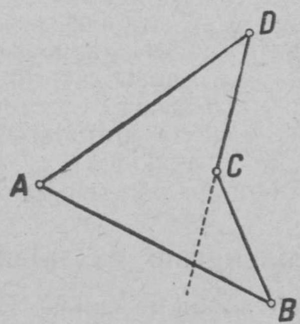
1 §. Ŋoļpeļəsa figuraez.

1. Ŋoļpeļəsa figura em ploskoş tor, kəda graŋiçitəma 4 orətoka pədnaşan çeglaşəm viẓən.

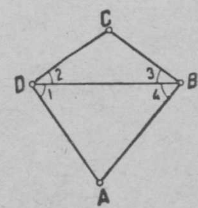
Ŋoļpeļəsa figuraiş вьdəs lador kuẓaezlən ətlas suşə ŋoļpeļəsa figura perimetraən. Ŋoļpeļəsa figuraes ovlənь vъpukləjəş (104 ris.) da ŋevъpukləjəş (105 ris.).



104 ris.



105 ris.



106 ris.

Ozlaŋьn mijə pondamə vizətnь toko vъpukləj ŋoļpeļəsa figuraez.

Vъpukləj ŋoļpeļəsa figuraən suşə seєəm figura, kədalən вьd pьєkiş peļəsьs uçətžьk paşkətəm peļəsşa, mədŋož, uçətžьk $2\,d$-şa. Vъpukləj unapeļəsa figura pъr kujlə ļuвəj ladorşaŋ toko ətərət (ətladorət).

2. *Ţeorema.* Ŋoļpeļəsa figura pьєkiş peļəssezlən ətlasьs $4d$ ьžda.

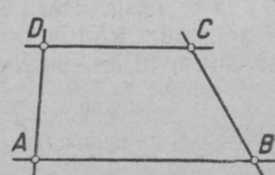
Şetəm: ŋoļpeļəsa $ABCD$ figura (106 ris.)

Kolə dokazitnь: $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 4d.$

Dokazitəm. Nuətam BD diagonaļ, sija torjətas ŋoļpeļəsa figurasə kьk kuimpeļəsa figura vьlə. Ena kuimpeļəsa figuraeziş вьdas pьєkiş peļəssezlən ətlasьs loə $2d$, eta şərti, kьknan kuimpeļəsa figuraas ļiвo ŋoļpeļəsa $ABCD$ figuraas pьєkiş peļəssezlən ətlasьs ьždanas $2d \cdot 2 = 4d$.

Gizəm: 1) $\triangle AgD$ pьєkьn $\angle A + \angle 1 + \angle 4 = 2d;$
2) $\triangle BCD$ pьєkьn $\angle 2 + \angle C + \angle 3 = 2d.$

$\angle A + (\angle 1 + \angle 2) + \angle C + (\angle 3 + \angle 4) = 4d,$
ļiвo $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 4d.$



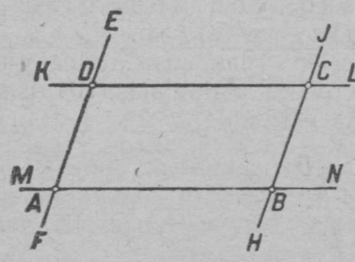
107 ris.

3. *Ţeorema.* Ŋoļpeļəsa figura ətəriş peļəssezlən ətlasьs $4\,d$ ьžda.

Вьļiş, ŋoļpeļəsa figuraiş вьd jьv dьnьn ətəriş da pьєkiş peļəslən ətlasьs loə $2\,d$; eta şərti ŋoļpeļəsa figura ətəriş da pьєkiş вьdəs peļəssezlən ətlasьs $8\,d$ ьžda, no ŋoļpeļəsa figura pьєkiş peļəssezlən ətlasьs $4d$ ьžda, a sijən ətəriş peļəssezlən ətlasьs ьždanas $8d - 4d = 4d$.

Ļubəj ꞑolpeļəsa figura ətəriş peļəssezlən ətlasьs, kьз i sь pьєkiş peļəssezlən ətlasьs, 4*d* ьƶda.

4. Ꞑolpeļəsa figuraeziş jansalənь aslanьs formaən, kəda nьlən petə panьta ladorrez kujləm şərti, trapecia da paraļļelogram.



108 ris.

T r a p e c i a — ꞑolpeļəsa figura, kədaьn paraļļeļnəjəş kьk panьta lador.

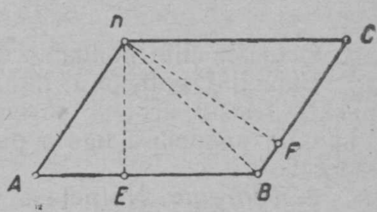
Ꞑolpeļəsa *ABCD* figura — trapecia (107 ris.).

P a r a ļ ļ e l o g r a m — ꞑolpeļəsa figura, kədaьn paraezən paraļļeļnəjəş panьta ladorrez. Sija arkmə sek, kər kьk kьєəmkə paraļļeļnəj veşkьt *KL* da *MN* viz krestaləmaş kьk mədik paraļļeļnəj veşkьt *EF* da *JN* vizən.

Ꞑolpeļəsa *ABCD* figura — paraļļelogram (108 ris.).

2 §. Paraļļelogram da sьlən svojstvoez.

1. Paraļļelogramlən pod da vьlьna. Paraļļelogramlən kьєəmkə kьk paraļļeļnəj lador boşşənь sь p o d t u j ə, suam *ABCD* paraļļelogramьn *AB* da *CD* lador (109 ris.); nь kolasiş rasstojaꞑꞑo, kədija merajtşə perpendikuļarən, suşə paraļļelogram vьlьnaən; vьlьnasə unaƶьk nuətənь paraļļeļogramas kьєəmkə ətik jьlət; *DE* da *DF* — *ABCD* paraļļelogramlən kьk ꞑeətьƶda vьlьna.



109 ris.

2. Paraļļelogram ladorrezlən svojstvo.

Ţeorema. **Paraļļelogramlən panьtakujlan larorres paraezən ətьƶdaəş.**

Şetəm: *ABCD* — paraļļelogram: $AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$.

Kolə dokazitnь: $AB = DC$, $AD = BC$.

Sto eta ţeorema veştaləm pravilnəja, mijə vezərtam to kьєəm ţeorema şərti: paraļļeļnəj vizzez kolasiş paraļļeļnəj viz orətokkez ətьƶdaəş.

3. Paraļļelogram peļəssezlən svojstvo.

Ţeorema. **Paraļļelogramlən panьtakujlan peļəssez ətьƶdaəş, a peļəssez, kədna kujlənь ətik lador berdьn, ətlasьn şetənь 2*d*, mədꞑoƶ, nija — sodtana peļəssez.**

Şetəm: *ABCD* paraļļelogram; $AB \parallel CD$ da $AD \parallel BC$.

Kolə dokazitnь: 1) $\angle A = \angle C$ da $\angle B = \angle D$;
2) $\angle A + \angle B = 2d$ da $\angle A + \angle D = 2d$ i siз oз.

Sto ena şorꞑitəmmes pravilnəjəş, mijanlə viştalə sootvetstvennəja paraļļeļnəj ladora peļəssez svojstvoez jьliş ţeorema.

Petkətas. **Paraļļelogramlən peļəssez kolasiş ətik peļəs-kə veşkьt, to bьdəs sьlən peļəsses veşkьtəş.**

Ena viştaləm svojstvoez şərti, kədna eməş paraļļelogram peļəssezlən, bьd sь peļəsliş ьƶdasə tədəm ponda kolə tədnь toko ətik peļəsliş ьƶda.

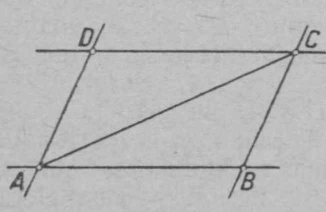
4. Paraļļelogramiş ḑiagoņaļļezlən svojstvo.

***Ţeorema.* Ḑiagonaļ jukə paraļļelogramsə kьk ətьƶda kuimpeļəsa figura vьlə.**

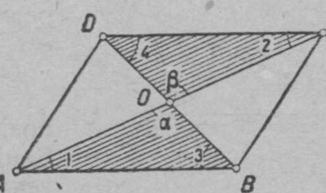
Şetəm: $ABCD$ — paraļļelogram; AC — ḑiagonaļ (110 ris.).

Kolə dokaƶitnь: $\triangle ABC = \triangle ACD$.

D o k a ƶ i t ə m. Kuimpeļəsa ABC da ACD figuraьn kuim sootvetstvennəja ətьƶda ladorən $AB = CD$ da $AD = BC$, kьz paraļļelogramiş panьtakujlan ladorrez, a AC ḑiagonaļ — nьlən ətlasa lador, sijən $\triangle ABC = \triangle ACD$.



110 ris.



111 ris.

***Ţeorema.* Paraļļelogramlən ḑiagonaļļez ətaməd kolasanьs krestaşan çutьn jukşənь səri.**

Şetəm: $ABCD$ — paraļļelogram; AC da BD — ḑiagonaļļez (111 ris.).

Kolə dokaƶitnь: $AO = OC$ da $BO = OD$.

D o k a ƶ i t ə m. Vizətam kuimpeļəsa AOB da DOC figura; $AB = DC$, kьz paraļļelogramiş panьtakujlan ladorrez, $\angle 1 = \angle 2$ da $\angle 3 = \angle 4$, kьz pьєkiş kresta peļəssez. Eta şərti, kuimpeļəsa figuraez ətьƶdaəş lador da kьk sootvetstvennəja ətьƶda sь dьnьn kujlan peļəssez şərti: $\triangle AOB = \triangle DOC$; kuimpeļəsa figuraez ətьƶdaşəmiş loə, sto ətьƶdaəş sootvetstvennəja kujlan eļementtez, a etaşan $AO = OC$, kьz ladorrez, kədna kujlənь ətьƶda kuimpeļəsa figuraezьn ətьƶda peļəssez, $\angle 3$ da $\angle 4$ veştьn; $OD = BO$, kьz ladorrez, kədna kujlənь ətьƶda peļəssez, $\angle 1$ da $\angle 2$ veştьn.

3 §. Paraļļelogrammezlən priznakkez.

1. *Ţeorema.* Ņoļpeļəsa figuraьn-kə kьk panьtakujlan lador ətьƶdaəş da paraļļeļnəjəş, to seєəm ņoļpeļəsa figuraьs paraļļelogram, mədņoƶ, i məd kьk ladorьs sьlən paraļļeļnəjəş.

Şetəm: $ABCD$ — ņoļpeļəsa figura, $AB = DC$ da $AB \parallel DC$ (112 ris.).

Kolə dokaƶitnь: $AD \parallel BC$.

D o k a ƶ i t ə m. Nuətam AC ḑiagonaļ da vizətam $\triangle ABC$ da $\triangle ACD$. Ena kuimpeļəsa figuraezьn: 1) AC — ətlasa lador; 2) $AB =$

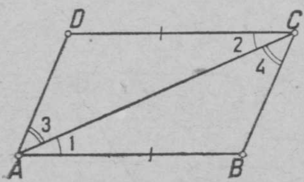
$= DC$ — uslovia şərti; 3) $\angle 1 = \angle 2$, a sijən $\triangle ABC = \triangle ACD$; kuimpeləsa figuraez ətьzdaşəmiş loə, sto $\angle 3 = \angle 4$; nija loənь pьєkiş kresta peləssezən veşkьt AD da BC viz da krestalan AC viz dьnьn, a sijən $AD \parallel BC$.

2. *Ţeorema.* **Ŋolpeləsa figuraьn-kə panьtakujlan ladorrez paraezən ətьzaəş, to sija parallelogram, mədŋoz, sьlən ladorres paraezən parallelnəjəş.**

Şetəm: $ABCD$ — ŋolpeləsa figura $AB = DC$ da $AD = BC$ (112 ris.).

Kolə dokazitnь: $AB \parallel DC$ da $AD \parallel BC$.

Dokazitəm. Nuətam AC diagonal da vizətam $\triangle ABC$ da $\triangle ACD$; nija ətьzdaəş: nьlən AC—əltasa lador, $AB = CD$ da $AD = BC$.



112 ris.

Kuimpeləsa figuraez ətьzdaşəmiş loə, sto ətьzdaəş nьlən sootvetstvennəja kujlan peləssez, a imenno: $\angle 1 = \angle 2$; ena peləsses pьєkiş krestakujlannez, a sijən $AB \parallel DC$; etaşşa, $\angle 3 = \angle 4$, a sьşaŋ $AD \parallel BC$.

I siz, $AD \parallel BC$ da $AB \parallel CD$, mədŋoz, panьtakujlan ladorrez ŋolpeləsa $ABCD$ figuraьn paraən parallelnəjəş; eta şərti, seєəm ŋolpeləsa figuraьs — parallelogram.

3. *Ţeorema.* **Ŋolpeləsa figuraьn-kə diagonalles ətaməd kolasьn jukşənь səri, to seєm ŋolpeləsa figuraьs parallelogram, mədŋoz, sьlən panьtakujlan ladorres paraezən parallelnəjəş (114 ris.).**

Şetəm: $ABCD$ — ŋolpeləsa figura, AC da BD diagonallez; $AO = OC$ da $BO = OD$.

Kolə dok.: $AD \parallel BC$ da $AB \parallel CD$, mədŋoz $ABCD$ parallelogram.

Dokazitəm. Vizətam kuimpeləsa AOB da DOC figura, kədnaə pьrənь AO da OC, BO da OD — diagonallezlən orətokkez da AB da DC lador. Ena kuimpeləsa figuraezьn $AO = OC$ da $BO = OD$ uslovia şerti da $\angle\alpha = \angle\beta$ kьz panьtakujlan peləssez; eta şərti, $\triangle AOB = \triangle DOC$; kuimpeləsa figuraez ətьzdaşəmiş petə, sto ətьzdaəş peləssez, kədna kujlənь ətьzda ladorrez veştьn, a imenno $\angle 1 = \angle 2$ da $\angle 3 = \angle 4$; ena peləsses krestaəş, a sijən $AB \parallel DC$. Kuimpeləsa AOD da COB figura vizətikə azzam, sto nija ətьzdaəş da $AD \parallel CB$.

I siz, $AD \parallel BC$ da $AB \parallel CD$ — ŋolpelesa $ABCD$ figuralən panьtakujlan ladorrez — paraezən parallelnəjəş, $ABCD$ — parallelogram.

Eta priznakən polzujtçənь parallelogram stroitikə, kər şetəmaş sьlən kьk m da n diagonal da nь kolasiş $\angle a$.

Eta svojstvo şerti stroitənь cьrkulən da linejkaən parallelogram, parallelnəj vizzez stroittəg.

4 §. Parallelogram stroitəm.

1. **zadaça.** *Stroitnь parallelogram sь diagonal şərti: $m = 10$ sm da sь lodorrez şərti: $a = 6$ sm da $b = 7$ sm.*

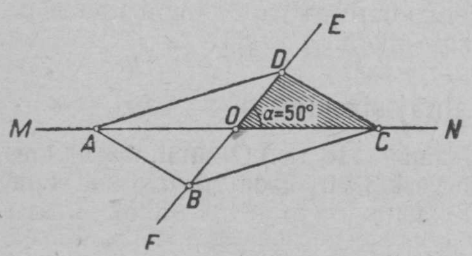
Stroitəm. Stroitnь kuimpelesa figura sь kuim a, b da m lodar şərti, a sьvəгьn sodtəmən vajətnь sijə parallelograməz.

2 zadaça. *Stroitnь paraļļelogram sь lodorrez şərti:* $a = 5$ *sm*, $b = 4$ *sm da* $\angle C = 40°$.

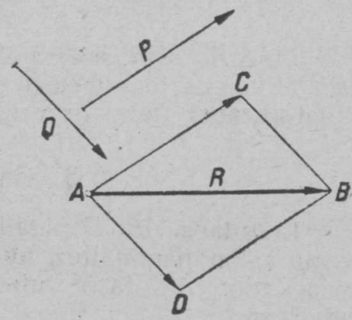
Stroitəm. Stroitnь pervo kuimpeļəsa figura sь kьk *a* da *b* lodar şərti da *c* peļəs şərti, kəda jərtəm şetəm ladorrez kolasьn, a sьвərьn sodtəmən vajətnь kuimpeļəsa figurasə paraļļelogramə3.

3 zadaça. *Stroitnь paraļļelogram sь kьk diagonaļ şərti:* $m = 6$ *sm*, $n = 10$ *sm da nь kolas'ş peļəs şərti:* $a = 50°$.

Stroitəm. Nuətam (113 ris.) 50° peļəsən krestaşan kьk veşkьt *MN* da *EF* viz da nь kolasiş вьdьs vьlьn teçam nь krestaşan *O* cutşaņ kьknan ladorə orətokkez, kədna vəlisə вь sootvetstvennəja ətьzdaəş şetəm diagonaļļez зьnnezkət, da sьвərьn ətlaalam petəm orətokkezliş koņeççesə: aŕkməm ņoļpeļəsa *ABCD* figura—paraļļelogram.



113 ris.



114 ris.

4 zadaça. *Stroitnь paraļļelogram m da n diagonaļ şərti da a lador şərti.*

Stroitəm. Zadaça kerşə si3-zə, kь3 kuim lador şərti kuimpeļəsa figura stroitşə: a, $\frac{m}{2}$ da $\frac{n}{2}$.

Zadaça kernь tujə sek, kər $a < \frac{m}{2} + \frac{n}{2}$, ļiвo $2a < m + n$.

5 zadaça. *Stroitnь paraļļelogram sь R diagonaļ şərti, kədalən şetəm kuza da veşkəv, da sь P da Q ladorliş şetəm veşkəv şərti* (114 ris).

Stroitəm. $AB = R$ diagonaļşaņ, kədalən şetəm kuza da veşkəv, *A* koņeçət nuətam veşkьt vizzez, kedna vəlisə вь paraļļelnəjəş şetəm lador veşkəvvezlə. Sьвərьn nuətam diagonaļьs məd koņeçət — *B* çutət veşkьt vizzez, paraļļeļnəjjəzə etna zə kьk veşkəvlə. Stroitəm veşkьt vizzezlən krestaşan çut mьççalas paraļļelogramliş məd kьk jьv.

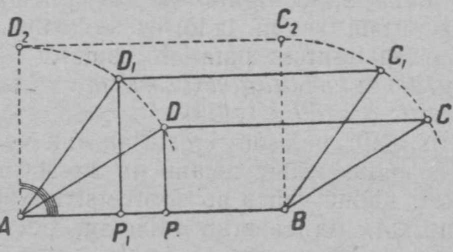
2. Ena — osnovnəj sluçajjez paraļļelogram stroitəmьn. Ətik kuimpeļəsa figura stroitəmən, kədna vьlə paraļļelogram torjaşə ətik ļiвo kьknan diagonaļən, tədşə paraļļelogramьs вьdsən.

Estiş petənь paraļļelogrammez ətьzdaşəmiş to kьєem priznakkez. Paraļļeļogrammez ətьzdaəş, nьlən-kə ətьzdaəş eļementtez:

1) kьk ordça lador da nь kolasiş peļəs,
2) kьknan diagonaļ da nь koļasiş peļəs,
3) kьk ordça lador da diagonaļ,
4) kьknan diaganaļ da lador.

Oz kov vunətnь, sto paraļļelogramliş вьdəs peļəssesə tədəm ponda kolə tədnь toko ətik peļəsliş ьzdasə.

3. **Zadaça.** Tədmavnь sarņirnəj $ABCD$ paraļļelogram şərti (115 ris.), kьз sьliş ətik peļəs vezikə, suam A peļəs, vezşə paraļļelogramlən DP vьlьna da perimetra.



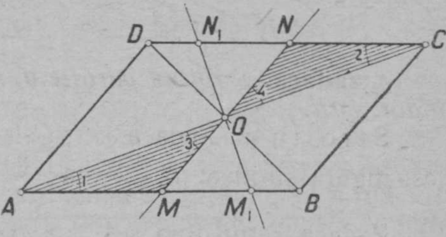
115 ris.

T ə d m a l ə m. Vezam - kə paraļļelogramliş A peļəs ьzdasə, vezşas sьlən i DP vьlьna; eta dьrņi sija sodə, $\angle A$ kajə-kə 90°-əз, i çinə, $\angle A$ lazmalə-kə 0°-əз; kər $\angle A$—0°, to paraļļelogram əsə, sьlən ladorres ətvьlaşənь i paraļļelogramiş loə veşkьt viz, kədalən kuzaьs paraļļelogramьs kьk ordça lador ьzda.

Kər $\angle A = 90^\circ$, sek paraļļelogramlən вьdəs peļəsses loasə veşkьtəş da DP vьlьna loas medьзьt. Perimetraьs-ʒə paraļļelogramlən вьdəs enija sluçajjez dьrņi oz vezşь, koļə ətkoḑ.

5 §. Centraļnəj şimmetria.

1. **Zadaça.** $ABCD$ paraļļelogramьn (116 ris.) O çutət, kьtən krestaşənь sьlən ḑiagonaļļez, nuətəm veşkьt viz, kəda kreştalə kьk paraļeļnəj lador M da N çutьn. Dokazitnь, sto MN orətok jukşə O çutьn səri.

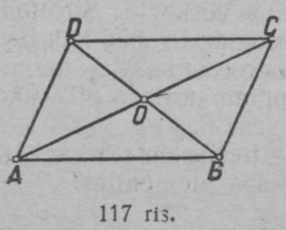


116 ris.

K e r ə m. Ķuimpeļəsa AOM da ONC figura ətьzdaəş, sijən mьļa $AO = OC$, $\angle 1 = \angle 2$ kьз kresta peļəssez da $\angle 3 = \angle 4$ kьз panьtaez; kuimpeļəsa figuraez ətьzdaşəmiş loə, sto $OM = ON$.

1 siз, paraļļelogram ladorrez kolasiş ļuвəj krestalan veşkьt viẓlən orətok, kəda munə sь ḑiagonaļļez krestaşəm O çutət, jukşə etija çutьn səri.

2. Nuətam $ABCD$ paraļļelogramьn (117 ris.) sьliş AC da BD ḑiagonaļ; nija krestaşənь O çutьn; loas 4 kuimpeļəsa figura. Bergətam çertoz ploskoş velət nь koļasiş ətsə, suam $\triangle AOB$ O çut gəgər 180° vьlə, sek B jьv ətvьlaşas D jьvkət ($OB = OD$) da A jьv ətvьlaşas C jьvkət ($OA = OC$); kuimpeļəsa AOB da COD figuraezlən kuimnan jьlьs ətvьlaşisə; eta şərti ətvьlaşasə i aşnьs kuimpeļəsa figuraes. Etaз-ʒə tujə viştavnь kuimpeļəsa BOC da DOA i ABC da CDA figura jьliş, a siз-ʒə ņoļpeļəsa $MBCN$ da $NDAM$ figura jьliş (116 ris.).



117 ris.

3. Ķьk çut A da C, B da D, kьk orətok AB da CD, BC da DA, AO da OC, OB da OD da kьk figura $\triangle AOB$ da $\triangle COD$, $\triangle ABC$ da $\triangle CDA$ loənь c e n t r a ļ n ə j ş i m m e t r i a a ə ş O ç u t ş ə r t i, çut gəgəras 180° vьlə-kə вergəttən ətьs nь koļasiş ətvьlaşas mədьskət.

Figura suşə centraļnəj şimmetriaa figuraən, sijə-kə şetəm O çut gəgər 180° vьlə вergəttən sьlən вьd torьs zajmitə mesta, kəda ozƶьk vəli zajmitəm mədik torən. Çut O, kəda gəgər munə 180° vьlə вergətəm, suşə şimmetria centraən.

4. Paraļļelogram loə centraļnəj şimmetriaa figuraən, kədalən şimmetria centraьs diagonaļļes krestaşan çutьn.

5. Paraļļelogramlən aвuəş şimmetria oşşes.

6 §. Kuimpeļəsa figuralən sər viȥ.

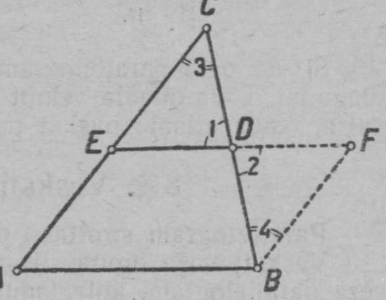
Orətok, kədalən koꞑeççes loənь kuimpeļəsa figuraiş kьk lador sərrezən, suşə kuimpeļəsa figura sər viȥən.

Ţeorema. **Kuimpeļəsa figuralən sər viȥьs paraļļeļnəj kuimət ladorlə da loə sь ʒьn ьƶda.**

Şetəm: ABC — kuimpeļəsa figura, $AE=EC$ da $BD=DC$ (118 ris.)

Kolə dokaƶitnь: $ED \parallel AB$ da $ED=\frac{1}{2}AB$.

Dokaƶitəm. ED sodtət vьlьn merajtam DF orətok, kəda ətьƶda ED orətokkət, da ətlaalam F çut B çutkət. Loas $\triangle BDF$, kəda ətьƶda $\triangle CED$ figurakət, sijən mьļa $CD=BD$, $ED=DF$ da $\angle 1=\angle 2$. Kuimpeļəsa figuraez ətьƶdaşəmiş loə, sto $\angle 3=\angle 4$, a eta şərti $BF \parallel EC$, mədꞑoƶ $BF \parallel AC$, sьşşa, $BF=EC=AE$, siʒkə ꞑoļpeļəsa $ABFE$ figura — paraļļelogram, sijən sto panьtakujlan BF da AE ladorrez ətьƶdaəş da paraļļeļnəjəş. Eta şərti, $EF \parallel AB$ da $EF=AB$, no $EF=ED+DF=2\,ED=AB$, a sijən $ED=\frac{1}{2}AB$.



118 ris.

7 §. Veşkьtpeļəsa figura. Sьlən svojstvoez.

1. Nuətnь-kə kьk paraļļeļnəj veşkьt KL da MN viȥ da krestavnь nijə veşkьt peļəs şərna kьk paraļļeļnəj veşkьt EF da HQ viȥən (119 ris.), to paraļļeļnəj veşkьt viȥȥez kolasiş orətokkez arkmənь veşkьt peļəsseza $ABCD$ paraļļelogram; seꞓəm paraļļelogramьs suşə veşkьtpeļəsa figuraən. I siʒ,

veşkьtpeļəsa figuraьs em veşkьtpeļəsa paraļļelogram.

Veşkьtpeləsa figuraьs sija ƶə paraļļelogram i eməş sьlən вьdəs paraļļelogram svojstvoes.

Veşkьtpeļəsa figuraьn: 1) panьtakujlan ladorrez ətьƶdaəş; 2) panьtakujlan peļəssez ətьƶdaəş i вьdьs пь kolasiş veşkьt peļəs ьƶda; 3) diagonaļ torjətə sijə kьk ətьƶda veşkьtpeļəsa kuimpeļəsa figura vьlə; 4) diagonaļļez ətaməd kolasьn jukşənь səri; 5) sь diagonaļļezlən krestaşan çutьs loə sьlən şimmetria centraən.

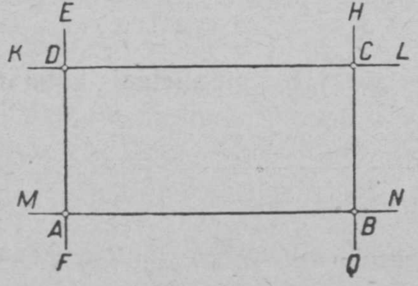
Veşkьtpeļəsa figura ladorrez kolasiş ətik suşə s ь p o d ə n; lador, kəda ordça loə veşkьtpeļəsa figura podkət, suşə vьlьnaən.

Ţeorema. **Veşkьtpeļəsa figuralən ḑiagonaļļez ətaməd kolasьn ətьƶdaəş.**

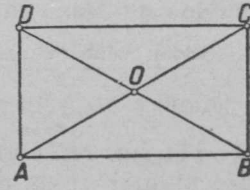
Şetəm: $ABCD$ — veşkьtpeļəsa figura; AC da BD — ḑiagonaļļez (120 ris).

Kolə dok.: $AC = BD$.

D o k a ƶ i t ə m. $\triangle ABD$ da $\triangle ACD$ — veşkьtpeļəsaəş da nija ətьƶdaəş kьk sootvetstvennəja ətьƶda kaţet şərti: nьlən AD kaţet ətlasa da $AB = CD$ kьз panьtakujlan ladorrez veşkьtpeļəsa figuralən. Kuimpeļəsa figuraez ətьƶdaşəmiş loə, sto $AC = BD$, mədņoƶ, veşkьtpeļəsa figuralən ḑiagonaļļez ətьƶdaəş.



119 ris.



120 ris.

Siз oz ovlь paraļļelogramьn: ḑiagonaļļez sьlən aвu ətьƶdaəş, da ḑiagonaļ, kəda ətlaalə vekņit peļəssezliş jьvvesə, ьзьtƶьk sija ḑiagonaļşa, kəda ətlaalə paşkьt peļəssezliş jьvvez.

8 §. Veşkьtpeļəsa figura stroitəm.

Paraļļelogram stroitəm ponda kolə tədnь sьliş kuim eļement.

Veşkьtpeļəsa figura stroitəm ponda-ƶə, kəda loə veşkьt peļəsseza paraļļelogram, kolə tədnь sьliş toko kьk viƺ eļement; viştavnь veşkьtpeļəsa figura ponda kuimət eļement — ordça ladorrez kolasiş peļəs — oz kov, ed veşkьtpeļəsa figaraьn вьdəs peļəsses veşkьtəş.

Veşkьtpeļəsa figura poƺə stroitnь sek, kər şetəməş:

1) kьk ordça a da $в$ lador, 2) m ḑiagonaļ da ətik kьєəmkə lador, 3) kьєəmkə ətik lador, a ļibo $в$, da peļəs, kəda arkmə ḑiagonaļən şetəm ladorkət, 4) m ḑiagonaļ da ḑiagonaļļez kolasiş a peļəs.

Zadaça. *Stroitnь veşkьtpeļəsa figura ḑiagonaļ şərti* $m = 8$ *sm da sь ḑiagonaļļez kolasiş* $\angle a = 30°$ şərti.

S t r o i t ə m. Ķrestalam $a = 30°$ peļəs şərti kьk veşkьt MN da KL viƺ da teçam nь krestaşan O çut dьnşaņ kьknan ladorə orətokkez: $\frac{m}{2} = \frac{8}{2} = 4$ *sm*, a sьвərьn ətlaalam ətamədkət orətokkezliş koņeççesə veşkьt viƺƺezən.

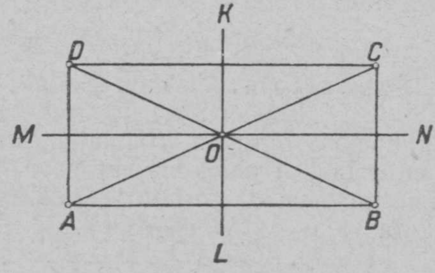
Etateəm stroitəm şərti arkməm ņolpeļəsa figura — veşkьtpeļəsa figura.

9 §. Veşkьtpeļəsa figuralən şimmetria oşşez.

Nuətnь-kə veşkьtpeļəsa $ABCD$ figuraiş AC da BD ḑiagonaļ krestaşan O çutət veşkьt KL da MN viƺ (121 ris.), kədna vəlisə вь sootvetstvennəja perpenḑikuļarnəjəş sь ladorrez dьnə, da sьʙərьn kəstьnь çerţoƶsə veşkьt *KL* ļiʙo *MN* viz̦ kolasiş əitik veşkьt viz̦ vьlət, to çeţroƶlən ət torьs ʙьdsən ətvьlaşas çerţooƶiş məd torkət, eta şərti:

1) veşkьt *KL* da *MN* viz̦, kədna perpenḑikuļarnəjəş veşkьtpeļəsa figura ladorrez dьnə da munənь ḑiagonaļļez krestaşan çutət, loənь sь şimmetria oşşezən.

2) veşkьtpeļəsa figuralən kьk şimmetria oş.



121 ris.

Veşkьtpeļəsa fugura şimmetria oş svojstvoiş loə, sto sija jukə sьliş panьtakujlan ladorresə səri; orətok, kəda ətlaalə veşkьtpeļəsa figuraliş panьtakujlan lador sərrez, suşə sь sər viz̦ən; sija ətьƶda loə veşkьtpeļəsa figuraiş sьkət paraļļeļnəj ladorrezkət.

§ 10. Romʙ da sьlən svojstvoez.

1. Paraļļelogram, kədalən ʙьdəs ladorres ətьƶdaəş, suşə romʙən. **Romʙьs ətьƶdaladora paraļļelogram.**

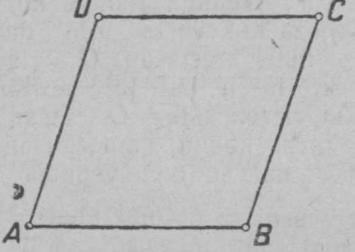
Romʙ opreḑeļeņņoiş loə (122 ris.):

1) $AB \parallel CD$ da $AD \parallel BC$;

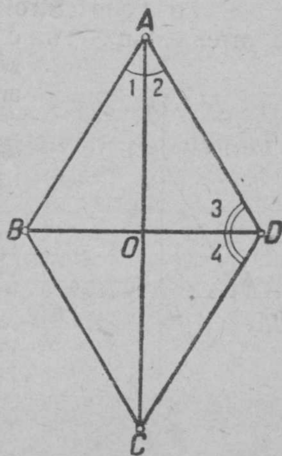
2) $AB = BC = CD = AD$.

2. **Romʙlən svojstvoez.** Romʙьs ətьƶdaladora paraļļelogram, i eməş sьlən ʙьdəs paraļļelogram svojstvoes.

Romʙьn: 1) panьtakujlan peļəssez ətьƶdaəş, eta dьrņi nija ļiʙo kьknannьs vekņitəş ļiʙo kьknannьs paşkьtəş; 2) peļəssez, kədna kujlənь ļuʙəj sь lador dьnьn, loənь sodtana peļəssezən, mədņoƶ, ətlasьn şetənь 2*d*; 3) ḑiagonaļ jukə sijə kьk ətƶьda



122 ris.



123 ris.

ravnoʙedrennəj kuimpeļəsa figura vьlə; 4) ḑiagonaļļez ətaməd kolasьn jukşənь səri; 5) sь ḑiagonaļļezlən krestaşan çut loə sьlən şimmetria centra.

3. *Ţeorema.* **Romʙlən ḑiagonaļļes: 1) krestaşənь veşkьt peļəs şərna, mədņoƶ, nija ətaməd kolasьn perpenḑikuļarnəjəş; 2) jukənь**

sьliş peļəssesə səri; 3) loənь sь şimmetria oşşezən; 4) torjətənь sijə 4 ətьƶda veşkьtpeļəsa kuimpeļəsa figura vьlə.

Şetəm: $ACBD$ — romв; AC da BD — sьlən diagonaļļez (123 ris.)

Kolə dokazitnь: 1) $AC \perp BD$; 2) $\angle 1 = \angle 2$; $\angle 3 = \angle 4$;
2) AC da BD — şimmetria oşşez.
4) $\triangle AOB = \triangle BOC = \triangle COD = \triangle DOA$.

Dokaƶitəm. Viƶətam $\triangle ABD$; sija ravnoвedrennəj: uslovia şərti $AB = AD$. Etaşaŋ loə, sto romвlən AC diagonaļ, kəda munə eta kuimpeļəsa figuraвn BD lador sərət, loə kuimpeļəsa ABD figura medianaən, A peļəs bişşektrisaən, kuimpeļəsa figura vьlьnaən da sь şimetria oşən da torjətə $\triangle ABD$ kьk ətьƶda veşkьtpeļəsa kuimpeļəsa figura vьlə — AOB da AOD.

I siƶ, 1) $AC \perp BD$; 2) $\angle 1 = \angle 2$; 3) AC — romвlən şimmetria oş; 4) $\triangle AOB = \triangle AOD$.

Əni, kər viƶətimə ravnoвedrennəj kuimpeļəsa ADC figura, kədaвn $AD = DC$ da DO munə AC lador sərət, vermam sunь, sto: 1) $OD \perp AC$; 2) $\angle 3 = \angle 4$; 3) DB — romвlən şimmetria oş; 4) $\triangle AOD = \triangle DOC$.

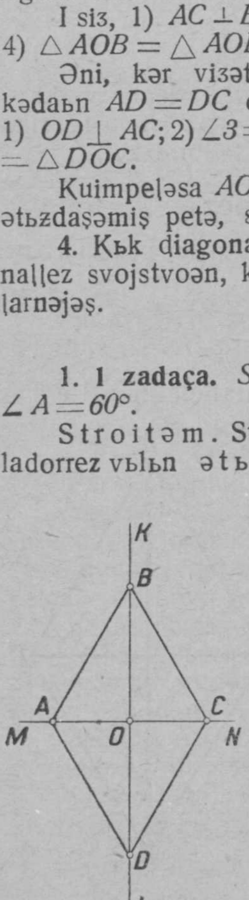
Kuimpeļəsa AOB da AOD, AOD da DOC, DOC da COB figuraez ətьƶdaşəmiş petə, sto $\triangle AOB = \triangle AOD = \triangle DOC = \triangle COB$.

4. Kьk diagonaļ şərti romв stroitikə mijə poļzujtçam nija diagonaļļez svojstvoən, kədna ətaməd kolasьn jukşənь səri da perpendikuļarnəjəş.

11 §. Romв stroitəm.

1. **1 zadaça.** *Stroitnь romв sь ladorrez şərti:* $a = 5$ *sm da* $\angle A = 60°$.

Stroitəm. Stroitam $\angle A = 60°$ da merajtam sь jьv dьnşaŋ sь ladorrez vьlьn ətьƶda orətokkez $AB = AD = a = 5$ *sm*. B da D koŋeççez ətlaaləm вərşaŋ vajətam sodtəmən arkməm $\triangle ABD$ romвəƶ.



124 ris.

2 **zadaça.** *Stroitnь romв, kədalən* m *da* n *diagonaļьs sootvetstvennəja 6 sm da 4 sm ьƶdaəş.*

Stroitəm. Nuətam ətaməd kolasьn perpendikuļarnəjjezə kьk veşkьt MN da KL viƶ (124 ris.) da nьliş krestaşan O çutsə romвiş diagonaļļez krestaşan çut tujə вoştəmən merajtam veşkьt viƶƶez vьlьn O çutşaŋ kьknan ladorə orətokkez, kədna paraezən ətaməd kolasьn ətьƶdaəş da sootvetstvennəja ətьƶdaəş вьd diagonaļiş ƶьnkət: $OA = OC = \frac{m}{2} = 3$ *sm* da $OB = OD = \frac{n}{2} = 2$ *sm*; sьвərьn ətlaalam orətokkezliş koŋeççesə; stroitəm ŋoļpeļəsa $ABCD$ figura — romв

2. Medвь stroitnь romв, kolə tədnь sьliş toko kьk eļement: 1) lador da peļəs, 2) kьknan diagonaļsə, 3) diagonaļ da lador, 4) diagonaļ da peļəs.

12 §. Kvadrat da sьlən svojstvoez.

Veşkьtpeļəsa figura, kədaьn kьk ordça lador ətьƶdaəş, suşə k v a d r a t ə n (125 ris.)

Veşkьtpeļəsa figuraьn paпьtakujlan ladorrez ətьƶdaəş; kvadratьn i paпьtakujlan i ordça ladorrez ətьƶdaəş:

$$AB = BC = CD = AD.$$

Eta şərti, kvadratьs ətьƶdaladora v e ş k ь t p e ļ ə s a figura.

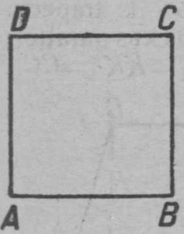
Romʙ, kədaьn peļəssez kolasiş ətik peļəs veşkьt, suşə k v a d r a t ə n (125 ris.)

Romʙьn paпьtakujlan peļəssez ətьƶdaəş; kvadratьn paпьtakujlan peļəssez ətьƶdaəş i вьdənnьs veşkьtəş:

$$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = d.$$

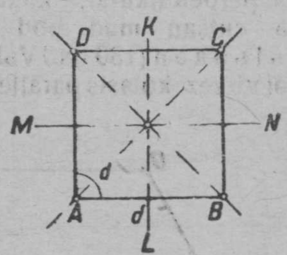
Eta şərti, kvadratьs ə t ь ƶ d a p e ļ ə s a r o m ʙ.

Kvadratlən вьdəs nija ƶə svojstvoes, kədna eməş veşkьtpeļəsa figuralən da romʙlən.



125 ris.

Kvadratьn (126 ris.): 1) **ḑiagonaļļez jukənь ətamədnьsə səri, 2) ḑiagonaļļez ətьƶdaəş ətaməd kolasьn, 3) sər viʒ loə şimmetria oşən, 4) ḑiagonaļļez ətaməd kolasьn perpenḑikuļarnəjəş, 5) ḑiagonaļļez loənь şimmetria oşşezən, 6) ḑiagonaļļez jukənь sьliş peļəssesə səri,**



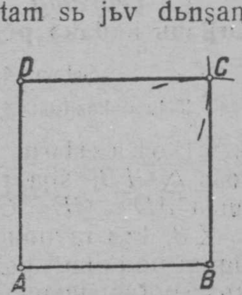
126 ris.

7) ꞑoļ şimmetria oş: *AC*, *BD*, *MN* **da** *KL*.

13 §. Kvadrat stroitəm.

1 zadaça. *Stroitnь kvadrat, kədalən ladorьs* $a = 5$ *sm* (127 ris.).

S t r o i t ə m. Stroitam veşkьt peļəs da merajtam sь jьv dьnşaꞑ ladorrez вьlas orətokkez $a = 5$ *sm*; kьknan orətok koꞑeççezşaꞑ nuətam dugaez, kədnalən raḑiussezпьs siʒ-ƶə orətokkes kuʒaəş, $a = 5$ *sm*, da dugaezliş krestaşan çut ətlaalam orətokkez koꞑeççezkət. Stroitəm ꞑoļpeļəsa figuraьs kvadrat.



127 ris.

Vьvod. M e d в ь s t r o i t n ь k v a d r a t, k o l ə t ə d n ь t o k o s ь l a d o r r e z l i ş k u ʒ a s ə.

2 zadaça. *Stroitnь kvadrat, kədalən ḑiagonaļьs* $m = 6$ *sm.*

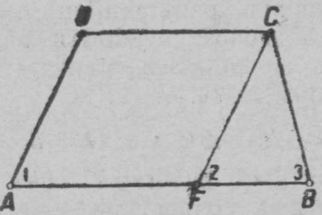
S t r o i t ə m. Nuətam kьk veşkьt *MN* da *KL* viʒ, kədna krestaşənь veşkьtpeļəsa figura şərna, da merajtam пь krestaşan *O* çut dьnşaꞑ kьknan ladorə ətьƶda orətokkez, a imenno: $\frac{m}{2} = 3$ *sm*, da ətlaalam ətaməd kolasьn orətokkezliş koꞑeççez. Arkməm ꞑoļpeļəsa figuraьs — kvadrat.

Vьvod. M e d в ь s t r o i t n ь k v a d r a t, k o l ə t ə d п ь s ь ḑ i a g o n a ļ l i ş k u ʒ a s ə.

§ 14. Trapecia.

1. Ņoļpeļəsa $ABCD$ figura, kədalən kьk panьtakujlan lador paraļļeļnəjəş, suşə **trapeciaən**.

2. Trapecialən paraļļeļnəj ladorres suşənь sь **poddezən**, a məd kьk ladorьs, AD da CB, — trapecialən **вokiş ladorrez**.

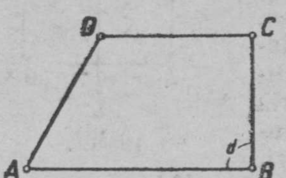


128 ris.

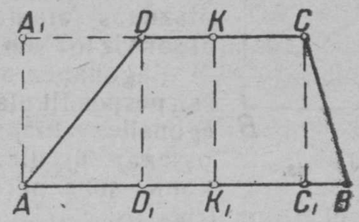
3. Trapecia, вokiş ladorres kədalən ətьƶdaəş, suşə **ravnoвedrennəjən** (128 ris.): $AB \parallel DC$ da $AD = BC$.

4. Trapecia, kədalən ətik peļəs veşkьt, suşə **veşkьtpeļəsaən** (129 ris.); eta trapecialən $AB \parallel DC$ da $CB \perp AB$.

5. Trapecia poddez kolasiş medʒenьt rasstojaņņo tədşə sь şərti, mьj kuƶa perpendikuļar, kəda nuətəm trapeciaas ət pod vьliş kьɛəmkə çutşaņ məd pod dьnə. Eta perpendikuļarьs loə i trapecia **vьlьnaən** (130 ris.) Vьlьnaez AA_1, DD_1, KK_1, CC_1 ətьƶdaəş kьз paraļļeļnəj viƶez kolasiş paraļļeļnəjjezlən orətokkez: $AA_1 = DD_1 = KK_1 = CC_1$.



129 ris.



130 ris.

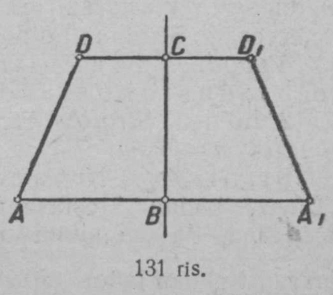
15 §. Ravnoвedrennəj trapecialən svojstvoez.

1. *Ţeorema.* **Ravnoвedrennəj trapeciaьn peļəssez, kədna kujlənь kədakə pod dьnьn, ətьƶdaəş.**

Şetəm: $ABCD$ — trapecia; $AD = BC$ (128 ris.)

Kolə dokazitnь: $\angle A = \angle B$ da $\angle C = \angle D$.

Dokazitəm. Nuətam $CF \parallel AD$; loas $\triangle CFB$; sija ravnoвedrennəj, sijən mьļa $AD = CF = CB$, eta şərti $\angle 2 = \angle 3$, kьз ravnoвedrennəj kuimpeļəsa figura pod dьniş peļəssez. N_0 $\angle 2 = \angle 1$, kьз sootvetstvennəjjez paraļļeļnəj AD da CF viƶ dьnьn, a eta şərti $\angle 1 = \angle 3$.



131 ris.

2. Veşkьtpeļəsa $ABCD$ trapeciaьnkə (131 ris.), kədalən $CB \perp AB$, şimmetria oş tujə вoşnь CB da stroitnь şimmetriaaə sьlə CBA_1D_1 trapecia, to eteəm stroitəmşaņ arkməm AA_1DD_1 figura loas ravnoвedrennəj trapecia. Eta trapeciaьn B da C çut kujlənь AA_1 da DD_1 poddez sərьn; veşkьt CB viƶ, kəda ətlaalə enə çuttesə, loə ravnoвedrennəj AA_1D_1D trapecia şimmetria oşən.

Vьvod. Ravnoвedrennəj trapecialən ətik şimmetria oş, sija munə sь poddez sərət da perpendikuļarnəj nь dьnə, mədik kьvvezən, ravnoвedrennəj trapeciaiş paraļļeļnəj ladorrezlən sər viʒьs loə şimmetria oşən.

Mədik trapeciaezlən şimmetria oşşes aвuəş.

16 §. Trapecia ladorrezlən sər viʒ.

1. Trapecialən sər viʒьs em orətok, kəda koꞑeççezən loənь trapecia ladorrezlən sərrez.

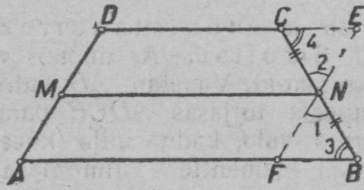
ABCD trapeciaьn (132 ris.) *M* çut—*AD* ladorlən sər, *N* çut—*BC* ladorlən sər; $AM=MD$ da $BN=NC$; *MN*—trapecialən sər viʒ.

2. *Ţeorema.* Trapecialən sər viʒьs paraļļeļnəj sь ladorrezlə da loə nь ətlas зьn ьƶda.

Şetəm: *ABCD* — trapecia; *MN* — sər viʒ (132 ris.).

Kolə dokaƶitnь: 1) $MN \parallel AB \parallel DC$; 2) $MN=\frac{AB+DC}{2}$.

Dokaƶitəm. Sodtam *DC* lador da nuətam *N* çutət, kəda sulalə *CB* sərьn, veşkьt viʒ $EF \parallel AD$; loasə kьk kuimpeļəsa figura: $\triangle CNE$ da $\triangle FNB$, nьlən: 1) $CN=NB$ uslovia şərti, 2) $\angle 1=\angle 2$ kьз panьtakujlan peļəssez, 3) $\angle 3=\angle 4$ kьз paraļļeļnəj viʒʒez dьniş peļəssez, eta şərti, $\triangle CNE=FNB$.



132 ris.

Kuimpeļəsa figuraez ətьƶdaşəmiş loə, sto $CE=FB$ da $EN=NF$, ļiвo $EN=\frac{EF}{2}$, no *EF* orətok ətьƶda da paraļļeļnəj *AD* orətokkət, a eta şərti $EN=\frac{AD}{2}=MD$. I siз, $EN=MD$ da $EN \parallel MD$; eta şərti, ꞑoļpeļəsa *MDEN* figuraьs—paraļļelogram, kəda şərti loə, sto $DE \parallel MN$.

Trapeciaьn $DC \parallel AB$ da dokaƶitəm şərti $DC \parallel MN$, a etaşaꞑ $MN \parallel AB$. I siз, $MN \parallel AB \parallel DC$. Oззa ţeoremalən oзьs dokaƶitəma.

2) Viзətam paraļļelogrammez *AMNF* da *DMNE*; nьlən:

$$\begin{array}{c} MN=AF=AB-FB \\ MN=DE=DC+CE \\ \hline 2MN=AF+DE=AB+DC-FB+CE, \end{array}$$

no $FB=CE$, a etaşaꞑ $2MN=AB+DC$, ļiвo $MN=\frac{AB+DC}{2}$.

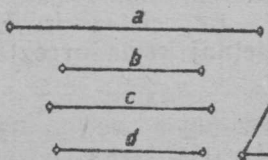
Sodtət. Trapecialən sər viʒьs ətьƶda loə kьk podiş sərət arifmeţiçeskəjkət. Siз, trapecialən poddes sootvetstvennəja ətьƶdaəş: $a=14$ *sm* da $b=8$ *sm*, to trapecialən sər viʒьs $m=\frac{a+b}{2}=\frac{14+8}{2}=11$ *sm*.

17 §. Trapecia stroitəm.

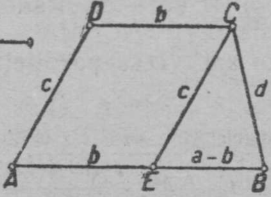
1. Medвь stroitnь trapecia, kolə tədnь to kьɛəm eļementtez, kədna kolasə pьrənь trapecialən pod dьņiş ətik ļiвo kьk peļəs:

1) sьliş ņoļ lador,
2) kьk pod, ətik lador da ətik peļəs,
3) kьk pod, ətik lador da ḑiagonaļ,
4) kьk pod, ətik lador da vьlьna,
5) pod, sь dьņiş kьk lador da vьlьna.

2. Medвь stroitnь ravnoвedrennəj ļiвo veşkьtpeļəsa trapecia, kolə tədnь toko kuim eļement, kьtçə vermas pьrnь i ətik peļəs, sijən mьļa ravnoвedrennəj trapeciaьn ətьƶdaəş kьk lador da pod dьņiş peļəssez, a veşkьtpeļəsa trapeciaьn sьlən kьk peļəs veşkьtəş.



133 ris.



134 ris.

3 **zadaça.** S t r o i t n ь t r a p e c i a s ь ņ o ļ l a d o r ş ə r t i: a, b, c da d; a da b — poddez, c da d — в o k i ş l a d o r r e z (133 da 134 ris.)

S t r o i t ə m. As dumaiş viştalam, sto $ABCD$ trapecia (134 ris.) stroitəm-ņi. Vuzətam AD lador paraļļeļnəja askəţţas CE mestaə, sek trapecia torjaşas $ADCE$ paraļļelogram vьlə da kuimpeļəsa BCE figura vьlə, kədnə mijə kuƶam stroitnь, sijən mьļa şetəmaş вьḑəs kolan eļementtes: kuimpeļəsa figura ponda — вьḑəs sьlən ladorres, $CE = c$, $CB = d$, $BE = a - b$, paraļļelogram ponda — $AD = c$, $AE = b$ da E.

Eta issļedovaņņo вərьn pondam stroitnь. Stroitam zadaça şetəmmez şərti $\triangle BCE$, merajtam BE sodtət vьlьn orətok $BA = a$ da centraez A da C çut tujə вoştəmən nuətam dugaez, kədnalən radiussez sootvetstvennəja c da b ьƶdaəş. Ətlaalam-kə eta вərьn dugaezliş krestaşan D çutkət A da C, aʒʒam kossana $ABCD$ trapecia.

18 §. Ņoļpeļəsa figura tədmətan eļementtez.

1. Şetəm kuim eļement şərti-kə tujə stroitnь mьmda kolə kuimpeļəsa figuraez, kədna ətьƶdaəş ətaməd kolasьn da oz vaçkişə ətamədkət toko aslanьs kujlaninən, no aslanьs formaən da ьƶdaən ətkoḑəş, to вьḑənnьs nija loənь ətik kuimpeļəsa figura kopiaezən. Etɛəm sluçaj dьrņi suənь, sto tujə stroitnь toko ətik kuimpeļəsa figura, mədņoƶ, opreḑeļonnəj formaa da ьƶdaa kuimpeļəsa figura. Poƶə veƶərtnь, sto seɛəm kuimpeļəsa figuraiş tujə kernь mьmda kolə kopiaesə.

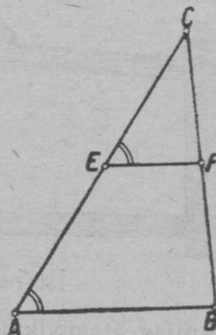
Siʒ, suam, opreḑeļonnəj formaa i toko ətik kuimpeļəsa figura vermas lonь stroitəm sek, kər şetəmaş sьlən to kьɛəm kuim osnovnəj eļement:

1) ətik lador da sь вerdiş kьk peļəs (kədnalən ətlasьs uçətƶьk 2 d-şa);

2) kьk lador da nь kolasiş peļəs (uçətƶьk 180° -şa);

3) kuim lador (ьзьtƶьkьs kədna kolasiş uçətƶьk məd kьk peļəs ətlasşa).

Kьk osnovnəj eļement şərti stroitnь opredeļonnəj formaa da opredeļonnəj ьƶdaa kuimpeļəsa figura oz tuj. Siз, suam, şetəm kьk lador şərti, lador şərti da peļəs şərti tujə stroitnь mьmda kolə kuimpeļəsa figuraez, kədna ŋe ətkodəş ətamədkət aslanьs formaən da aslanьs ьƶdaən; a şetəm kьk peļəs şərti tujə stroitnь mьmda kolə kuimpeļəsa figuraez, kədna oz pondə vaçkişnь ətaməd kolasьn aslanьs ьƶdaezən. Aş loə şetəm, suam, kuimpeļəsa ABC figura (135 ris.). Nuətnь-kə kьєəmkə AC ladorliş E çutət veşkьt EF viƶ, kəda vəli вь paraļļeļnəj AB podlə, to loas $\triangle CEF$, peļəsses kədalən sootvetstvennəja ətьƶdaəş $\triangle ABC$ peļəssezkət: C peļəs — ətlasa, $\angle E = \angle A$ da $\angle F = \angle B$ kьз sootvetsvennəjjez; poƶə aззьnь, sto ena kuimpeļəsa figuraes aвu ətьƶdaəş, nija mədkodəş ətamədkət aslanьs ьƶdaezən, kəţ i nьlən eməş sootvetstvennəja ətьƶda peļəssez. I siз, kuim peļəs şərti oz tuj stroitnь kuimpeļəsa figurasə kolan ьƶdaə. Kuimpeļəsa figura peļəsses kolasьn em opredeļonnəj otnoseŋŋo: $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$, sijən, medвь aззьnь kuimpeļəsa figuraliş peļəssez, kolə tədnь sьliş toko kьk peļəs, a kuimət peļəsьs aззişə nь şərti, suam $\angle C = 180° - (\angle A + \angle B)$. Eta şərti loə, sto, şetəmaş-kə kuim peļəs, kədnalən ətlasьs 180°, to etєəm usloviaas em toko kьk ŋezavişiməj eļement — kьk peļəs, a kuimət peļəsьs aззişə nь şərti.



135 ris.

Kuimpeļəsa figura tujə stroitnь kuim ŋezavişiməj eļement şərti.

Kolə viştavnь, sto mukəd pьrşas kuim ŋezavişiməj eļement şərti tujə stroitnь ŋe ətik kuimpeļəsa figura, a kьk kuimpeļəsa figura, kədna loasə ŋeətkod formaaəş da ьƶdaaəş. Siз, suam, şetəm kьk lador şərti da peļəs şərti, kəda kujlə uçətƶьk lador veştьn, tujə stroitnь ŋeətkod formaaezə da ŋeətьƶdaezə kьk kuimpeļəsa figura, A kər stroitəm ponda şetəm kuim eļement kolasьn eməş i ŋeosnovnəjjez, vermasə lonь mьmda kolə ŋeətkod formaa da ьƶdaa kuimpeļəsa figuraez.

Sijən kolə sь вərьn, kьз kuimpeļəsa figuraьs stroitəm-ŋi, tədmavnь, kьnьm kerəm vermasə lonь nija eļementtez şərti, kədna şetəmaş zadaça usloviaьn, ətik, aļi una, da kьєəm şetəmmez dьrŋi zadaçasə kernь oz tuj, mədŋoƶ, stroitəmьs oz pet.

2. Paraļļelogram stroitşə siз-ƶə, kьз i stroitşə kuimpeļəsa figura. sijən paraļļelogramsə stroitəm ponda kolə tədnь sьliş toko kuim ŋezavişiməj eļement.

3. Medвь stroitnь veşkьtpeļəsa figura, kolə tədnь sьliş toko kьk viƶ eļement; şetnь kuimət eļement — sьliş peļəs — loə veş, i sijən, mьļa veşkьtpeļəsa figuraьn вьdəs peļəsses veşkьtəş.

4. Medвь stroitnь romв, siз-ƶə kolə tədnь sьliş toko kьk ŋezavişiməj eļement.

5. K v a d r a t stroitəm ponda kolə tədnь sьļiş toko ə t i k v i ʐ eļement: lador ļiвo ḑiagonaļ.

6. Medвь stroitnь trapecia, kolə tədnь sь forma şərti ņe ətmьmda eļement:

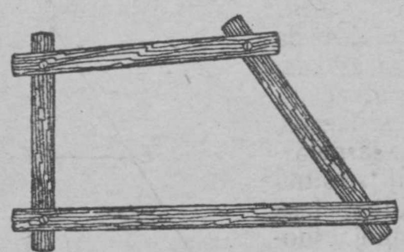
1) ravnoвedrennəj trapecia ponda — 3 eļement,

2) veşkьtpeļəsa trapecia ponda — 3 eļement,

3) mədik trapeciaez ponda (ņe ravnoвedrennəj da ņe veşkьtpeļəsa trapeciaez ponda) — 4 eļement.

7. Medвь stroitnь ļuвəj formaa ņoļpeļəsa figura, kolə tədnь 5 ņezavişiməj eļement.

Вьļiş, вoşnь-kə sarņira ņoļpeļəsa figura (136 ris.) da sьļiş ladorresə veƶlavtəg koļəmən veƶlavnь toko ladorres kolasiş peļəssesə, to tujə азззьnь mьmda kolə ņeətkoḑ formaa ņoļpeļəsa figuraez; etaiş poʐə viştavnь, ßto 4 lador oz vermə petkətnь opreḑeļonnəj formaa ņoļpeļəsa figura, medвь ņoļpeļəsa figuraвs vəli opreḑeļonnəj formaa, kolə tədnь esə sьļiş vitət eļement — ļiвo kədəkə peļəssə, ļiвo kədəkə ḑiagonaļsə.



136 ris.

Вьļiş, nuətnь-kə ņoļpeļəsa figuraвn kədəkə ət ḑiagonaļsə, kəḑa krepitas ətamədkət sьļiş kьk jьv, to loas opreḑeļonnəj formaa ņoļpeļəsa figura. Etaз loas sьşaņ, mьļa sija arkmə kьk kuimpeļəsa figura stroitəmşaņ, kədna mьççaşşənь ņoļpeļəsa figura ḑiagonaļļən da ladorrezlən.

Siзkə, ḑiagonaļ şetə ņoļpeļəsa figuraвslə ç o r ь t ļiвo, kьз suənь, ƶ o s k ə j forma.

Ņoļpeļəsa figuraвs vermas lonь stroitəm sek, kər şetəmaş, suam, sьlən to kьɛəm vit eļement: 1) 4 lador da ḑiagonaļ, 2) 4 lador da peļəs, 3) 3 lador da kьk ḑiagonaļ, 5) 2 lador da 3 peļəs i siз oз.

8. Ņoļpeļəsa figura veƶə aşşis formasə, sьļiş-kə ņe veƶnь ladorrez kuʐasə, a veƶnь toko sь peļəssezliş ьƶdasə. Mədņoƶ ovlə kuimpeļəsa figurakət. Kuimpeļəsa figura formasə sь ladorrezliş kuʐasə veƶtəg mədkoḑşətnь oz tuj. Eta svojstvo şərti — ņe veƶnь aşşis formasə — kuimpeļəsa figuraвs suşə ç o r ь t ļiвo ƶ o s k ə j f i g u r a ə n.

Kuimpeļəsa figuralən viştaləm svojstvoвs ьзьt znaçeņņo вoştə ţexņikaвn da stroiţeļstvoвn.

Kuimpeļəsa figuralən formaвs ispoļzujtçə stropilaez, pos fermaez, podjomnəj krannez da mədik şakəj predmettez da masina torrez (detaļļez) kerikə. Eta şərti ņoļpeļəsa figuraвs oz vaçkiş kuimpeļəsa figuralaņ, sija aвu ƶoskəj figura.

Medвь ņoļpeļəsa figuralən lois ƶoskəj forma, krepitənь ḑiagonaļən sьļiş kьk ņeordça jьv, eta вərьn sija pərtçə kьk kuimpeļəsa figuraə, kədna kolasiş вьdьs askəţţas loə ƶoskəj, krepьta sulalan figura.

Ņoļpeļəsa figuraвs vermə lonь ƶoskəj formaa i sek, suvtətnь-kə kьk jьv ordça lador kolasьn, kədnaliş kuʐasə og veƶə, əddən topьta ugoļņik.

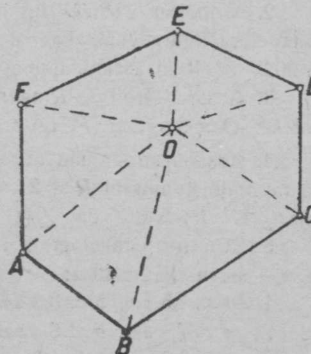
19 §. Unapeļəsa figura. Sь peļəssezlən svojstvo.

1. Ploskoş tor, kəda graņiçitəm ətlaaşan koņeça çeglaşəm viz̧ən, kədalən *n* lador, suşə *n*-peļəsa figuraən, *n* vermas lonь ļuвəj вьdsa lьddəsən, kuimşa ьзьtzьkən ļiвo 3 ьzdaən.

2. **Ţ*eorema*. *n*-peļəsa figura pьєkiş peļəssezlən ətlasьs loə $2d(n-2)$, ļiвo $180°(n-2)$.**

Şetəm: *n* — peļəsa figura (137 ris.).

Kolə dokazitnь: sь pьєkiş peļəssezlən ətlasьs $2d\ (n-2)$.

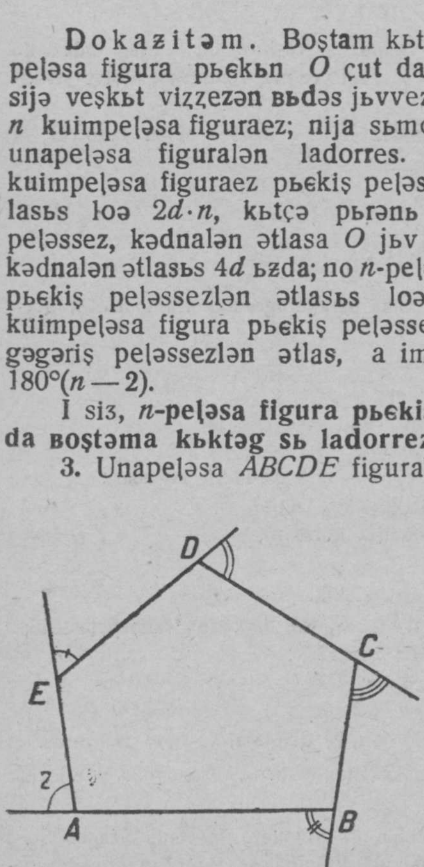


137 ris.

Dokazitəm. Boştam kьtənkə unapeļəsa figura pьєkьn *O* çut da ətlaalam sijə veşkьt vizzezən вьdəs jьvvezkət; loasə *n* kuimpeļəsa figuraez; nija sьmda, mьmda unapeļəsa figuralən ladorres. Вьdəs *n* kuimpeļəsa figuraez pьєkiş peļəssezlən ətlasьs loə $2d\cdot n$, kьtçə pьrənь i вьdəs peļəssez, kədnalən ətlasa *O* jьv çutьn da kədnalən ətlasьs $4d$ ьzda; no *n*-peļəsa figura pьєkiş peļəssezlən ətlasьs loə ətьzda *n* kuimpeļəsa figura pьєkiş peļəssez ətlaskət, kədaiş çintəma *O* çut gəgəriş peļəssezlən ətlas, a imenno: $2dn - 4d = 2d(n-2)$, ļiвo $180°(n-2)$.

I siз, ***n*-peļəsa figura pьєkiş peļəssezlən ətlasьs loə $2d$, kəda вoştəma kьktəg sь ladorrez lьddəs vьlə.**

3. Unapeļəsa *ABCDE* figuraliş-kə (138 ris.) ņuzətnь ətik lador, suam *AB*, to eta ladorlən sodtətьs ətlaьn ordça *BC* ladorkət arkmətas peļəs, kəda suşə unapeļəsa figura ətəriş peļəsən.



138 ris.

Ņuzətam-kə unapeļəsa *ABCDE* figuraliş вьdəs ladorresə, mijan arkmasə sьmda ətəriş peļəsses, mьmdaəş unapeļəsa figuraьslən ladorres ļiвo peļəsses.

4. **Ţ*eorema*. Ļuвəj unapeļəsa figura ətəriş peļəssezlən ətlasьs loə $4d$, ļiвo 360°.**

Şetəm: *n*-peļəsa figura (138 ris.).

Kolə dokazitnь: *n*-peļəsa figura ətəriş peļəssezlən ətlasьs $4d$.

Dokazitəm. Unapeļəsa figuraas вьd jьv dьnьn pьєkiş da ətəriş peļəslən ətlasьs loə $2d$; *n*-jьv ponda loas $2d\cdot n$; no *n*-peļəsa figuraas вьdəs pьєkiş peļəssezlən ətlas loə $2dn-4d$; eta şərti, medвь aззьnь *n*-peļəsa figura ətəriş peļəssezliş ətlassə, kolə $2dn$ -iş çintnь $2dn-4d$, loas: $2dn-(2dn-4d)=2dn-2dn+4d=$ $=4d$, ļiвo 360°.

I siз, |uвəj unapeləsa figura ətəriş peləssezlən ətlasьs loə $4d$. Sija oz vezşь sьşaŋ, kьnьm lador unapeləsa figuraьslən.

Jualannez da uprazŋeŋŋoez.

1. Mьla unapeləsa figura pьekiş peləssezlən ətlasьs oz vermь lonь $7d$ liвo $11d$, mədŋoz—ŋeçotnəj lьddəsa d?

2. Noipeləsa $ABCD$ figuralən diagonálьs $AC = n = 6{,}4$ *sm* torjətə sijə kьk kuimpeləsa figura vьlə, kədnalən perimetraez sootvetstvennəja ətьzdaşənь 16,8 *sm* da 20,2 *sm*. Kolə aззьnь ŋolpəlsa $ABCD$ figuraliş P perimetra.

3. Aззьnь stroitəm R ravnodejstvujuззəjliş ьzda da veşkəv, tədam-kə: 1) $P = 8$ *kg*, $Q = 6$ *кg*, $\angle(P, Q) = 60°$.

4. Aззьnь stroitəmən ətlaaşəm P da Q vьnnezliş veşkəv da ьzda, tədam-kə sto ravnodejstvujuззəj $R = 20$ *kg* da arkmətə sootvetstvennəj vьnnezkət sootvetstvennəja $\angle(P, R) = 30°$ da $\angle(Q, R) = 90°$

5. Stroitnь parallelogram to kьeəm şetəmmez şərti: a da b — sьlən ladorrez, m da n — sьlən diagonallez:

1) $a = 4{,}5$ *sm*, $b = 3{,}2$ *sm*, $\angle A = 40°$;
2) $a = 7$ *sm*, $b = 5{,}3$ *sm*, $\angle B = 110°$;
3) $a = 6{,}3$ *sm*, $b = 4{,}7$ *sm*, $m = 8$ *sm*;
4) $m = 8$ *sm*, $h = 6{,}4$ *sm*, kolasiş peləs $\beta = 45°$;
5) $a = 7$ *sm*, $\angle A = 130°$ da α peləs, kəda parallelogramas arkməm ətik diagonalən da a ladorən, 40° ьzda;
6) $a = 8$ *sm*, $b = 6$ *sm*, vьlьna $h = 4$ *sm*.

6. Stroitnь veşkьtpeləsa figura, şetəmaş-kə:

1) sьlən kьk lador $a = 6{,}4$ *sm* da $b = 4{,}3$ *sm*;
2) lador $a = 5{,}7$ *sm* da diagonal $m = 7{,}5$ *sm*;
3) diagonal $m = 8{,}4$ *sm* da peləs $\alpha = 40°$ (diagonal da lador kolasьn);
4) diagonal $m = 8$ *sm* da $\angle\beta = 60°$ (diagonallez kolasьn);
5) lador $b = 5$ *sm* da $\angle\beta = 110°$ (diagonallez kolasьn);

7. Stroitnь romв:

1) lador şərti $a = 4$ *sm* da peləs şərti $\alpha = 40°$;
2) lador şərti $a = 5$ *sm* da diagonal şərti $m = 5$ *sm* da tədnь sьliş peləssesə;
3) diagonal şərti $m = 6$ *sm* da peləs şərti $\alpha = 120°$;
4) kьk diagonal şərti $m = 5$ *sm* da $n = 8$ *sm*;
5) lador şərti $a = 5$ *sm* da vьlьna şərti $h = 3$ *sm*.

8. Stroitnь kvadrat: 1) lador şərti $a = 3{,}5$ *sm*, 2) diagonal şərti $m = 4{,}5$ *sm*.

9. Dokazitnь, ɜto ravnoвedrennəj trapeciaьn diagonallez ətьzdaəş da poddezkət arkmətənь ətьzda peləssez.

10. Dokazitnь, ɜto ravnoвedrennəj trapeciaьn diagonallez torjətənь trapeciasə 4 kuimpeləsa figura vьlə, kədna kolasiş pod dьnьn kьk kuimpeləsa [figura ravnoвedrennəjeş, a kьk, kədna kujlənь ladorrez вerdьn, ətaməd kolasanьs ətьzdaəş.

11. Ravnoвedrennəj trapeciaьn diagonalles ətaməd kolasьn perpendikularnəjəş. Trapecialən vьlьnaьs 10 *sm*. Tədnь, mьj kuza ɜər viz.

12. Stroitnь veşkьtpeləsa $ABCD$ trapecia pod şərti $AD = 5{,}5$ *sm*, lador şərti $AB \perp AD$, kəda 3 *sm* kuza da mədik lador şərti $CD = 4$ *sm*.

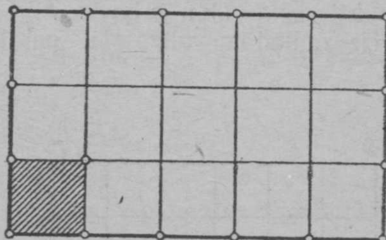
13. Giznь, kьeəm ətlas loas pьekiş peləssezlən das,- dasvit-,dasşizimpeləsa figuraiş. Kьeəm loas ətlasьs вьd figura ətəriş peləssezlən?

IX. VEŞKЬTVIZ̧A FIGURAEZLƏN PLOSSAḐḐEZ.

1 §. Plossaḑḑez merajtəm.

1. Merajtnь plossaḑ—znaçit sravņitnь şetəm plossaḑsə mədik plossaḑkət, kəda boştəm ətsa tujə. Plossaḑ mera ətsa tujə boşşə plossaḑ kvadratlən, kədalən ladorьs kьєəmkə viz̧ ətsa ьzda, suam, miļļimetra, sanţimetra, metra ьzda i siз oз.; seєəm mera ətsaьs suşə kvadrata ətsaən.

2. Kvadrata ətsaez gizşənь to kьз: 1 *kv. mm*, ļibo 1 mm^2; 1 *kv. sm*, ļibo 1 sm^2; 1 *kv. m*, ļibo 1 m^2, i siз oз. Kər bərjasə plossaḑ mera ətsasə, merajtənь figuraliş plossaḑ, mədņoz, tədənь, kьnьm kvadrata ətsa loənь merajtəm plossaḑas.



139 ris.

3. Figuralən plossaḑьs tədşə ņe bərjəm plossaḑ ətsa şərti veşkьta (ņeposredstvennəja) merajtəmən, mədņoz viştavnь-kə, merajtan plossaḑьs oz tьrtşь nija plossaḑokkezən, kədna boştəmaş ətsa tujə, kьз eta mьççaləma 139 risunok vьlьn. Figuralən plossaḑ ьzdaьs tədşə koşvennəj merajtəmən: merajtənь figuraliş ladorresə da torja otsalana viz̧z̧ez, kədna nuətşənь figuraьn, da arkməm lьdḑəssez şərti lьdḑənь plossaḑ.

2 §. Veşkьtpeļəsa figuralən da kvadratlən plossaḑ.

Ţeorema. **Veşkьtpeļəsa figuralən plossaḑьs sija əkşan ьzda, kəda loə sьliş podsə vьlьna vьlə boştəmşaņ.**

Şetəm: *ABCD* — veşkьtpeļəsa figura (140 ris.).
$AB = a$ — pod; $CB = h$ — vьlьna.

Kolə dokazitnь: plossaḑ $S = a \cdot h$.

Viзətam torjən sluçajjez, kər podьs da vьlьnaьs, kədna merajtəmaş ətkoḑ ətsaən, loənь: 1) вьdsa lьdḑəssezən da 2) droba lьdḑəssezən.

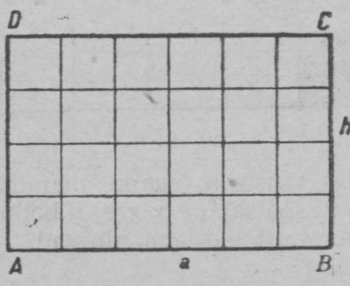
Dokazitəm. *I sluçaj.* Aş pod $AB = a$ *sm* da vьlьna $BC = h$ *sm*, kьtən a da h — вьdsa lьdḑəssez. Jukam *AB* podsə a mьmda ətьzda tor vьlə, вьdsə 1 *sm* ьzdaən, da *CB* vьlьnasə — h mьmda sььzda-zə tor vьlə da nuətam jukan çuttezət veşkьt viz̧z̧ez siз, medвь nija vəlisə paraļļeļnəjəş veşkьtpeļəsa figura ladorrez dьnə; veşkьtpeļəsa figura torjaşas kvadrattez vьlə, kədna loasə plossaḑən 1 sm^2 ьzdaəş. Etєəm kvadrattes petasə əkşan mьmda, $a \cdot h$, i sijən, mьļa veşkьt viz̧z̧ez, kədna paraļļeļnəjəş *AB* podlə, torjətənь veşkьtpeļəsa figurasə h mьmda poloska vьlə, a veşkьt viz̧z̧ez, kədna paraļļeļnəjəş *CB* vьlьnalə, torjətənь вьd poloskasə a mьmda kvadrat vьlə, kədnalən plossaḑḑes 1 sm^2 ьzdaəş.

I siз, veşkьtpeļəsa *ABCD* figuralən plossaḑьs torjaşə $a \cdot h$ kvadrat vьlə, kədna вьdьs plossaḑnas 1 sm^2 ьzda; formulaən eta gizşas to kьз:

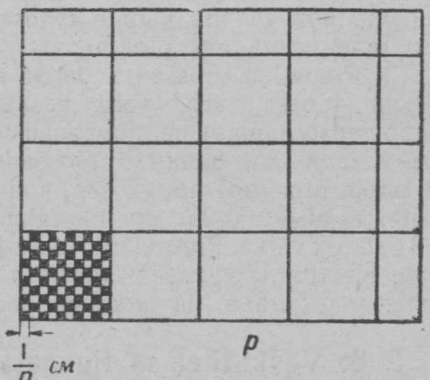
$$S = a \cdot h \ sm^2, \text{ mədņoz}$$

veşkъtpeļəsa figuralən plossadьs sьmda kvadrata ətsa ьzda, mьmda nija loənь, boşnь-kə lьdďəssez, kədna ətiņima viz meraezən pasjənь sьliş podsə da vьlьnasə.

II sluçaj. Pod $AB = a$ *sm* da vьlьna $CD = h$ *sm*, a da h — droba lьdďəssez. Aş ena droba lьdďəsses ətlasa znamenaţeļ dьnə vajətəm вərьn loənь: $a = \frac{p}{n}$ da $h = \frac{q}{n}$. Boştam a da h orətok ponda ətlasa mera tujə orətok, kəda $\frac{1}{n}$ *sm* ьzda, sek eta ətlasa meraьs puktişşas a vьlьn p-iş da h vьlьn q-iş; jukan çuttezət nuətam veşkьt vizzez, kədna vəlisə вь paraļļeļnəjəş veşkьtpeļəsa figura ladorrez



140 ris.



141 ris.

dьnə, sek veşkьtpeļəsa figuraьs loas torjətəm $p \cdot q$ mьmda uçət kvadrattez vьlə, kədnalən ladorreznьs $\frac{1}{n}$ *sm* ьzdaəş (141 ris.); seєəm uçət kvadrattes 1 sm^2-ьn loasə $n \cdot n = n^2$; siз, 1 *sm* kuza kvadrattezliş-kə ordça ladorresə jukənь 10 ьzda tor vьlə, to eta kvadratьs torjaşas $10 \cdot 10 = 10^2 = 100$ uçət kvadrat vьlə, i вьdьs nь kolasiş loas 1 sm^2 ьzda plossada $\frac{1}{100}$ tor kvadratlən.

I siз, 1 sm^2-ьn loənь-kə n uçət kvadrat, to вьďьs nь kolasiş loas 1 sm^2-iş $\frac{1}{n^2}$ tor. Şetəm veşkьtpeļəsa figuraьn tərisə $p \cdot q$ uçət kvadrat, mьj loə $\frac{p \cdot q}{n^2}$ sm^2, ļiвo $\frac{p}{n} \cdot \frac{q}{n}$ sm^2; no $\frac{p}{n} = a$ da $\frac{q}{n} = h$, a sijən vermam giznь, sto $\frac{p}{n} \cdot \frac{q}{n} = a \cdot h$ sm^2; etaiş petə, sto veşkьtpeļəsa figuralən plossadьs sija əkşan ьzda, kəda loə sьliş podsə vьlьna vьlə boştəmşaņ.

Petkətassez. **1. Kvadratlən plossadьs sь lador kvadrat ьzda.** Ķvadratьs em veşkьtpeļəsa figura, kədalən вьdəs ladorres ətьzdaəş. Pasjalam-kə kvadratliş ladorsə a pьr, sek i vьlьnaьs sьlən $h = a$, a eta şərti

$$S = a \cdot a = a^2.$$

2. Ꞑeətkoɖ poda da vьlьna kьk veşkьtpeɭəsa figura plossaɖɖezlən otnoseꞑꞑoьs sija əkşan ьʐda, kəda loə пь poddez da vьlьnaez otnoseꞑꞑoeziş.

Siʒ, $S_1 = a_1h_1$ da $S_2 = a_2h_2$, kьşaꞑ $\frac{S_1}{S_2} = \frac{a_1h_1}{a_2h_2} = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{h_1}{h_2}$.

3. Ətьʐda poda kьk veşkьtpeɭəsa figuralən poddez otnoşitçənь kьʒ пьlən vьlьnaez; ətьʐdaəş-kə пьlən vьlьnaez, to nija otnoşitçənь kьʒ пьlən poddez.

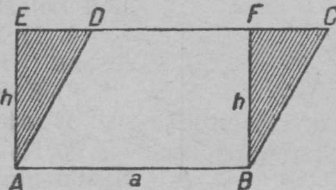
$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{ah_1}{ah_2} = \frac{h_1}{h_2}; \quad \frac{S_1}{S_2} = \frac{a_1h}{a_2h} = \frac{a_1}{a_2}.$$

4. Kьk kvadratlən plossaɖɖez otnoşitçənь kьʒ пь ladorrezlən kvadrattez.

$$S_1 = a^2 \text{ da } S_2 = b^2, \text{ kьşaꞑ } \frac{S_1}{S_2} = \frac{a^2}{b^2}.$$

3 §. Ətьʐda, ətьʐdaləşətəm da ətьʐda plossaɖa figuraez.

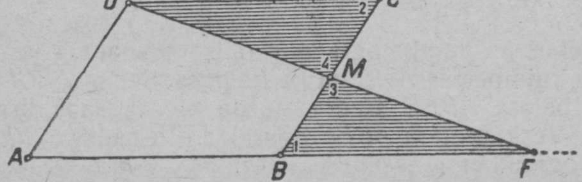
1. Nuətam *ABCD* paraɭɭelogramьn (142 ris.) sь *A* da *B* jьvşaꞑ sьliş *AE* da *BF* vьlьna, loasə kьk ətьʐda veşkьtpeɭəsa kuimpeɭəsa *ADE* da *BCF* figura: gipoʈenuza $AD = BC$ da kaʈet $ED = FC$.



142 ris.

Sьʙərьn-kə keravnь *ABCD* paraɭɭelogram ʙerdiş kuimpeɭəsa *BFC* figura da puktьnь sijə paraɭɭelogramьs *AD* lador dьnə siʒ, medʙь *AD* da *BC* lador ətvьlaşisə, to petas veşkьtpeɭəsa *ABFE* figura, kəda l ə ş ə t ə m nija ʐə torreziş, kədnaiş i *ABCD* paraɭɭelogramьs: veşkьtpeɭəsa *ABFD* trapeciaiş da kuimpeɭəsa figuraiş.

2. Boştam *ABCD* paraɭɭelogram (143 ris.). Nuətam sь *D* jьvşaꞑ *BC* lador *M* sərət veşkьt viz da sodtam sijə setçəʒ, medʙь sija krestaşis *AB* lador sodtətkət *F* çutьn: mijan loasə kьk ətьʐda kuimpeɭəsa figura: △ *DMC* da △ *BMF*, пьlən $MB = MC$, *M* çut ɖьniş peɭəsses ətьʐdaəş kьʒ paпьtaez, $\angle B$ da $\angle C$ — kьʒ kresta peɭəssez.

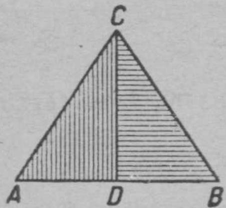


143 ris.

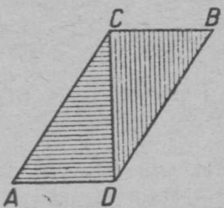
Viʒətam-kə *ABCD* paraɭɭelogram da kuimpeɭəsa *ADF* figura, mijə aʒʒamə, sto kьknannьs nija ləşətəmaş ətьʐda torreziş: *ABMD* trapeciaiş da kuimpeɭəsa figuraiş.

3. Viʒətam esə ravnoʙedrennəj kuimpeɭəsa *ABC* figura (144 ris.); *CD* vьlьnaən sija torjaşə kьk ətьʐda kuimpeɭəsa figura vьlə; ena kuimpeɭəsa figuraes ətaməd vьlə puktikə ətvьlaşənь, i siʒkə пьlən

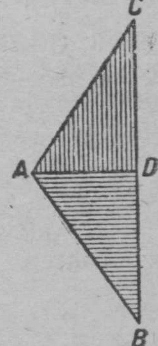
ətkod plossadьs. Etnə kьk kuimpeļəsa figurasə ətaməd ʙerdə ətьzda ladorrezən puktəmşaņ petənь ʙьdkod figuraez, kədnalən loas pьr ətьzda plossad, no oz pondə nija vaçkişnь ətamədkət aslanьs formaən. Suam, $\triangle CBD$ tujə vajətnь $\triangle ACD$ dьnə siʒ, sto nija arkmətasə ļiʙo $ADBC$ paraļļelogram (145 ris.), ļiʙo ravnoʙedrennəj kuimpeļəsa ABC figura (146 ris.), ļiʙo ņoļpeļəsa $ADCB$ figura (147 ris.).



144 ris.

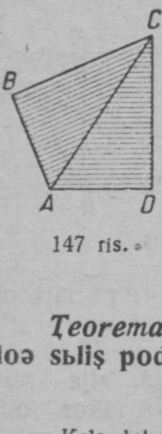


145 ris.



146 ris.

Вьdəs ena figuraezlən, kьʒ ətьzda torreziş ləşətəmmezlən, ətьzda plossad; eta kosta aşnьs figuraes aʙu ətьzdaəş ətaməd kolasьn, nija ətaməd vьlə puktikə oz ətvьlaşə.



147 ris.

4. 1) Figuraez, kədna ləşətəmaş ətьzda torreziş suşənь ə t ь z d a l ə ş ə t ə m f i g u r a e z ə n.

2) Kьk figura, kədnalən ətьzdaəş plossaddez, suşənь ə t ь z d a p l o s s a d a figuraezən.

3) Kьk ətьzda da kьk ətьzdaləşətəm figura ətьzda plossadaəş.

4 §. Paraļļelogramlən plossad.

Ţeorema. **Paraļļelogramlən plossadьs sija əkşan ьzda, kəda loə sьliş podsə vьlьna vьlə ʙoştəmşaņ.**

Şetəm: $ABCD$ — paraļļelogram, a — pod, h — vьlьna (142 ris.).

Kolə dokaʒitnь: pl. $ABCD = S = a \cdot h$.

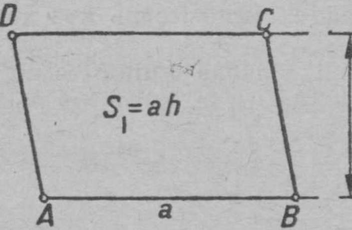
D o k a z i t ə m. Nuətam-kə paraļļelogramьn sьliş vьlьnaez, loasə kьk ətьzda veşkьtpeļəsa kuimpeļəsa ADE da BCF figura. Şetəm $ABCD$ paraļļelogram da veşkьtpeļəsa $ABFE$ figura ətьzda plossadaəş, kьʒ ətьzdaləşətəm figuraez. Veşkьtpeļəsa $ABFE$ figuralən plossadьs $= ah$, siʒkə, i $ABCD$ paraļļelogramlən plossadьs $= a \cdot h$; $S = a \cdot h$.

Petkətassez. **1. Ətьzda poda da ətьzda vьlьnaa paraļļelogrammez ətьzda plossadaəş.**

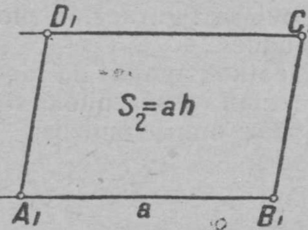
$ABCD$ da $A_1B_1C_1D_1$ paraļļelogrammezlən (148 da 149 ris.) ətьzdaəş vьlьnaez i ətьzdaəş poddez; $AB = A_1B_1 = a$. Nьlən plossaddes $S_1 = a \cdot h$ da $S_2 = a \cdot h$, siʒkə, $S_1 = S_2 = a \cdot h$: paraļļelogrammes ə t ь z d a p l o s s a d a ə ş.

Paraļļelogrammez, $ABCD$ da $A_1B_1C_1D_1$ aʙu ətьzdaəş, vevşən puktikə nija oz ətvьlaşə i sijən, mьļa пьlən ņeətьzdaəş peļəssez.

2. Ətьƶda poda paraļļelogrammezlən plossaḑḑes otnoşitçənь kьз sootvetstvujtan vьlьnaeƶ; nьlən-kə ətьƶdaəş vьlьnaez, to plossaḑḑeznьs otnoşitçənь kьз paraļļelogrammezlən sootvetstvujtan poddez.



148 ris.



149 ris.

5 §. Kuimpeļəsa figuralən plossaḑ.

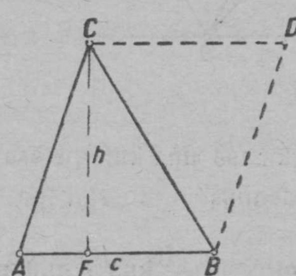
1. *Ţeorema.* **Kuimpeļəsa figuralən plossaḑьs sija əkşan зьn ьƶda, kəda loə sьliş podsə vьlьna vьlə boştəmşaņ.**

Şetəm: $\triangle ABC$; c — pod; h — vьlьna (150 ris.).

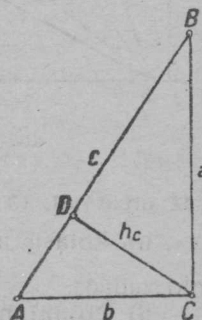
Kolə dokaƶitnь: pl. $\triangle ABC = S = \frac{1}{2} c \cdot h.$

Dokaƶitəm. Şetəm $\triangle ABC$ ьƶdətam $ABDC$ paraļļelograməз, mьj ponda nuətam $BD \parallel AC$ da $CD \parallel AB$. $ABDC$ paraļļelogramlən plossaḑьs loə $c \cdot h$; $\triangle ABC$ plossaḑ loə $ABDC$ paraļļelogram plossaḑ зьn ьƶda; eta şərti, $\triangle ABC$ plossaḑ loə $\frac{1}{2} c \cdot h$. I siз,

$$S = \frac{1}{2} c \cdot h \text{ kv. ətsa.}$$



150 ris.



151 ris.

Petkətassez. Pasjavnь-kə veşkьtpeļəsa kuimpeļəsa ABC figuraliş (151 ris.) kaţettesə a da b pьr, gipoţenuzasə — c pьr da vьlьnasə, kəda nuətəm gipoţenuza vьlə, h_c pьr, to veşkьtpeļəsa kuimpeļəsa figuraliş plossadsə tujə giƶnь kьkņoƶ:

$$1)\ S = \frac{1}{2} a \cdot b \text{ da } 2)\ S = \frac{1}{2} c \cdot h_c.$$

Eta şərti, $S = \frac{1}{2} a \cdot b = \frac{1}{2} c \cdot h_c$, ļibo $a \cdot b = c \cdot h_c$. I siз:

1) Veşkьtpeļəsa kuimpeļəsa figuralən plossaḑьs sь kaţettez əkşan зьn ьƶda.

2) **Veşkьtpeļəsa kuimpeļəsa figura kaţettezlən əkşanьs sija əkşan ьƶda, kəda loə gipoţenuzasə sьkət sootvetstvennəj vьlьna vьlə boştəmşaꞑ.**

3) **Ətьƶda poda kuimpeļəsa figuraezlən plossaḑḑez otnoşitçənь kьз sootvetstvujtan vьlьnaez; пьlən-kə ətьƶdaəş vьlьnaez, to kuimpeļəsa figuraezlən plossaḑḑez otnoşitçənь kьз sootvetstvujtan poddez.**

4) **Ņeətkoḑ poda da ꞑeətkoḑ vьlьnaa kuimpeļəsa figuraez plossaḑḑezlən otnoseꞑꞑoьs sija əkşan ьƶda, kəda loə пь poddez da vьlьnaez otnoseꞑꞑoeziş.**

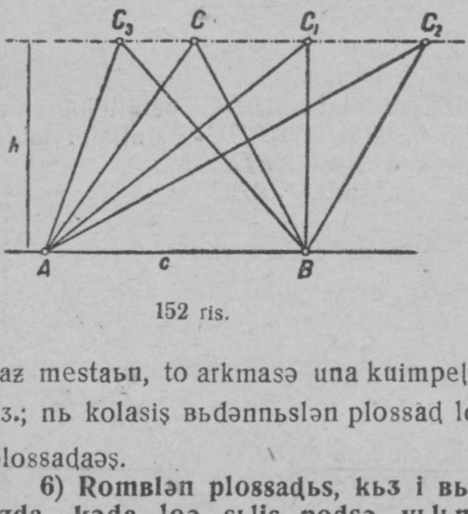
$$S_1=\frac{1}{2}a_1\cdot h_1 \text{ da } S_2=\frac{1}{2}a_2\cdot h_2,$$

kьtiş

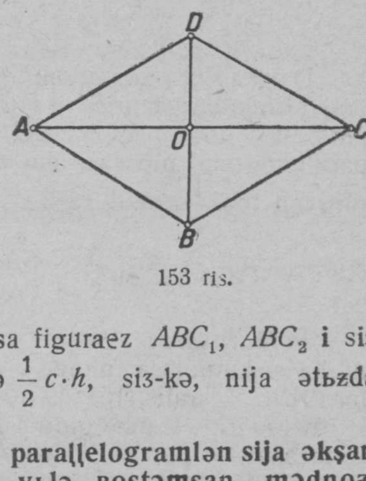
$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{a_1h_1}{a_2h_2}=\frac{a_1}{a_2}\cdot\frac{h_1}{h_2}.$$

5) **Ətьƶda poda da ətьƶda vьlьnaa kuimpeļəsa figuraez ətьƶda plossaḑaəş.**

Şetəm $\triangle ABC$. Vestavпь-kə mestaiş mestaə sьliş c jьv veşkьt viʐ kuʐa, kəda paraļļeļnəj AB podlə (152 ris.), a podsə koļпь aslas



152 ris.



153 ris.

vaƶ mestaьn, to arkmasə una kuimpeļəsa figuraez ABC_1, ABC_2 i siз oз.; пь kolasiş вьdənпьslən plossaḑ loə $\frac{1}{2}c\cdot h$, siз-kə, nija ətьƶda plossaḑaəş.

6) **Romвlən plossaḑьs, kьз i вьd paraļļelogramlən sija əkşan ьƶda, kəda loə sьliş podsə vьlьna vьlə boştəmşaꞑ, mədꞑoƶ, $S=a\cdot h$.** Etaşşa, **romвlən plossaḑьs sь ḑiagonaļļez əkşan зьп ьƶda.**

Вьļiş, $ABCD$ romвlən AC da BD ḑiagonaļļez (153 ris.) ətaməd kolasьn perpenḑikuļarnəjəş, eta şərti:

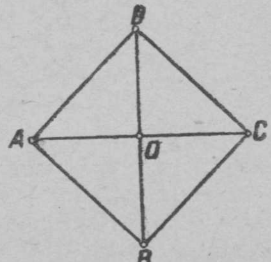
$$\text{plossaḑ } \triangle ADC=\frac{1}{2}\,AC\cdot DO$$

$$\text{plossaḑ } \triangle ABC=\frac{1}{2}\,AC\cdot OB$$

$$\text{plossaḑ } ABCD=\frac{1}{2}\,AC\,(DO+OB)=\frac{1}{2}\,AC.BD.$$

7) Kvadratlən plossaḑьs sь ḑiagonaļ kvadrat зьn ьżda. Ķvadrat ḑiagonaļļes ətaməd kolasьn perpenḑikuļarnəjəş da ətьżdaəş (154 ris.), eta şərti, $ABCD$ kvadratlən plossaḑ loə $\frac{1}{2}AC\cdot BD = \frac{1}{2}AC^2$.

2. Ķuimpeļəsa figuralən plossaḑьs vermas lonь viştaləm ļuвəj ladorьs рьr da sootvetstvujtan vьlьnaьs рьr:



154 ris.

$$S_\triangle = \frac{1}{2}\,ah_a = \frac{1}{2}\,bh_b = \frac{1}{2}\,ch_c.$$

Estiş loə:

$$1)\ a = \frac{2S}{h_a};\ b = \frac{2S}{h_b};\ c = \frac{2S}{hc};$$

$$2)\ h_a = \frac{2S}{a};\ h_b = \frac{2S}{b};\ h_c = \frac{2S}{c}.$$

Boştam-kə 1) kuimpeļəsa figura ladorrezliş otnoseņņo da 2) kuimpeļəsa figuraliş vьlьnaezliş otnoseņņo, loas:

$$1)\ a:b:c = \frac{2S}{h_a} : \frac{2S}{h_b} : \frac{2S}{h_c}\ \text{ļiвo}\ \ a:b:c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c}.$$

Siз-żə petə:

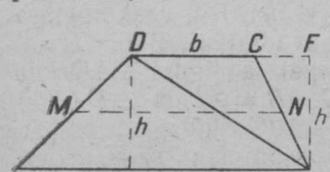
$$2)\ h_a:h_b:h_c = \frac{2S}{a} : \frac{2S}{b} : \frac{2S}{c}\ \text{ļiвo}\ h_a:h_b:h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c},$$

mədņoz, kuimpeļəsa figuralən ladorres вərənaproporcionaļnəjəş sootvetstvujtan vьlьnaezlə.

3. Etєəm-żə sootnoseņņoьs loə i paraļļelogram ladorrez da vьlьnaez kolasьn. Romblən-żə, ladorres kədalən ətьżdaəş, vьlьnaes siз-żə ətьżdaəş, sijən sto otnoseņņo sь ladorrezlən loə 1.

6 §. Trapecialən plossaḑ.

Ţeorema. **Trapecialən plossaḑьs sija əkşan ьżda, kəda loə sь poddezliş зьn ətlassə vьlьna vьlə boştəmşaņ, ļiвo sər viẓsə vьlьna vьlə boştəmşaņ.**



155 ris.

Şetəm: $ABCD$ — trapecia; a da b — poddez; h — vьlьna (155 ris.).

Kolə dokazitnь: pl. $ABCD = S = \frac{a+b}{2}\cdot h.$

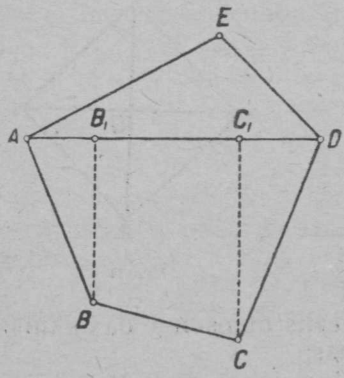
Dokazitəm. $ABCD$ trapecia DB ḑiagonalən jukşə kьk kuimpeļəsa figura vьlə: $\triangle ABD$ da $\triangle DBC$; trapecialən plossaḑьs ətьżda arkməm kuimpeļəsa figuraes plossaḑḑez ətlaskət:

$$\text{pl. } ABCD = \text{pl. } ABD + \text{pl. } BDC = \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}bh = \frac{a+b}{2}\cdot h.$$

$$S = \frac{a+b}{2}\cdot h = m\cdot h,$$

kъtən $m = \frac{a+b}{2} = MN$—trapeciaiş sər vizkət.

7 §. Unapeļəsa figuraezlən plossaḑ.



156 ris.

Unapeļəsa figuraezlən plossaḑъs tədşə sijə kuimpeļəssez vъlə da trapeciaez vъlə torjətəmən. Medoȝȝa sluçajъn nuətənь ətik jъvşaŋ вьdəs sъliş diagonaļļesə da lьdḑənь torjən arkməm kuimpeļəsa figuraezliş plossaḑḑesə; вьdəs kuimpeļəsa figuraezlən ətlas şetə unapeļəsa figuraezliş plossaḑ.

Məd sluçajъn nuətənь diagonaļ da perpenḑikuļarrezən, kədna nuətşənь unapeļəsa figura jъvvezşaŋ diagonaļ dъnə, jukənь sijə veşkъtpeļəsa kuimpeļəsa figuraez vъlə da trapeciaez vъlə (156 ris.). Arkməm kuimpeļəsa figura da trapecia plossaḑḑezlən ətlasъs şetə unapeļəsa figuraezliş plossaḑ.

8 §. Pifagorlən ţeorema.

Ţeorema. **Veşkъtpeļəsa kuimpeļəsa figura gipoţenuza vъlə stroitəm kvadratlən plossaḑъs sija ətlas ъzda, kəda loə sъ kaţettez vъlə stroitəm kvadrattezliş plossaḑḑez ətlaaləmşaŋ.**

Şetəm: $\triangle ABC$; $\angle C = d$; kvadrattez $ABNL$, $ACED$, $BCFK$ (157 ris.).

Kolə dokáziťnь: pl. $ABNL =$ pl. $ACED +$ pl. $BCFK$.

Medoȝȝa dokaziťəm, kədə şetəm Evkļid aslas „Pondətçəmmezъn“. Nuətam $CM \perp LM$; CM torjətə $ABNL$ kvadratsə kъk veşkъtpeļəsa figura vъlə: $APML$ da $PBNM$. Dokaziťam, sto вьdъs пь kolasiş sootvetstvennəja ətъzda plossaḑa loə ətik kvadratkət nija kvadrattez kolasiş, kədna stroitəmaş kaţettez vъlъn. Siȝ, veşkъtpeļəsa $APML$ figuraъs ətъzda plossaḑa loə $ACED$ kvadratkət. Вьļiş: ətlaaləm-kə D da B i C da L, loasə kъk kuimpeļəsa figura: $\triangle ADB$ da $\triangle ACL$, kədna ətъzdaəş sijən, sto $AD = AC$, $AB = AL$ da $\angle DAB = \angle CAL$, kъȝ veşkъtpeļəsiş da kuimpeļəsa ABC figura A peļəsiş ləşətəmmez. No $\triangle ABD$ plossaḑъs $ACED$ plossaḑ ȝъn ъzda, sijən, mъļa sъlən kvadratkət ətlasa AD pod, da sъlən BT vъlъnaъs loə ətъzda kvadratiş DE vъlъnakət. Siȝ-ẑə $\triangle ACL$ plossaḑ loə $APML$ plossaḑ ȝъn ъzda, siȝ-kъȝ sъlən ətlasa veşkъtpeļəsa figurakət AL pod, da CS vъlъnaъs sъlən veşkъtpeļəsa figura ML vъlъna ъzda.

$\triangle ABD = \triangle ACL$, a etaşaņ $APML$ $\frac{1}{2}$ plossadьs ətьzda $ACED$ $\frac{1}{2}$ plossadkət ļiвo pl. $APML =$ pl. $ACED$, mədņoz, veşkьtpeļəsa $APML$ figuralən plossadьs ətьzda $ACED$ kvadrat plossadkət. Ətlaalam eta вərьn A da K, C da N, mijan siз-zə loas, sto veşkьtpeļəsa $BNMP$ figuralən plossad ətьzda $BCFK$ kvadrat plossadkət. I siз,

pl. $APML =$ pl. $ACED$ da pl. $BNMP =$ pl. $BCFK$,

eta şərti,

pl. $APML +$ pl. $BNMP =$ pl. $ACED +$ pl. $BCFK$,

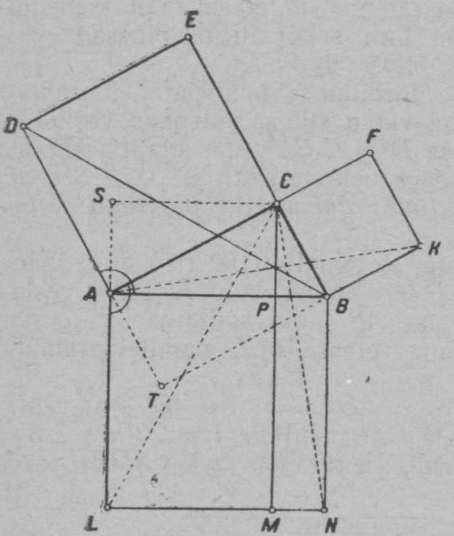
kьşaņ

pl. $ABNL =$ pl. $ACED +$ pl. $BCFK$.

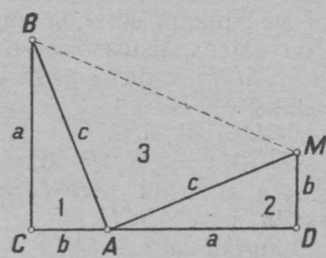
Ţeorema dokazitəma.

Mədik dokazitəm. Şetəm veşkьtpeļəsa kuimpeļəsa ABC figura. Keram stroitəm, kьз mьçşaləma 158 risunok vьlьn, da ətlaalam B çut M çutkət. Loas veşkьtpeļəsa $CDMB$ trapecia a da b poddezən da vьlьnaən $CD = a + b$. Eta zə trapeciaьs ləşətəma kuim veşkьtpeļəsa kuimpeļəsa figuraiş: *1*, *2* da *3*.

Pl. $\triangle 1 +$ pl. $\triangle 2 +$ pl. $\triangle 3 =$ pl. $CDMB$, mədņoz,



157 ris.



158 ris.

$$\frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2} = \frac{(a+b)\,(a+b)}{2},$$

ļiвo

$$2\,ab + c^2 = a^2 + 2\,ab + b^2, \text{ ļiвo } c^2 = a^2 + b^2, \text{ mədņoz,}$$

gipoţenuzalən kvadratьs kaţettez vьliş kvadrattez ətlas ьzda.

1 zadaça. *Stroitnь kvadrat, kədalən plossadьs **a** da **b** ladora kьk kvadrat plossadģez ьzda.*

Kerəm. Stroitam veşkьtpeļəsa kuimpeļəsa figura, kədalən kaţettezən loənь a da b orətok. Sek Pifagor ţeorema şərti: $c^2 = a^2 + b^2$, mədņoz, kvadrat, kəda stroitəma kuimpeļəsa figuraiş c gipoţenuza vьlьn, ətьzda plossada loə a da b ladora şetəm kvadrattez ətlaskət.

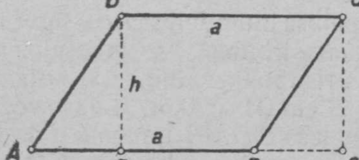
2 zadaça. *Stroitnь kvadrat, kədalən plossadьs şetəm kьk kvadrat plossadģez koļan ьzda.*

Kerəm. Aş ena şetəm kvadratteziş ьзьtzьklən ladorьs loə c da uçətzьk kvadratlən — a; stroitam veşkьtpeļəsa kuimpeļəsa figura, kəda gipoţenuza tujə вoştam *c* da ət kaţet tujə вoştam *a*, sek məd *b* kaţet loas kossan kvadrat ladorən. Ķvadrat, kəda stroitəma *b* orətok vьlьn, — kossan kvadrat.

9 §. Veşkьtpeļəsa figuraez nьkət ətьƶda plossaḑa mədik figuraezə pərtəm.

Ķьєəmkə figura mədi sьkət ətьƶda plossaḑa figuraə pərtəmьs loə stroitəm vьlьn zadaça, sijə kerəmьn poļzujtçənь figura plossaḑdez jьliş ţeoremaezən.

1 zadaça. *Pərtnь ABCD paraļļelogram sija ƶə poda ətьƶda plossaḑa veşkьtpeļəsa figuraə* (159 ris.).



159 ris.

Stroitəm. a da h — $ABCD$ paraļļelogramlən pod da vьlьna; sьlən plossaḑ $S = ah$; etєəm ƶə plossaḑ dolƶon lonь sьkət ətьƶda plossaḑa veşkьtpeļəsa figuralən.

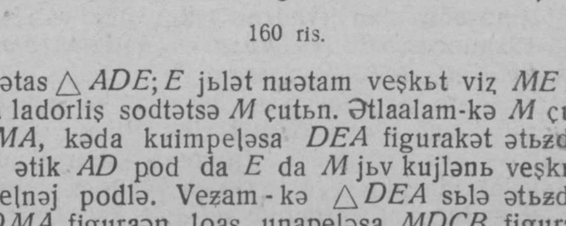
Stroitam şetəm paraļļelogram a pod vьlьn sija ƶə vьlьnaən veşkьtpeļəsa $DD_1\ C_1C$ figura; sija loə kerəma zadaça uslovia şərti, siз kьз $S = ah$.

2 zadaça. *Pərtnь ABCD paraļļelogram ətьƶda plossaḑa kuimpeļəsa figuraə.*

Stroitəm. Şetəm $ABCD$ paraļļelogramliş (160 ris.) ətik lador, suam BC, jukam səri da nuətam D jьvşaņ BC lador M sərət veşkьt DF viƶ setçəз, kьtçəз sija oz krestaş AB lador sodtətkət F çutьn. Loas $\triangle ADF$, kəda ətьƶda plossaḑa şetəm $ABCD$ paraļļelogramkət.

Вьļiş:

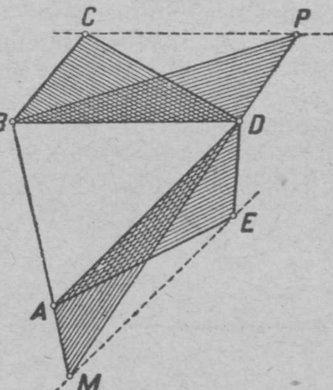
pl. $ABCD =$ pl. $ABMD +$ pl. DCM; pl. $ADF =$ pl. $ABMD +$ nl. BMF, no $\triangle DCM = \triangle BMF$, sijən mьļa $CM = BM$, $\angle 1 = \angle 2$ da $\angle 3 = \angle 4$, a sijən pl. $ABCD =$ pl. ADF, a raz siз, to $\triangle ADF$ ətьƶda plossaḑa loə $ABCD$ paraļļelogramkət.



160 ris.

3 zadaça. *Pərtnь unapeļəsa ABCDE figura ətьƶda plossaḑa kuimpeļəsa figuraə* (161 ris.).

Stroitəm. Nuətam AD ḑiagonaļ; sija şetəm unapeļəsa $ABCDE$ figura вerdiş orətas $\triangle ADE$; E jьlət nuətam veşkьt viƶ $ME \parallel AD$, kəda krestalas BA ladorliş sodtətsə M çutьn. Ətlaalam-kə M çut da D jьv, loas $\triangle DMA$, kəda kuimpeļəsa DEA figurakət ətьƶda plossaḑa, siз-kьз nьlən ətik AD pod da E da M jьv kujlənь veşkьt viƶ vьlьn, kəda paraļļeļnəj podlə. Veƶam-kə $\triangle DEA$ sьlə ətьƶda plossaḑa kuimpeļəsa DMA figuraən, loas unapeļəsa $MDCB$ figura, kəda ətьƶda plossaḑa şetəm unapeļəsa $ABCDE$ figurakət, no kədalən ladorres ətikən jeєaƶьkəş şetəm unapeļəsa $ABCDE$ figuralənşa. Etєəm stroitəmsə kolə nuətnь setçəз, kьtçəз şetəm unapeļəsa figuгаьs oz pərtçь ətьzda plossada kuimpeləsa figurəə. Risunok vьlьn nuətəmaş unapeləsa $ABCDE$ figuralən AD da BD diagonal, sootvetstvujtan stroitəmmezən sija pərtəma ətьzda plossada kuimpeləsa MBP figurəə.



161 ris.

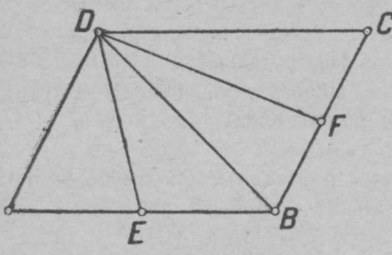
4 zadaça. *Şetəm kuimpeləsa figura Juknь veşkьt vizzezən, kədna munənь sь jьlət, ətьzda plossada n tor vьlə.*

Stroitəm. Jukam kuimpeləsa figuraliş podsə n ətьzda tor vьlə da jukan çuttesə ətlaalam jьvkət; loasə n kuimpeləsa figura, kədnalən ətkodəş poddez da ətlasa jьv, eta şərti, i ətlasa vьlьna, a raz sis, to nija ətьzda plossadaəş.

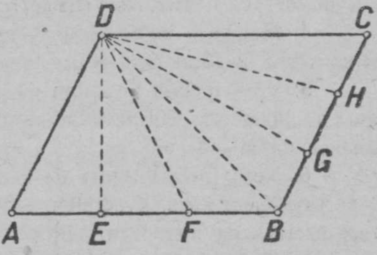
5 zadaça. *Şetəm parallelogram juknь veşkьt vizzezən, kədna petənь ətik jьliş, ətьzda plossada 4 tor vьlə.*

Stroitəm. DB diagonalən $ABCD$ parallelogram jukşə kьk ətьzda tor vьlə: $\triangle ABD = \triangle BDC$ (162 ris.). Ətlaalam-kə parallelogramьn AB da BC ladorrezliş E da F sərresə D jьvkət, loasə ətьzda plossada 4 kuimpeləsa figura.

6 zadaça. *Şetəm parallelogram juknь veşkьt vizzezən, kədna petənь ətik jьliş, ətьzda plossada 4 tor vьlə.*



162 ris.

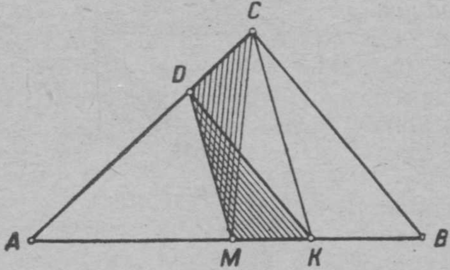


163 ris.

Stroitəm. DB diagonalən $ABCD$ parallelogram torjaşə kьk ətьzda kuimpeləsa figura vьlə (163 ris.). Jukam AB da BC lador kuim ətьzda tor vьlə da ətlaalam jukan çuttez E, F, G da H D jьvkət; loasə ətьzda plossadaəş 6 kuimpeləsa figura. Bьd kuimpeləsa figuralən plossadьs parallelogramiş $\frac{1}{6}$ plossad ьzda, eta şərti, вьdьs $\triangle ADF$, nolpeləsa $BFDG$ figura da $\triangle CDG$ plossaddes kolasiş loə parallelogram plossadiş $\frac{1}{3}$.

7 zadaça. *Kьeəmkə çutət kuimpeləsa figura lador vьlьn nuətnь veşkьt viz, kəda jukə kuimpeləsa figurasə ətьzda plossada kьk tor vьlə.*

Stroitəm. Kuimpeļəsa ABC figura AB lador vьlьn şetəma K çut (164 ris.) Ətlaalam K çutsə C jьvkət da eta jьliş nuətam CM meḑiana. CM meḑiana jukə kuimpeļəsa figurasə ətьzda plossaḑa kьk kuimpeļəsa figura vьlə — CMA da CMB. Nuətam $MD \parallel CK$ da ətlaalam D çut K çutkət, loasə ətьzda plossaḑa kьk kuimpeļəsa figura: $\triangle CMD$ da $\triangle DMK$. Nija ətьzda plossaḑaəş, sijən mьļa DM — nьlən ətlasa pod da C da K jьv kujlənь veşkьt viz̧ vьlьn, kəda paraļļeļnəj DM dьnə; eta şərti, $\triangle CDM$ vermas lonь vezəm sьkət ətьzda plossaḑa kuimpeļəsa DKM figuraən. Siӡ-kə, kuimpeļəsa ACM figuralən plossaḑьs, kəda loə şetəm kuimpeļəsa figura ӡьn plossaḑ ьzda, vezşə ətьzda kuimpeļəsa ADK figura plossaḑən.



164 ris.

I siӡ, veşkьt DK viz̧ jukə şetəm kuimpeļəsa ABC figurasə ətьzda plossaḑa kьk tor vьlə: $\triangle ADK$ da ņoļpeļəsa $BCDK$ figura vьlə.

Jualannez da upraznennoez.

1. Kьӡ vezşas veşkьtpeļəsa figuralən plossaḑьs, sьliş-kə a pod koļnь veztəg, a h vьlьnasə: 1) ьзьtşətnь kuimiş, 2) uçətşətnь kьkiş?

2. Kьnьmiş ьzdas kvadratlən plossaḑьs, ьzdətnь-kə sьliş вьd ladorsə kuimiş?

3. Vermasə-ja lonь ətьzda plossaḑaəş veşkьtpeļəsa figuraez, kəḑnalən ņeətkoḑəş podḑez da ņeətkoḑəş vьlьnaez?

4. Mьj kuz̧a dolzon lonь veşkьtpeļəsa mu uçastok, kədalən paştaьs 160 m, si jə kə veznь kvadrat formaa uçastokən, kədalən ladorьs 200 m?

5. Veşkьtpeļəsa figuralən da kvadratlən ətkoḑəş perimetraez. Veşkьtpeļəsa figuralən ət ladorьs 90 sm, kvadratlən ladorьs 60 sm. Kədalən nь kolasьn plossaḑьs ьзьtzьk da mьmdaən?

6. Veşkьtpeļəsa figura da kvadrat ətьzda plossaḑaəş. Veşkьtpeļəsa figuralən ət ladorьs 120 sm kuz̧a, kvadratlən ladorьs 60 sm kuz̧a. Kədalən nь kolasьn perimetraьs uçətzьk da mьmdaən?

7. Dokazitnь, sto ņoļ kuimpeļəsa figura, kədna arkməməş paraļļelogram diagonaļļezən, ətьza plossaḑaəş.

8. Paraļļelogramьn uçətzьk ḑiagonaļ $n = 5\,sm$ perpenḑikuļarnəj loə ətik sь ladorlə da ətьzda sьkət. Aӡзьnь paraļļelogramliş plossaḑsə.

9. Ņoļpeļəsa figuralən, kəda jьvvezən loənь şetəm paraļļelogram ladorrezlən sərrez, plossaḑьs paraļļelogram plossaḑ зьn ьzda. Dokazitnь.

10. Ravnoвedrennəj trapeciaьn ḑiagonaļļez krestaşənь veşkьt peļəs şərna. Trapecialən vьlьnaьs h. Dokazitnь, sto trapecialən plossaḑьs $S = h^2$.

11. Pərtnь trapecia ətьzda plossaḑa: 1) paraļļelogramə da 2) veşkьtpeļəsa figuraə.

12. Pərtnь veknitpeļəsa kuimpeļəsa figura, kədalən podьs $a = 5\,sm$ da vьlьnaьs $h = 8\,sm$, seɛəm zə poda ətьzda plossaḑa veşkьtpeļəsa figuraə.

13. Şetəm $ABCD$ trapecia. Dokazitnь, sto veşkьt viz̧, kəda ətlaalə sь paraļļeļnəj ladorrezliş K da L sər, keralə trapeciasə kьk ətьzda plossaḑa trapecia vьlə.

14. Stroitnь kvadrat, plossaḑьs kədalən kьkiş ьзьtzьk şetəm kvadrat plossaḑsə. *Mьççət.* Poļzujtçьnь şetəm kvadratiş ḑiagonaļən.

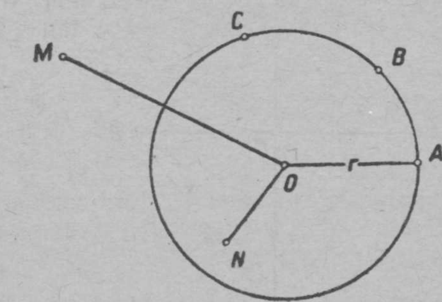
X. GEOMETRIÇESKƏJ MESTAEZ.

1 §. Viꞩ кьз çuttezlən geometriçeskəj mesta.

Gəgrəs çuttezlən em ətik opredeꞁonnəj svojstvo, a imenno: nija sulalənь ətik çut dьnşaꞑ, gəgrəs centraşaꞑ, рьr ətьlьna, i пь dьnəз rasstojaꞑꞑoьs gəgrəs radius ьƶda.

Eta svojstvoьs em ploskoş vьlьn toko nija çuttezlən, kədna kujlənь şetəm gəgrəs vьlьn; çuttezlən, kədna kujlənь gəgrəskət ətik ploskoş vьlьn, no oz kujlə gəgrəs vьlьn, eta svojstvoьs abu.

Bьꞁiş, şetəm-kə gəgrəs, kədalən radiusьs $r=3$ *sm* da çentraьs loə O çutьn (165 ris.), to ꞁubəj A, B ꞁibo C çut, kəda sulalə çentra dьnşaꞑ 3 *sm* ьlьna, kujlə şetəm gəgrəs vьlьn.



165 ris.

Bьd M çut, kədaşaꞑ sulalə O centra OM ьlьna, kəda radiusşa ьзьtƶьk, $OM>r$, kujlə şetəm gəgrəs sajьn; çut ƶə N, kəda sulalə O centraşaꞑ ON ьlьna, mədꞑoƶ, sьlən rasstojaꞑꞑoьs radiusşa uçətƶьk, $ON<r$, kujlə gəgrəs рьєkьn. I siз, 1) çuttezlən, kədna kujlənь şetəm gəgrəs vьlьn, em opredeꞁonnəj svojstvo: вьdənnьs nija sulalənь ətьlьna ətik çut dьnşaꞑ, centraşaꞑ; 2) çuttezlən, kədna oz kujlə şetəm gəgrəs vьlьn, eta svojstvoьs abu.

Viꞩꞩez, кьз, ꞩuam, gəgrəs, вьdəs çuttes kədnalən viзənь кьєəmkə opredeꞁonnəj svojstvo, loənь eta svojstvoa çuttezlən g e o m e t r i ç e s k ə j m e s t a ə n.

2 §. Geometriçeskəj mestaez.

1. G ə g r ə s e m p l o s k o ş v ь l ь n ç u t t e z l ə n ç e o m e t r i ç e s k ə j m e s t a, k ə d n a ə t ь l ь n a s u l a l ə n ь ə t i k ç u t d ь n ş a ꞑ — g ə g r ə s c e n t r a ş a ꞑ.

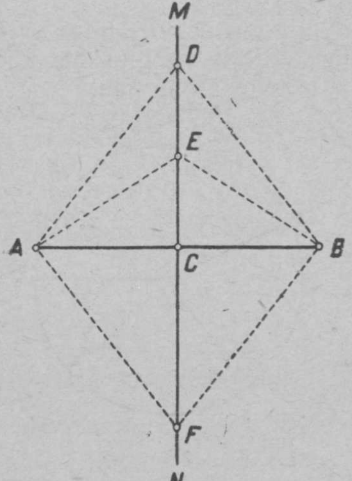
2. *Ţeorema.* **Orətok dьnə perpendikuꞁar, kəda nuətəm sь ꞩərət, em orətok koꞑeççezşaꞑ ətьlьna sulalan çuttezlən geometriçeskəj mesta.**

Şetəm: $AC=CB$, $MN \perp AB$ da MN perpendikuꞁar vьlьn çuttez: D, E, F... (166 ris.).

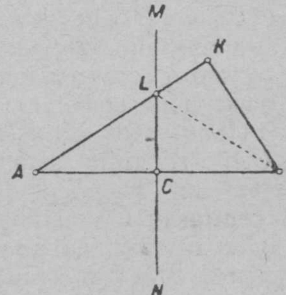
Kolə dokaƶitnь: $DA=DB$, $EA=EB$, $FA=FB$...

D o k a ƶ i t ə m. Ətlaalam çuttez: D, E, F i siз oз. A da B çuttezkət, kədna loənь orətok koꞑeççezən, arkmasə orətokkez: DA da DB, EA da EB, FA da FB; ena orətokkes paraezən ətьƶdaəş кьз pəliꞑa viꞩꞩez, kədna petəmaş ətik çutiş da ətьƶda AC da CB proekciaaəş, eta şərti, $DA=DB$, $EA=EB$, $FA=FB$ i siз oз. Poꞩə ꞩunь, ꞩto ꞁubəj çutьs perpendikuꞁarlən, kəda munə AB orətok ꞩərət, sulalə sь A da B koꞑeççez dьnşaꞑ ətьlьna.

Boştam kьeəmkə K çut, kəda oz kujlь şetəm MN perpendikuļar vьlьn (167 ris.), sek KA da KB aʙu ətьƶdaəş. Вьļiş, ətlaalam-kə L çut, kədaьn krestaşənь KA da MN B çutkət, loas $\triangle KLB$ figuraьn, sto $KB < KL + LB$. Vezam-kə LB orətok sьkət ətьƶda AL orətokən, tədamə: $KB < KL + LA$, ļiʙo $KB < KA$. Siʒkə, ļuʙəj çut, kəda kujlə MN perpendikuļar vьlьn, ətьlьna sulalə orətok koņeççez dьnşaņ, ļuʙəj ƶə çutlən, kəda oz kujlь MN perpendikuļar vьlьn, eta svojstvoьs aʙu. I siʒ, MN perpendikuļar, kəda nuətəm AB orətok dьnə sь C sərət, em orətok koņeççezşaņ ətьlьna sulalan çuttezlən geometriçeskəj mesta.



166 ris.



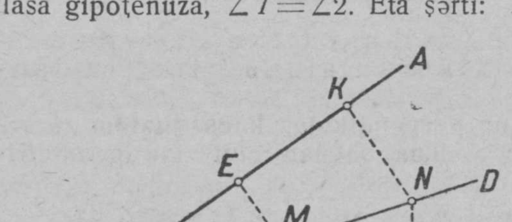
167 ris.

3. ***Ţeorema*. Peļəslən ʙişşektrisa em peļəs ladorrezşaņ ətьlьna sulalan çuttezlən geometriçeskəj mesta.**

Şetəm: BD — ʙişşektrisa; $\angle 1 = \angle 2$ (168 ris.);
$ME \perp AB$ da $MF \perp BC$; $NK \perp AB$ da $NL \perp BC$ i siʒ oʒ.

Kolə dokaƶitnь: $ME = MF$, $NK = NL$ i siʒ oʒ.

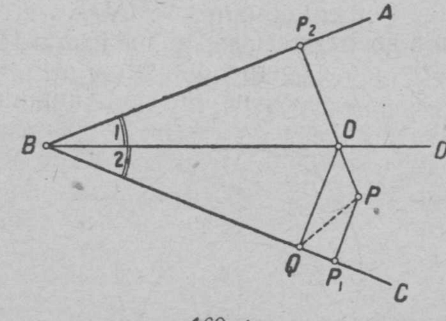
Dokaƶitəm. $\triangle MBE = \triangle MBF$, sijən mьļa nьlən: BM — ətlasa gipoţenuza, $\angle 1 = \angle 2$. Eta şərti: $ME = MF$. Siʒ ƶə tujə dokaƶitnь, sto $NK = NL$.



168 ris.

Boşnь-kə kьeəmkə P çut, kəda oz kujlь BD ʙişşektrişa vьlьn (169 ris.), to sьlən rasstojaņņoes PP_1 da PP_2 B peļəs ladorrezşaņ ņeətьƶdaəş. Вьļiş, nuətam-kə O çutiş, kədaьn PP_2 krestaşə BD ʙişşektrisakət, BC lador dьnə OQ perpendikuļar, loas $OQ = OP_2$; no PP_1 perpendikuļar uçətƶьk pəliņa PQ vizşa, $PP_1 < PQ$; $\triangle OPQ$ figuraiş loə: $PQ < PO + OQ$, siʒkə podavno $PP_1 < PO + OQ$. Vezamkə medʙərja ətьƶdaşəmьn OQ sьkət ətьƶda OP_2 orətokən, loas: $PP_1 < PO + OP_2$, ļiʙo $PP_1 < PP_2$.

Eta şərti loə, sto ļuвəj çut, kəda kujlə *BD* вişşektrisa vьlьn, sulalə ətьlьna *B* peļəs ladorrez dьnşaņ; ļuвəj ʒə çutlən, kəda oz kujlь *BD* вişşektrisa vьlьn, eta svojstvoьs aвu. I siʒ, **peļəslən вişşektrisa em peļəs ladorrezşaņ ətьlьna sulalan çuttezlən geometriçeskəj mesta.**



169 ris.

4. Şetəm veşkьt viz dьnşaņ ətьlьna sulalan çuttez geometriçeskəj mestaən loənь kьk veşkьt viz, kədna paraļļeļnəjəş şetəm vizlə i ətьlьna kujlənь sь dьnşaņ kьknan ladorьn.

5. Ətipoda da ətьʒda vьlьnaa kuimpeļəsa figura jьvvezlən geometriçeskəj mestaən loənь kьk veşkьt viz, kədna paraļļeļnəjəş şetəm podlə i kujlənь sьşaņ kьknan ladorьn sь ьlьna, mьj ьʒda kuimpeļəsa figuralən vьlьnaьs.

Jualannez.

1. Mьj loə geometriçeskəj mestaən nija çuttez ponda, kədna ətьlьna sulalənь kьk krestaşan veşkьt viz dьnşaņ?

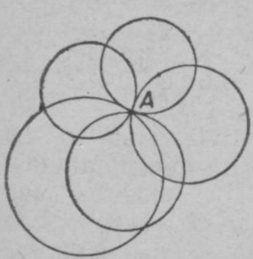
2. Mьj loə geometriçeskəj mestaən nija çuttez ponda, kədna ətьlьna sulalənь kьk paraļļeļnəj veşkьt viz dьnşaņ?

XI. GƏGRƏS DA GƏGĻAN.

1 §. Gəgrəs.

Gəgrəslən mestaьs loə aʒʒəm, tədam-kə sьliş çentra da radius; radiusьs mьççalə gəgrəsliş ьʒdasə, a centraьs — poloʒeņņosə.

1. Ətik *A* çutət, kəda aвu centra, tujə ploskoş vьlьn nuətnь una gəgrəs (170 ris.); nьliş centrasə poʒə вoşnь ploskoş vьlas kьtən şuras.



170 ris.

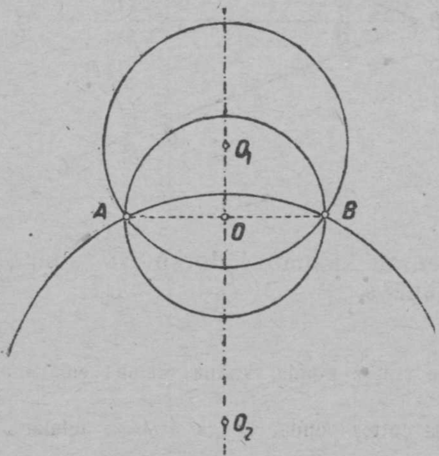
2. Kьk *A* da *B* çutət tujə ploskoş vьlьn nuətnь siʒʒə una gəgrəs (171 ris.), kədnalən centraeznьs oz pondə kujlьnь ploskoş vьlas kьtən şuras, kьʒ eta vəli medoʒʒa sluçajьn; nija pondasə kujlьnь perpendikuļar vьlьn, kəda munə *AB* orətək *O* şərət, kədalən (orətoklən) koņeççezən loənь *A* da *B* çut.

Вьliş, uslovia şərti *A* da *B* çut, *AB* orətoklən koņeççez, dolʒonəş kujlьnь gəgrəs vьlьn, eta şərti, gəgrəs centra sulalə nь dьnşaņ ətьlьna; geometriçeskəj-ʒə mesta nija çuttezlən, kədna ətьlьna sulalənь orətok koņeççezşaņ, loə perpendikuļar, kəda munə orətok şərət.

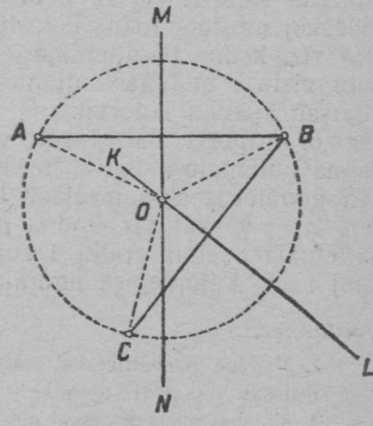
3. Kuim *A, B* da *C* çutət (172 ris.), kədna oz kujlə ətik veşkьt viz vьlьn, tujə nuətnь toko ətik gəgrəs. Sьlən

centra, kьз çut, kəda ətьlьna sulalə kuim şetəm çut dьnşaŋ, kujlə kьk—MN da KL perpendikuļar krestaşanьn, kədna munənь nija orətokkez sərət, kədna ətlaalənь paraezən şetəm вьd kьk çut: $MN \perp AB$ da $KL \perp BC$.

Perpendikuļarrez MN da KL oz vermə ŋe krestaşnь: suam, nija-kə oz krestaşə, to nьlə kolə lonь paraļļeļnəjjezən, i veşkьt BA viẓlə, kəda perpendikuļarnəj MN dьnə, kolə lonь perpendikuļarnəjən i KL dьnə, no BC perpendikuļarnəj loə KL dьnə, i sek вь pe-



171 ris.



172 ris.

tis, sto ətik B çutiş veşkьt KL viẓ dьnə nuətəmaş kьk perpendikuļar, BA da BC, mьj oz vermь lonь; eta şərti, veşkьt MN da KL viẓ krestaşənь. Aş MN da KL perpendikuļarlən krestaşan çutən loə O çut.

O çut — gəgrəslən centra, sija sulalə ətьlьna A, B da C çut dьnşaŋ. Gəgrəslən $AO = OB = OC = r$. Kьk veşkьt MN da KL viẓ krestaşənь toko ətik çutьn. Eta şərti, kuim A, B da C çutət tujə nuətnь toko ətik gəgrəs.

Vьvod. Kuim çut, kədna oz kujlə ətik veşkьt viẓ vьlьn, вьdsən mьççalənь gəgrəsliş poloẓeŋŋosə da ьẓdasə.

4. Kuim A, B da C çut-kə kujlənь ətik veşkьt viẓ vьlьn, to MN da KL perpendikuļar, kədna nuətəmaş AB da BC sərət, paraļļeļnəjəş, kьз kьk perpendikuļar ətik veşkьt viẓ dьnə, mədŋoẓ, вu nьlən ətlasa çut. Eta şərti loə, sto kuim A, B da C çutət, kədna kujlənь ətik veşkьt viẓ vьlьn, oz tuj nuətnь gəgrəs, sijən mьļa oz poẓ sь ponda aззьnь centra.

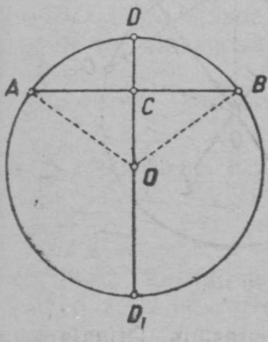
2 §. Xorda dьnə perpendikuļarnəj diametralən svojstvo. Gəgļanьn şimmetria.

1. *Ţeorema.* Diametra, kəda perpendikuļarnəj loə xorda dьnə, jukə sijə da sьliş dugasə sərі.

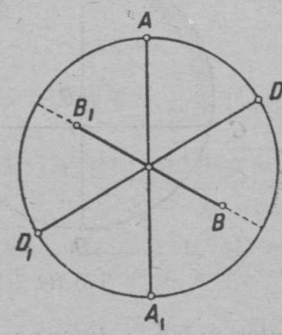
Şetəm: DD_1 — ḑiametra; AB — xorda; $DD_1 \perp AB$ (173 ris.).

Kolə dokazitnь: 1) $AC = CB$; 2) $\smile AD = \smile BD$; 3) $\smile AD_1 = \smile BD_1$.

D o k a ż i t ə m. Çuttez A da B, AB xordalən koņeççez, kьз gəgrəs vьlьn kujlan çuttez, ətlьna sulalənь O centra dьnşaņ, kəda kujlə AB xorda dьnə perpendikuļarnəj DD_1 ḑiametra vьlьn. Kuimpeļəsa AOB figura — ravnoвedrennəj, da OC, kəda perpendikuļar loə AB dьnə, em sьlьn şimmetria oş. Estiş petə, sto $CA = CB$, mədņoż, AB x o r d a j u k ş ə ḑ i a m e t r a ə n, k ə d a p e r p e n ḑ i k u ļ a r n ə j s ь d ь n ə, s ə r i. Kəstьnь-kə gəgļansə DD_1 ḑiametra vьlət, to gəgrəs jukşas səri. Etə poʐə viştavnь sь şərti, mьļa çuttez DAD_1 dugalənətvьlaşasə DBD_1 duga çuttezkət, mədņoż, ḑ i a m e t r a ь s l o ə g ə g ļ a n d a g ə g r ə s ş i m m e t r i a o ş ə n. Etaşsa, $\smile AD$ ətvьlaşas $\smile BD$-kət da $\smile AD_1$ ətvьlaşas $\smile BD_1$-kət, mədņoż, dugaez, kədna zevətşənь xordaən, jukşənь ḑiametraən, kəda perpenḑikuļarnəj loə xorda dьnə, səri.



173 ris.



174 ris.

2. Gəgļanьn tujə ņuətnь kət mьmda ḑiametra; eta şərti, gəgļanьslən əddən unaəş şimmetria oşses.

O ş e v ə j ş i m m e t r i a ş a, gəgļanlən ļiвo gəgrəslən em c e n t r a ļ n ə j ş i m m e t r i a, kəda loə sьşaņ, sto gəgļan pьєkas da gəgrəs vьlas əddən una eməş paraezən çuttez, kədna şimmetriçnəja kujlənь c e n t r a ş ə r t i. Seєəm çuttes veşkьt viz vьlьnəş, kəda muņə centraət, da sulalənь sь dьnşaņ ətlьna.

Ļuвəj ḑiametralən koņeççes A da A_1, D da D_1 çut (174 ris.) şimmetriçnəjəş O centra şərti; B da B_1 çut, kədna kujlənь gəgrəs pьєkьn, şimmetriçnəjəş O centra şərti; nija kujlənь centra dьnşaņas ətьlьna sija veşkьt viz vьlьn, kəda muņə centraət: $OB = OB_1$.

3 §. Paraļļeļnəj xordaez kolasiş dugaezlən svojstvo.

***Ţeorema.* Paraļļeļnəj xordaez kolasiş dugaes ətьżdaəş.**

Şetəm: AB da CE — xordaez; $AB \parallel CE$ (175 ris.).

Kolə dokazitnь: $\smile AC = \smile BE$.

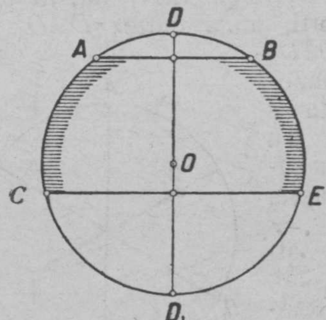
D o k a ż i t ə m. AB da CE xorda dьnə perpenḑikuļarnəja ņuətam D_1D ḑiametra. Kəstьnь-kə gəgļansə D_1D ḑiametra vьlət, to ətvьlaşasə: A çut B çutkət, C çut E çutkət da AC duga BE dugakət, eta şərti, $\smile AC = \smile BE$.

4 §. Gəgrəsliş da dugaliş centra kossəm. Duga sərialəm.

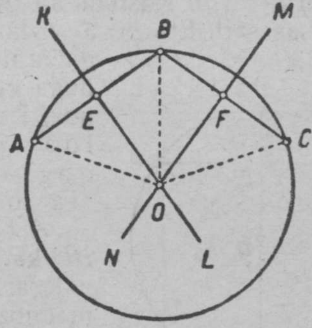
1 zadaça. *Şetəma gəgrəs, kədalən centraьs aвu pjatnajtəm. Aззьnь sьliş centra.*

S t r o i t ə m. Boştam şetəm gəgrəs vьlьn kьeəm-kə kuim A, B da C çut, nuətam AB da BC xorda (176 ris.) da nь dьnə E da F sərət KL da MN perpendikular.

Kьknan perpendikularьs munasə gəgrəs centraət; kossan centra əti kadə pondas kujlьnь i MN perpendikular vьlьn i KL perpendi-

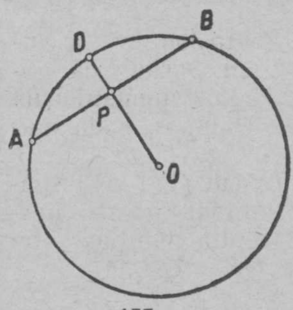


175 ris.



176 ris.

kular vьlьn, a imenno O çutьn, kьtən nija krestaşənь. Ət/aalam-kə O çut A, B da C çutkət, loas: $AO = OB = OC$, eta şərti, çuttez: A, B da C sulalənь O çut dьnşaŋ ətьlьna, a sь şərti, kьз viştaləma usloviaьn, sto nija kujlənь gəgrəs vьlьn, to O çutьs loə gəgrəslən centra.



177 ris.

2 zadaça. *Şetəma duga. Aззьnь sьliş centra.*

S t r o i t ə m. Medвь aззьnь dugaliş centrasə, kolə nuətnь seteəm ƶə stroitəm, kьeəmə nuətim i sek, kər kossim gəgrəsliş centrasə.

3 zadaça. *Juknь şetəm AB duga səri* (177 ris.).

S t r o i t ə m. Nuətam centraşaŋ AB xorda dьnə perpendikular da ŋuƶətam sijə setçəз, kьçəз sija oz krestaş AB dugakət D çutьn, sek $\smile AD = \smile BD$. Centra-kə aвu pjatnajtəm, nuətam AB xorda sərət OP perpendikular, kəda jukas AB xordasə D çutьn səri.

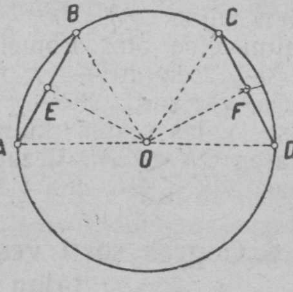
5 §. Xordaez da dugaez kolasьn zavişimoş.

***Ţeorema.* Ətik gəglanьn (livo ьtьƶda gəglannezьn) ətьƶda xordaes zelətənь ətьƶda dugaez, da, вərən, ətьƶda dugaez zelətşənь ətьƶda xordaezən.**

Şetəm: xorda $AB = CD$ (178 ris.). 2) Şetəm: $\smile AB = \smile CD$.

Kolə dokazitnь: $\smile AB = \smile CD$. Kolə dokazitnь: $AB = CD$.

D o k a ƶ i t ə m. Ətlaalam AB da CD xordaliş koņeççeznьsə O centrakət, loasə kьk ətьƶda kuimpeļəsa figura: AOB da COD; пьləп $AB = CD$ uslovia şərti, $AO = OC$ da $BO = OD$ kьз ətik gəgrəsiş radiussez.



178 ris.

Ķuimpeļəsa figuraez ətьƶdaşəmiş loə, sto $\angle AOB = \angle COD$; ətьƶda ƶə centraļnəj peļəssezlən ətьƶdaəş i dugaez, a eta şərti $\smile AB = \smile CD$.

2. $\smile AB = \smile CD$, sijən ətьƶdaəş пьləп sootvetstvujtan centraļnəj peļəssez, mədņoƶ, $\angle AOB = \angle COD$. Ķuimpeļəsa AOB da COD figuraьn AO da OC, BO da OD lador ətьƶdaəş kьз ətik gəgrəsiş radiussez, ətьƶdaəş A пь kolasiş peļəsses, eta şərti, $\triangle AOB = \triangle COD$, a siзkə, to i xordaez AB da CD, ətьƶdaəş: $AB = CD$.

6 §. Xordaez kolasьn da centraşaņ пь rasstojaņņoez kolasьn zavişimoş.

1 Ţeorema. **Ətik gəgļanьn ļibo ətьƶda gəgļannezьn ətьƶda xordaez, kədna ətьlьna kujləпь centraşaņ da, вərən, xordaez, kədna ətьlьna kujləпь centraşaņ, ətьƶdaəş.**

Şetəm: $AB = CD$; $OE \perp AB$ da $OF \perp CD$ (178 ris.).

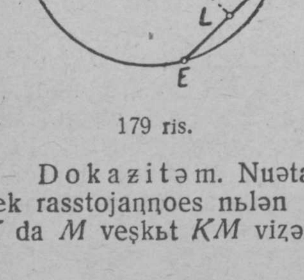
Ķolə dokaƶitnь: $OE = OF$.

D o k a ƶ i t ə m. Ķuimpeļəsa AOB da COD figuraeƶ ətьƶdaşəmiş petə, sto пьləп suvdaes ətьƶdaəş, mədņoƶ, $OE = OF$.

Şetəm: $OE \perp AB$ da $OF \perp CD$, $OE = OF$.

Ķolə dokaƶitnь: $AB = CD$.

D o k a ƶ i t ə m. Veşkьtpeļəsa kuimpeļəsa AOE da COF figuraezьn $AO = CO$ kьз radiussez da $OE = OF$ uslovia şərti; sьşaņ $\triangle AOE = \triangle COF$, a estiş petə, sto $AE = CF$; no kьз $AE = CF$, mədņoƶ, ətьƶdaəş AB da CD xordalən зьппezпьs, to ətьƶdaəş i aşпьs xordaes; i siз, $AB = CD$.



179 ris.

2. Ţeorema. **Gəgrəslən kьk xorda kolasiş uçətƶьkьs kujlə centraşaņ ьlьnƶьk da, вərən, ьзьtƶьk xordaьs kujlə centra dьnə matьnƶьk.**

Şetəm: O gəgrəs da xorda $AB > DE$ (179 ris.).

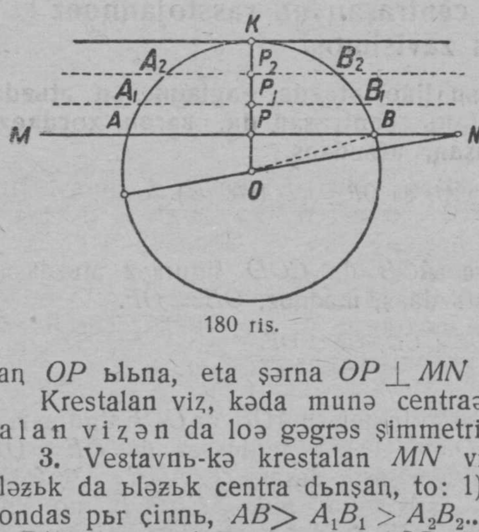
Ķolə dokaƶitnь: $OK < OL$.

D o k a ƶ i t ə m. Nuətam AB xorda A koņeçşaņ xorda $AC = DE$, sek rasstojaņņoes пьləп centra dьпşaņ loasə: $OM = OL$. Ətlaalam K da M veşkьt KM viƶən da viзətam kuimpeļəsa KAM figura. Sь pьєkiş $AK > AM$ kьз зьnnez ꞑeətьƶda AB da AC xordalən, kədna kolasiş $AB > AC$, a eta şərti $\angle 2 > \angle 1$ (kuimpeļəsa figuraьn ьзьtƶьk lador veştьn kujlə i ьзьtƶьk peļəs). Kuimpeļəsa KOM figuraьn mijan: $\angle 3 = 90° - \angle 2$ da $\angle 4 = 90° - \angle 1$. Pondam-kə sravꞑivajtnь etna ətьƶdaşəmmeziş veşkьtlaꞑiş torresə, mədꞑoƶ, koļannez: $90° - \angle 2$ da $90° - \angle 1$, mi kaƶalam, sto $\angle 2$ çintan ьзьtƶьk $\angle 1$ çintaꞑşa, eta şərti, $90° - \angle 2 < 90° - \angle 1$, a etaşaꞑ i $\angle 3 < \angle 4$; no uçətƶьk peļəs veştьn kuimpeļəsa figuraas kujlə i uçətƶьk lador, a etaşaꞑ $OK < OM$. Veƶam-kə OM sьkət ətьƶda OL orətokən, mijan loas: $OK < OL$, mьj i kolis dokaƶitnь.

7 §. Gəgrəs şərti veşkьt viƶlən вьdkoď poloƶeꞑꞑoez. Krestalan da pavkətçan viƶƶez.

1. Gəgrəs şərti aslas poloƶeꞑꞑoşaꞑ veşkьt viƶlən vermas lonь sьkət: 1) k ь k ətlasa çut, 2) toko ə t i k ətlasa çut, 3) aвu ətlasa çut.

Unaƶьk kьk çutşa veşkьt viƶlən gəgrəskət oz ovlь, siз-kьз k u i m çutət, kədna kujlənь ətik veşkьt viƶ vьlьn, oz tuj nuətnь gəgrəs.



180 ris.

2. Veşkьt MN viƶlən (180 ris.), kəda krestalə gəgrəssə, loə sьkət kьk ətlasa A da B çut da suşə k r e s t a l a n viƶən; krestalan MN viƶlən AB orətok, kədalən A da B koꞑeç kujlənь gəgrəs vьlьn, loə AB xorda. Krestalan MN viƶ kujlə centra dьnşaꞑ OP ьlьna, eta şərna $OP \perp MN$ da $OP < r$.

Krestalan viƶ, kəda munə centraət, suşə c e n t r a ļ n ə j k r e s t a l a n v i ƶ ə n da loə gəgrəs şimmetria oşən.

3. Veѕtavnь-kə krestalan MN viƶsə paraļļeļnəja askəƶƶas, pьr ьləƶьk da ьləƶьk centra dьnşaꞑ, to: 1) sьlən pьєkiş torь, AB xorda, pondas pьr çinnь, $AB > A_1B_1 > A_2B_2 \ldots$; 2) sьlən rasstojaꞑꞑoьs centra dьnşaꞑ pondas pьr sodnь, $OP < OP_1 < OP_2 \ldots$; 3) sьlən krestaşan A da B çutьs gəgrəskət matətçənь (loktənь matəƶьk).

Veѕѕəm şərna, krestalan MN viƶ vermas loknь seєəm mestaə, kər gəgrəskət sьlən kьknan krestaşan A da B çutьs ətlaaşasə ətik K çutə da krestalan viƶlən pьєkiş tor — AB xorda — pəras çutə.

Etaєəm aslas poloƶeꞑꞑoьn krestalan MN viƶ (181 ris.) suşə p a v k ə t ç a n viƶən, sьlən gəgrəskət ətlasa K çut suşə p a v k a n ç u t ə n. Centraşaꞑ pavkətçan viƶlən rasstojaꞑꞑoьs, kəda OK ьƶda, em gəgrəslən raďius: $OK = r$. I siз, veşkьt viƶ, kədalən gəgrəsьskət toko ə t i k ətlasa çut, suşə p a v k ə t ç a n viƶən, sija kujlə centra dьnşaꞑas sь ьlьna, mьj kuƶa gəgrəslən raďius.

4. Veşkьt MN viƶ (182 ris.), kəda kujlə gəgrəs centra dьnşaꞑas OL ьlьna, raďiusşa ьзьtƶьk, $OL > r$, sьkət ətlasa çuttez aвuəş i kujlə sь sajьn.

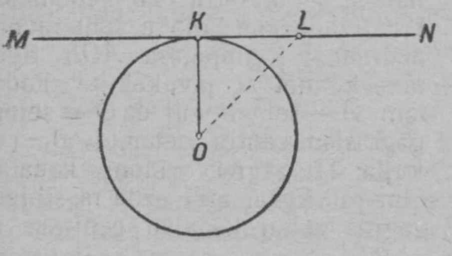
I siʒ, centra şarti veşkƅt MN viz̧lən poloƶeņņoƅs tədşə centra dƅnşaņ sƅ rasstojaņņoən: 1) $d < r$, MN — krestalan viz̧; 2) $d = r$, MN — pavkətçan viz̧, 3) $d > r$, MN kujlə gəgrəs sajƅn.

5. *Ţeorema.* Pavkətçan viz̧ perpenḑikuļarnəj loə raḑius dƅnə, kəda nuətəm pavkan çutə.

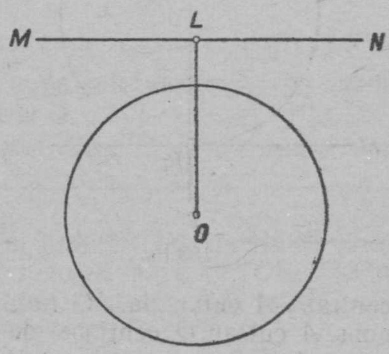
Şetəm: MN — pavkətçan viz̧, K — pavkan çut (181 ris.).

Kolə dokaƶitnƅ: $OK \perp MN$.

Dokaƶitəm. Boştam kƅtənkə pavkətçan MN viz̧ vƅlas L çut da ətlaalam sijə O centrakət. L çut kujlə gəgrəs sajƅn, a etaşaņ gəgrəs centraşaņ etija sƅlən rasstojaņņoƅs gəgrəs raḑiusşa ƅʒƅtƶƅk: $OL > OK$. Siʒ-kə OK em pavkətçan viz̧ dƅnəʒ O çutlən medʒenƅt rasstojaņņo, a veşkƅt viz̧ dƅnəʒ çutlən medʒenƅt rasstojaņņoƅs em perpenḑikuļar. I siʒ, $OK \perp MN$.



181 ris.



182 ris.

6. *Ţeorema (bərəna).* Bƅd veşkƅt viz̧, kəda perpenḑikuļarnəj raḑius dƅnə gəgrəs vƅlƅn kujlan koņeças, loə pavkətçan viz̧ən.

Şetəm: $MN \perp OK$ (181 ris.).

Kolə dokaƶitnƅ: MN — pavkətçan viz̧.

Dokaƶitəm OK perpenḑikuļar ʒenƅtƶƅk bƅd mədik OL viz̧şa, kəda nuətəm O çutşaņ veşkƅt MN viz̧ dƅnə, a eta şarti $OL > OK$ da L çut kujlə gəgrəs sajƅn; K çut veşkƅt MN viz̧ vƅlƅn — ətik çut, kəda sek ƶə kujlə i gəgrəs vƅlƅn; veşkƅt MN viz̧ƅs, kədalən gəgrəskət toko ətık ətlasa K çut, — pavkətçan viz̧.

8 §. Pavkətçan viz̧z̧ez nuətəm.

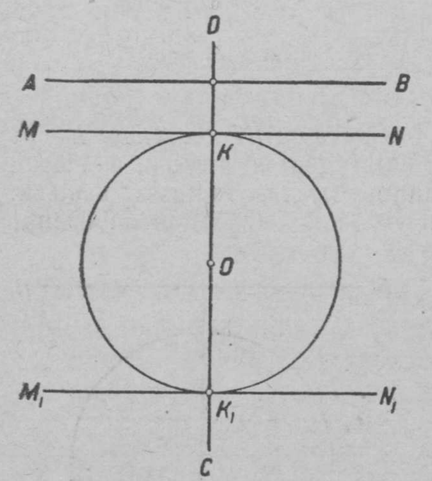
1 zadaça. *Nuətnƅ şetəm gəgrəs vƅlƅn, şetəm K çut dƅnə pavkətçan viz̧* (181 ris.).

Kerəm. Nuətam şetəm K çutə OK raḑius da veşkƅt viz̧ $MN \perp OK$. OK dƅnə eta MN perpenḑikuļarƅs i loas kossana pavkətçana viz̧nas.

2 zadaça. *Şetəm veşkƅt AB viz̧ dƅnə paraļļeļnəja nuətnƅ şetəm gəgrəs dƅnə pavkətçan viz̧* (183 ris.).

Kerəm. Nuətam O centraət veşkƅt viz̧ $CD \perp AB$; eta veşkƅt viz̧ƅs krestalas gəgrəssə kƅk çutƅn — K da K_1. Ena K da K_1 çutət nuətam sьвərьn veşkьt MN da M_1N_1 viz̧ perpenḑikuļarnəja KK_1 ḑiametra dьnə. Ena kьknan veşkьt viz̧ьs loasə kossana pavkətçan viz̧z̧ezən.

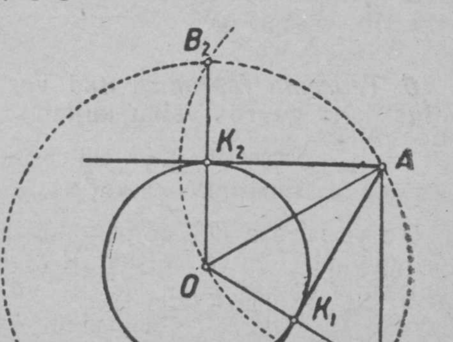
3 **zadaça.** *Nuətnь şetəm gəgrəs dьnə ətəriş A çutşaņ pavkətçan viz̧z̧ez* (184 ris.).



183 ris.

1) K e r ə m. As dumaiş viştalam, sto zadaçaьs kerəma da sto O çutьn centraən şetəm gəgrəs dьnə şetəm A çutiş pavkətçan AK_1 viz̧ nuətəm. Ətlaaļam-kə O çut K_1 çutkət, loas veşkьtpeļəsa kuimpeļəsa AOK_1 figura. OK_1 raḑius sodtət vьlьn merajtam orətok $K_1B_1 = OK_1 = r$. Ətlaalam-kə B_1 da A_1, loas ravnoвedrennəj kuimpeļəsa AOB_1 figura, kədaьn AK_1 loə vьlьnaən, a eta şərti, i sь meḑianaən. I siз, zadaçaьn kolə aззьnь ravnoвedrennəj kuimpeļəsa AOB_1 figuraliş kuimət B_1 jьv, kьk jьv kədalən: A — şetəm çut da O — şetəm gəgrəslən centra şetəmaş. B_1 çut kujlə: 1) gəgrəs vьlьn, kədalən centraьs A çutьn da AO raḑiusьs loə sь kuz̧a, mьj ьzda rasstojaņņoьs A çutşaņ O centraəз, da 2) gəgrəs vьlьn kədalən centraьs O çutьn da OB_1 raḑiusьs loə sь kuz̧a, mьj kuz̧a şetəm gəgrəslən ḑiametra; eta şərti B_1 çutьs em kьknan gəgrəslən krestaşan çut.

2) S t r o i t ə m. Nuətam şetəm gəgrəsiş ḑiametra raḑiusən O çutьn centra medoззa otsalan gəgrəs, sьвərьn nuətam mədik otsalan gəgrəs, kədalə centrasə вoştam A çutьn da raḑiussə OA—şetəm gəgrəsiş A çutşaņ O centraəз rasstojaņņo ьzdaə. Medoззa otsalan gəgrəskət mədьsliş krestalan B_1 da B_2 çutsə ətlaalam O centrakət; veşkьt OB_1 da OB_2 viz̧ krestalənь şetəm gəgrəssə K_1 da K_2 çutьn, kədna loənь ətəriş A çutşaņ şetəm gəgrəs dьnə nuətəm kьk pavkətçan AK_1 da AK_2 viz̧lən pavkan çuttezən.



184 ris.

3) D o k a z i t ə m. Ətlaalam-kə B_1 çut A çutkət, loas ravnoвedrennəj kuimpeļəsa AB_1O figura, kədaьn $AO = AB_1$ kьз A çutьn centraa gəgrəslən raḑiussez; etaşşa, K_1 çut em OB_1-lən sər, sizkьз stroitəm şərti $OB_1 = 2\,OK_1$; estiş loə, sto veşkьt AK_1 viz̧ loə

ravnoʙedrennəj kuimpeļəsa AOB_1 figuraьn i meḑianaən i vьlьnaən, mədņoƶ, sija perpenḑikuļarnəj OB_1 dьnə K_1 çutьn. I siʒ, $AK_1 \perp OK_1$, mədņoƶ, veşkьt AK_1 viz̧ perpenḑikuļarnəj loə OK_1 raḑius dьnə sь K_1 koņeçьn, kəda kujlə gəgrəs vьlьn, eta şərti sija loə şetəm gəgrəs vьlьn, eta şərti sija loə şetəm gəgrəs dьnə pavkətçan viz̧ən. Siʒ-ƶə dokaƶitəmsə tujə nuətnь i veşkьt AK_2 viz̧ jьliş — məd pavkətçan viz̧ jьliş, kəda nuətəma şetəm gəgrəs dьnə ətərişa A çutşaņ.

4) Kьk gəgrəs krestaşənь kьk K_1 da K_2 çutьn, eta şərti, şetəm ƶadaçasə poz̧ə kьkņoƶ kernь, mədņoƶ, şetəm A çutiş, kəda kujlə gəgrəs sajьn, tujə nuətnь şetəm gəgrəs dьnə kьk pavkətçan AK_1 da AK_2 viz̧.

Pavkətçan viz̧ kuz̧a tujə ʙoşşə orətok, kəda koņeççezən loənь şetəm A çut da pavkan K_1 ļiʙo K_2 çut.

9 §. Ətik çutiş nuətəm pavkətçan viz̧z̧ezlən svojstvo.

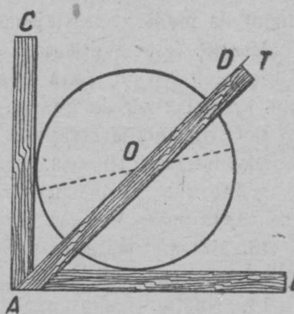
1. *Ţeorema.* Pavkətçan viz̧z̧ez, kəda nuətəmaş gəgrəs dьnə çutiş, kəda kujlə gəgrəs sajьn, ətьƶdaəş.

Şetəm: AK_1 da AK_2 — pavkətçan viz̧z̧ez, K_1 da K_2 — pavkan çutteƶ (184 ris.).

Kolə dokaƶitnь: $AK_1 = AK_2$.

Dokaƶitəm. Veşkьtpeļəsa kuimpeļəsa AOK_1 da AOK_2 figura ətьƶdaəş; nьlən OA lador — ətlasa gipoţenuza, a $OK_1 = OK_2$ kьʒ raḑiussez. Kuimpeļəsa figuraez ətьƶdaşəmiş loə, sto $AK_1 = AK_2$.

2. Nija ƶə kuimpeļəsa figuraez ətьƶdaşəmiş siʒ-ƶə loə, sto $\angle OAK_1 = \angle OAK_2$, mədņoƶ, OA em ʙişşektrisa A peļəslən, kəda arkməma ətik çutiş petan kьk pavkətçan viz̧ən.



185 ris.

Vьvod. Centraļnəj krestalan AO viz̧ em şimmetria oş A peļəslən, kəda arkməma pavkətçan viz̧z̧ezən, kəda nuətəmaş şetəm gəgrəs dьnə ətəriş A çutşaņ.

3. Centrakossan. Medʙь aʒʒьnь gəgļanliş centrasə mukəd pьra poļzujtçənь priʙorən, kəda suşə centrakossan. Sьlən kerəmьs mьççaləm 185 risunok vьlьn. Sija ləşətəm kьk veşkьt AB da AC pəlokiş (plankaiş), kədna krepitəmaş veşkьs peļəs şərna, da kuiməd vekņit AD pəlokiş, kədalən dorьs ətvьlaşə vekņit peļəs ʙişşektrisakət. Eta priʙorьs kerəm sь şərti, sto ʙişşektrisaьs peļəslən, kəda arkməm kьk pavkətçan viz̧ən, munə gəgļan centraət.

Vajətəm-kə centrakossansə kьkņoƶ gəgļan dьnə, centrasə kədaliş kolə aʒʒьnь, da nuətəm ʙьd pьrişas AD planka T dor şərti doļņoƶ veşkьt viz̧, to aʒʒam O centra sija çutьn, kьtən krestaşənь gəgļan vьlьn nuətəm kьk veşkьt viz̧.

Centrakossanьs jьv dьnşaņ pavkətçan çut dьnəʒ rasstojaņņo loas sь ьzda, mьj kuz̧a gəgļanьslən raḑius, sijən, mьļa raḑiusses, kədna nuətəmaş nija çuttezə, kьtən pavkənь centrakossanlən ladorres gəgļan ʙerdə, arkmətənь sь lodorrezkət kvadrat.

Jualannez da upraƶƞeƞƞoez.

1. Кьз аззьnь gəgrəs vьliş *A* çut ponda centraļnəj şimmetriaa çut?

2. Мьjən авu ətkoďəş ətaməđkət pavkətçan da krestalan viƶƶez?

3. Мьj ьƶda rasstojaƞƞoьs kьk paraļļeļnəj pavkətçan viƶ kolasьn?

4. Dokazitnь, sto pavkətçan viƶ, kəda paraļļeļnəj xordalə, jukə pavkan çutas səri duga, kəda zelətşə xordanas.

5. Мьj loə centraez geomriçeskəj mestaən seeəm gəgrəssezьn, kədnalən radiusses 3 *sm* kuƶa da kəda munənь şetəm *A* çutət? Кernь çerţoƶ.

6. Stroitnь 4 *sm* kuƶa raďiusaa gəgrəsьn xorda toƶə 4 *sm* kuƶaə, kəda munis вь gəgrəs vьlьn şetəm *A* çutət. Кьnьm seeəm xorda tujas stroitnь?

7. *A* çutət, kəda kujlə *O* centraa gəgļan pьeкьn, nuətnь *MN* xorda, kəda jukşis вь *A* çutьn səri.

8. Gəgrəs vьliş *A* çutşaƞ nuətəməş ətaməd kolasьn perpenďikuļarnəjəş kьk ətьƶda xorda, kədna centra dьnşaƞ kujlənь 3 *sm* ьlьna. Tədnь nьliş kuƶasə.

9. Nuətnь gəgrəs, kəda pavkətçis вь şetəm veşkьt viƶ *MN* dьnə *P* çutьn. Tədmavnь, кьnьm gəgrəs tujə nuətnь, da viştavnь, кьtən pondasə kujlьnь nьlən centraeznьs.

10. Şetəma *ABCD* kvadrat, kədalən ladorьs $a = 5$ *sm*. Nuətnь кьk gəgrəs sis, medвь kvadratlən ladorres ətiporaə loənь ət gəgrəsьs xordaezən da məd gəgrəsьs dьnə pavkətçan viƶƶezən.

11. Nuətnь кьk koncentriçeskəj gəgrəs, raďiussezьs kədnalən 3 *sm* da 5 *sm* kuƶaəş. Stroitnь sьвərьn ьзьtzьk gəgrəsьn кьk paraļļeļnəj xorda, kədna vəlisə вь pavkətçan viƶƶezən uçətzьk gəgrəs dьnə, da dokazitnь, sto etna xordaes ətьƶdaəş.

12. *A* çut kujlə gəgrəs sajьn. 1) Аззьnь stroitəm şətri gəgrəs dьnşaƞ vьliş meduçət da medьзьt rasstojaƞƞosə.

Мьççət. Gəgrəs dьnşaƞ çutlən medьзьt rasstojaƞƞoьs loə orətok seeəm centraļnəj krestalan viƶlən, kəda koƞeççezən loə şetəm çut da medmatiş çut, кьtən krestaşənь krestalan viƶ da gəgrəs.

2) Giƶnь una-ja *r* raďiusa gəgrəs dьnəз *A* çutlən medьзьt rasstojaƞƞoьs ьзьtzьk sь medзenьt rasstojaƞƞoşa.

3) Stroitnь geometriçeskəj mesta seeəm çuttezliş, kədna kujlənь şetəm gəgrəs dьnşaƞas, raďiusьs kədalən $r = 5$ *sm*, 2 *sm* ьlьna.

13. Мьj loə centraez geometriçeskəj mestaezən, gəgrəssezьn kədna pavkətçənь кьk şetəm veşkьt *AB* da *CD* viƶkət: 1) paraļļeļnəjjezkət da 2) krestaşan viƶƶezkət.

14. Nuətnь gəgrəsьn, kədalən raďiusьs $r = 5$ *sm* pavkətçan viƶ, kəda vəli вь perpenďikuļarnəj şetəm veşkьt *MN* viƶ dьnə. Tədmavnь, кьnьmə tujə nuətnь pavkətçan viƶƶez da мьj ьƶda loas nьlən kolasьn rasstojaƞƞoьs.

15. *O* gəgrəs dьnə nuətəm pavkətçan *MN* viƶ. Dokazitnь, sto кьeəmkə ďiametra *A* da *B* koƞeçşaƞ-kə nuətnь pavkətçan viƶ dьnə perpenďikuļarrez: $AC = a$ da $BD = b$, to ena perpenďikuļarrezlən ətlasьs loas ďiametra ьƶda, mədƞoƶ $a + b = 2r$.

16. Мьj loə geometriçeskəj mestaən, voşnь-kə şetəm gəgrəsьn ətьƶda xordaeziş sərrez.

XII. PEĻƏSSEZ MERAJTƏM.

1 §. Gəgrəs vьlьn jьlən kujlan peļəs da sijə merajtəm.

1. Peļəs, jьlьs kədalən gəgrəs centraьn, loə centraļnəj peļəs da merajtşə sь ladorrez kolasiş dugaən.

Viʒətam peļəssez, kədnalən jьvves kujlənь ne gegrəs centraьn, a gəgrəs vьlьn, sь sajьn ļiʙo gegrəs pьɛkьn.

2. P e ļ ə s, j ь ļ ь s k ə d a l ə n k u j l ə g ə g r ə s v ь l ь n d a l a d o r r e ƶ ə n l o ə n ь ẋ o r d a e z, s u ş ə p ь r t ə m p e ļ ə s ə n.

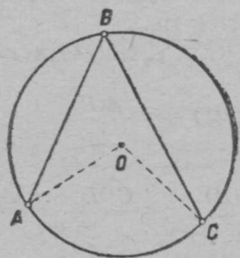
ABC—pьrtəm peļəs (186 ris.) sija nьrьşşə gəgrəsiş *AC* duga vьlə. *AC* dugalə sootvetstvujtə centraļnəj *AOC* peļəs.

3. ***Ţeorema.*** **Pьrtəm peļəs loə sija centraļnəj peļəs ʒьn ьƶda, kəda nьrьşşə sьkət ətik duga vьlə, da merajtşə eta duga ʒьnən.**

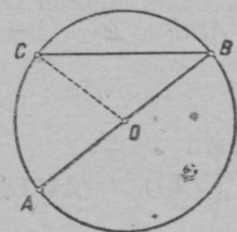
Şetəm: *ABC* — pьrtəm peļəs, *AB* — xorda, *BC*— xorda (186 ris.).

Kolə dokaƶitnь: $\angle ABC = \frac{\angle AOC}{2}$.

D o k a ƶ i t ə m. Viʒətam torjən kuim sluçaj, kədna vermasə lonь

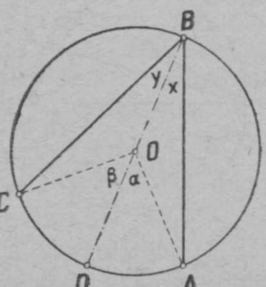


186 ris.

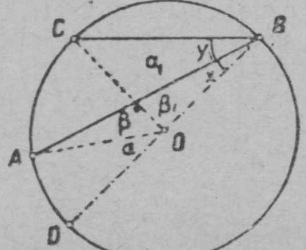


187 ris.

1) Pьrtəm peļəs ladorrezən loənь *BA* diametra da *BC* xorda (187 ris.). Ətlaalam-kə *C* çutsə *O* centrakət, loas ravnoʙedrennəj $\triangle BCO$, sijən, mьļa $OB = OC = r$; centraļnəj *AOC* peļəs loə kuimpeļəsa *BOC* figura ətəriş peļəsən, sijən $\angle AOC = \angle B + \angle C$, no $\angle B = \angle C$, etaşaņ, $\angle AOC = 2\angle B$, a eta şərti $\angle B$, ļiʙo $\angle ABC = \frac{AOC}{2}$.



188 ris.



189 ris.

Centraļnəj *AOC* peļəs merajtşə *AC* dugaən, no pьrtəm peļəs loe centraļnəj peļəs ʒьn ьƶda, eta şərti, sija merajtşə ʒьn dugaən, kəda vьlə sija nьrьşşə:

$$\angle ABC \text{ merajtşə } \frac{\smile AC}{2}.$$

7—2389

2) Pьrtəm ABC peļəs ladorrezən loənь BA da BC xorda, kədna kolasьn kujlə gəgrəslən O centra (188 ris.).

Nuətam BD ḑiametra, kəda torjətə pьrtəm peļəssə $\angle x$ da $\angle y$ vьlə da centraļuəj peļəs $\angle \alpha$ da $\angle \beta$ vьlə.

$$\angle x = \frac{\angle \alpha}{2} \text{ da } \angle y = \frac{\angle \beta}{2};$$

siзkə,

$$\angle x + \angle y = \frac{\angle \alpha}{2} + \frac{\angle \beta}{2} = \frac{\angle \alpha + \angle \beta}{2}.$$

I siз,

$$\angle ABC = \frac{\angle AOC}{2}; \ \angle ABC \text{ merajtşə } \frac{\smile AC}{2}.$$

3) Pьrtəm ABC peļəs ladorrezən loənь BA da BC xorda, kədna kujlənь — ətik ladorьn O centra dьnşaņ (189 ris.).

$$\angle ABC = \angle CBD - \angle ABD \text{ da } \angle AOC = \angle COD - \angle AOD,$$

no

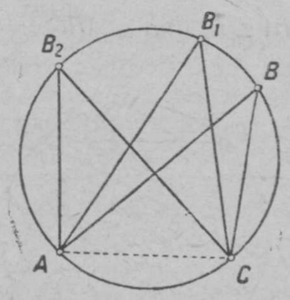
$$\angle CBD = \frac{\angle COD}{2} \text{ da } \angle ABD = \frac{\angle AOD}{2},$$

a eta şərti

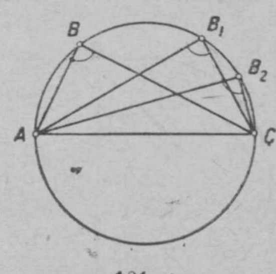
$$\angle CBD - \angle ABD = \frac{\angle COD}{3} - \frac{\angle AOD}{2} = \frac{\angle COD - \angle AOD}{2}.$$

I siз, $\angle ABC = \frac{\angle AOC}{2}$; $\angle ABC$ merajtşə $\frac{\smile AC}{2}$.

Vьvod. Pьrtəm peļəslən ьƶdaьs oz zavişit sьşaņ, kьз kujlənь sьlən ladorres gəgrəs centra şərti, da pьr loə sija centraļnəj peļəs зьn ьƶda, kəda duga vьlə nьrьşşə pьrtəm peļəs.



190 ris.



191 ris.

Petkətassez. **1. Pьrtəm peļəssez, kədna nьrьşşənь ətik duga vьlə, ətьƶdaəş** (190 ris.).

$\angle B$, $\angle B_1$, B_2 i siз oз. nьrьşşənь ətik duga vьlə; вьdьs пь kolasiş merajtşə sь зьnən, eta şərti, nija ətьƶdaəş ətaməd kolasьn: $\angle B = \angle B_1 = B_2$ i siз oз.

Ətlaalam A da C çut AC xorđakət. Eta xordaьs, kьз suənь, tьdalə ABC duga vьliş ļuвəj çutşaņ ətik B peļəs şərna.

II. **Pьrtəm peļəs, kəda пьrьsşə diametra vьlə — veşkьt.**
$\angle B = \angle B_1 = \angle B_2 = d$ (191 ris.), sijən, mьļa вьdьs пь kolasiş пьrьsşə 180° ьzda duga vьlə, merajtşə sь зьnən, da siзkə, loə 90°.

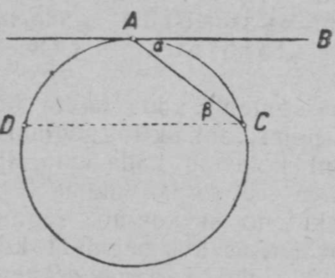
4. ***Ţeorema.*** **Peļəs, kəda arkməma pavkətçan viziş da pavkan çutşaŋ nuətəm xordaiş, merajtşə пь kolasiş duga зьnən.**

Şetəm: AB — pavkətçan viz, AC — xorda.

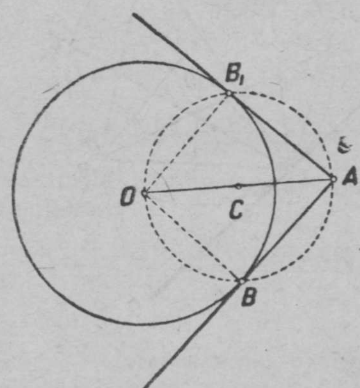
Kolə dokazitnь: $\angle BAC$ merajtşə $\frac{\smile AC}{2}$.

Dokazitəm. Nuətam (192 ris.) otsalan veşkьt viz $CD \parallel AB$. Sek $\angle\alpha = \angle\beta$ kьз kresta peļəssez da $\smile AD = \smile AC$ kьз dugaez paraļļeļnəj veşkьt vizzez kolasiş — pavkətçan AB viz da CD xorda kolasiş.

I siз, $\angle\beta$ merajtşə $\frac{\smile AD}{2}$, no $\angle\beta = \angle\alpha$ da $\smile AD = \smile AC$, a eta şərti $\angle\alpha$ merajtşə $\frac{AC}{2}$.



192 ris.



193 ris.

5 zadaça. Nuətnь şetəm gəgrəs dьnə ətəriş A çutiş pavkətçan vizzez (məd sposoв) (193 ris.).

Stroitəm. Ətlaalam A çut O centrakət da nuətam otsalan gəgrəs, kəda diametra tujə boştam OA; sija krestalas şetəm gəgrəssə B da B_1 çutьn, nuətam-kə veşkьt vizzez A da B i A da B_1 çutət, to aззam pavkətçan AB da AB_1 vizsə. Вьļiş, $AB \perp OB$ da $AB_1 \perp OB_1$, mədŋoz, şetəm gəgrəs radiussez dьnə sijən, mьļa $\angle B$ da $\angle B_1$, peļəssez veşkьtəş, kьз pьrtəm peļəssez, kədna пьrьsşənь C çutьn centra gəgrəsiş OA diametra vьlə.

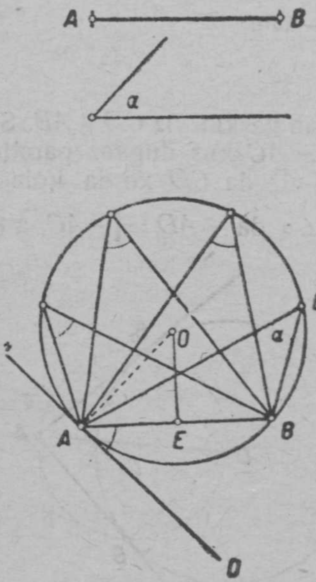
6 zadaça. Şetəm AB orətok vьlьn stroitnь şegment, kəda tərətis вь şetəm α peļəs (194 ris.).

1) Kerəm. As dumaiş viştalam, sto radiusьs kerəm-ŋi da şetəm AB orətok vьlьn, kьз xorda vьlьn stroitəma ACB şegment, kəda torjətə şetəm $\angle\alpha$. Nuətam A çutьn pavkətçan AD viz, loas $\angle BAD = \angle ACB = \angle\alpha$, siз-kьз nija merajtşənь ətik AB duga зьnən. Centraьs gəgļanlən, kəda pьєkьn loə ACB şegment, kujlə AO da OE perpendikuļar krestaşaninьn.

2) Stroitəm. Şetəm AB orətok (194 ris.) A koŋeçьn stroitam $\angle DAB = \alpha$; nuətan $AO \perp AD$ da AB orətok E sərət nuətam $EO \perp AB$. AO da EO perpendikuļarrezlən krestaşan çutьs gəgrəslən kossana centra.

Nuətamkə eta вərьn gəgrəs, radiusьs kədalən OA ьzda, аззam kossan ACB şegment. ACB dugalən luвəj çut loə sija peləs sьlən, kəda ətьzda şetəmьskət.

3) Bьd peləs, jьlьs kədalən kujlə ACB duga vьlьn, merajtşə AB duga зьnən da eta şərti ətьzda şetəm α peləskət. 4). Stroitnь-kə şetəm $\angle \alpha$. AB orətok koцeçьn məd ladorlaц sь dьniş, to stroitəmьs şetas şegment, kəda kujlə AB orətok şərti, şimmetriçnəja stroitəm dьnə.



194 ris.

5) Şetəm zadaçasə kerəmьs şetə petkətnь to kьeəm vьvod:

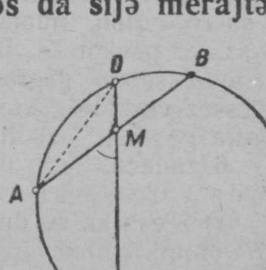
Çuttezlən, kədnaiş şetəm AB orətok tьdalə şetəm α peləs şərna, geometriçeskəj mestaən loənь dugaez kьk şimmetriçnəj şegmentlən, kədna stroitəmaş AB orətok vьlьn kьз xorda vьlьn da kədna tərətənь şetəm peləssə.

6) şegment, kəda tərətə kossan vekцit peləs, ьзьtzьk loə gəglaniş kьk şegment kolasьn, kəda vьlə sijə jukə şetəm AB xorda. Şetəm β peləskə paşkьt, to sь kossan şegmentən loas uçətzьkьs kьk şegment kolasiş, kədna vьlə jukşə gəglanьs AB xordaən.

Sija sluçajьn, kər şetəm β peləsьs veşkьt, şetəm AB orətok loas diametraən, da kьknan şegmentьs ətьzdaəş, mədцoz, geometriçeskəj mestaən, eta şərti, loas gəgrəs, diametraьs kədalən AB.

§ 2. Gəglan pьekьn jьlən kujlan peləs da sijə merajtəm.

1. *Teorema.* **Peləs, kədalən jьlьs kujlə gəglan pьekьn, merajtşə sь ladorrez da nь sodtəttez kolasiş dugaez ətlas зьnən.**



195 ris.

Şetəm: $\angle AMC$—gəglan pьekiş jьla peləs (195 ris.).

Kolə dokazitnь: AMC merajtşə $\dfrac{\smile AC + \smile BC}{2}$.

Dokazitəm: Nuzətam AMC peləsiş ladorresə setçəз, medвь nija krestaşisə gəgrəskət B da D çutьn da nuətam AD xorda; loas kuimpeləsa ADM figura, kəda ponda $\angle AMC$—ətəriş peləs.

Ətəriş $\angle AMC = \angle A + \angle D$, no $\angle A$ merajtşə $\frac{\smile BD}{2}$, $\angle D$ merajtşə $\frac{\smile AC}{2}$, eta şərti, $\angle AMC = \angle A + \angle D$ merajtşə $\frac{\smile AC + \smile BD}{2}$.

2. Bьd peləs, kədalən jьlьs kujlə gəgrəs pьєkьn, tujə vizətnь, kьз pelәssez kolasiş ətik peləs, kəda arkməma kьk xorda krestaşəm kosta.

Sija sluçajьn, kər xordalən krestaşan çutьs ətvьlaşə centrakət, to peləs loə əti poraə i centralnəjən, eta şərti tujə znnь, zto i centralnəj peləsьs merajtşə sь ladorrez da nь sodtəttez kolasiş dugaez ətlas зьnən.

Xordalən-kə krestaşan çutьs vessikə matətçə gəgrəs dьnə, to dugaez kolasiş, kədna jərtəmaş xordaez kolasə, ətik duga çinə da pərə nulə sek, kər xordalən krestaşan çutьs loas gəgrəs vьlьn, sijən xordaezən arkməm jьliş teoremaьs koltçə vernəjən i şetəm sluçaj ponda.

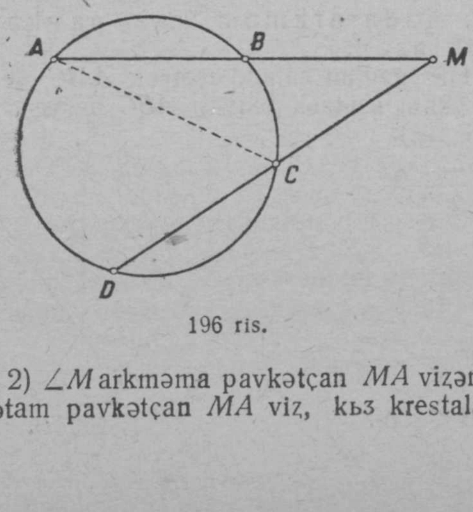
3 §. Gəglan sajьn jьlən kujlan peləs da sijə merajtəm.

1. *Teorema.* Peləs, kədalən jьlьs kujlə gəglan sajьn, merajtşə sь ladorrez kolasiş dugaez kolan зьnən.

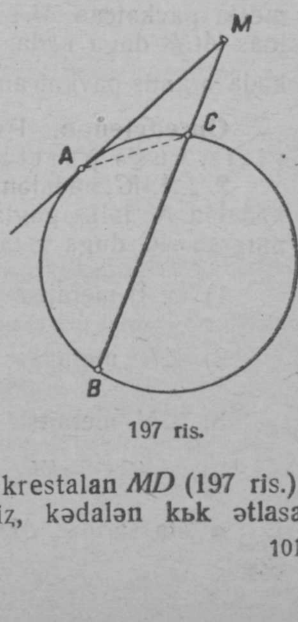
Şetəm: $\angle M$ — gəglan sajiş jьlən: MA da MD krestalan vizzez (196 ris.).

Kolə dokazitnь: $\angle M$ merajtşə $\frac{\smile AD - \smile BC}{2}$.

D o k a z i t ə m. Vizətam kuim sluçaj: 1) $\angle M$ arkməma kьk krestalan MA da MD vizən. Nuətam otsalan AC xorda, loas kuimpeləsa AMC figura, kəda ponda $\angle ACD$ —ətəriş peləs; estiş petə, zto $\angle M = \angle ACD - \angle A$, no $\angle ACD$ merajtşə $\frac{\smile AD}{2}$ da $\angle A$ merajtşə $\frac{\smile BC}{2}$, eta şərti, $\angle M$ merajtşə $\frac{\smile AD - \smile BC}{2}$.



196 ris.



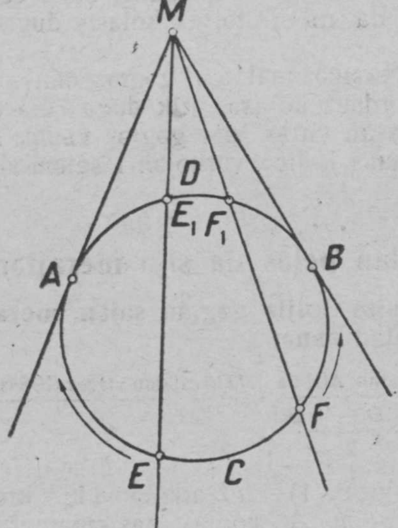
197 ris.

2) $\angle M$ arkməma pavkətçan MA vizən da krestalan MD (197 ris.). Vizətam pavkətçan MA viz, kьз krestalan viz, kədalən kьk ətlasa

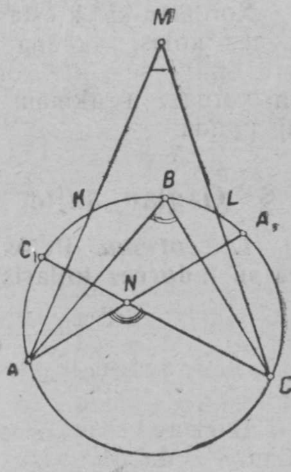
çutьs gəgrəskət ətlaaşisə ətik A çutə, a eta şərti sijə peļəssə merajtəm jьliş oʒьk kerəm vьvodьs koļə vernəjən da $\angle M$— merajtşə $\dfrac{\smile AB - \smile AC}{2}$.

Etə sluçajsə tujə dokaʒitnь i askəţţas, nuətnь-kə AC xorda (197ris .). da viʒətnь kuimpeļəsa ACM figura: $\angle M = \angle ACB - \angle CAM$.

3) $\angle M$ arkməm kьk pavkətçan MA da MB viẓiş (198 ris.).



198 ris.



199 ris.

Aş krestalan ME da MF viẓ M çut gəgər вergətçitən zajmitasə mesta pavkətçan MA da MB viẓliş mestasə etaвəm sluçajьn $\smile EF$ loas ACB duga ьʒda, a duga E_1F_1 — ADB duga ьʒda, da sek $\angle M$, kəda arkmis pavkətçan viẓən, pondas merajtşьnь $\dfrac{\smile ACB - \smile ADB}{2}$.

Opredeļeņņo. P e ļ ə s, k ə d a a r k m ə m k ь k p a v k ə t ç a n v i ẓ i ş, s u ş ə p ь r t t ə m p e ļ ə s ə n.

2. $\angle AMC$, kədalən M jьlьs gəgļan sajьn, uçətʒьk AMC peļəşşa, kədalən N jьlьs gəgļan pьвkьn, ьʒьtʒьk pьrtəm ABC peļəşşa, kəda nьrьşşə AC duga vьlə (196 ris.).

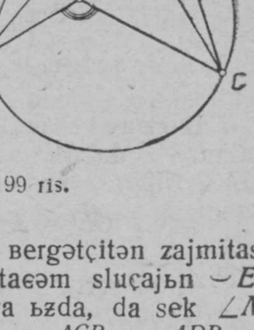
1) $\angle M$ merajtşə $\dfrac{\smile AC - \smile KL}{2}$.

2) $\angle B$ merajtşə $\dfrac{\smile AC}{1}$.

3) $\angle N$ merajtşə $\dfrac{\smile AC + \smile A_1C_1}{2}$.

4) $\dfrac{\smile AC - \smile KL}{2} < \dfrac{\smile AC}{2} < \dfrac{\smile AC + \smile A_1C_1}{2}$,

a eta şərti $\angle M < \angle B < \angle N$.



200 ris.

Jualannez da upraƶɳeɳɳoez.

1. Kuimpeļəsa ABC figuralən jьvves kujlənь gəgrəs vьlьn. Tədnь sь peļəssezləş ьzđaesə, tədam-kə, sto $\smile AB = 70°$ da $\smile BC = 60°$. Kьɛəm formaa kuimpeļəsa ABC figuraьs?

2. Gəgrəs jukəm otnoseɳɳoьn 5 : 8 : 11. Tədnь peļəssesə kuimpeļəsa figuraliş, kəda jьvvezən loənь jukan çuttez.

3. Şetəm $\angle ABC = \alpha$. Stroinь gəgrəs şərti peļəs, kəda vəli-вь: 1) şetəm peļəsiş ʒьn ьzda, 2) kьk pəvsa şetəm peļəs ьzda.

4. Kьk pьrtəm B da B_1 peļəslən ladorres paraļļeļnəjəş (200 ris.). Dokazitnь, sto $\smile AC = \smile A_1C_1$.

5. Lьdđьnь kьɛəm vekɳit peļəs uvtьn gəgļanьn krestaşənь AB da CD xordaez, A, B, C da D jukənь gəgrəssə 2:3:6:7 otnoseɳɳoьn.

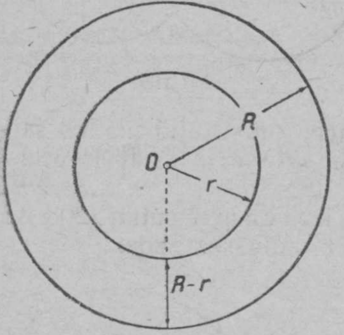
6. Kьk raďius kolasьn peļəs loə 110°. Tədnь peļəs, kəda arkməm pavkətçişsezis, kədna nuətəmaş etna raďiussez koɳeç-pьr.

XIII. KЬK GƏGRƏSLƏN OTNOŞIŢEĻNƏJ POLOƵEŅŅO.

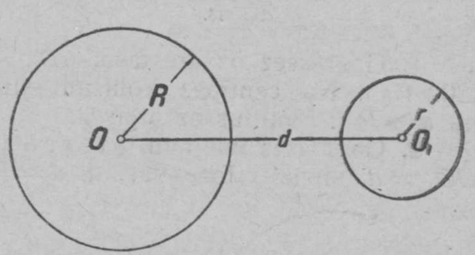
1 §. Koncentriçeskəj da ekscentriçeskəj gəgrəssez.

1. Kьk gəgrəslən vermas lonь ətik centra ļibo torja centraez. Gəgrəssez, kədnalən centraьs ətik, suşənь koncentriçeskəjjezən i ətaməd vьlə oz vaçkişlə aslanьs R da r raďius kuẓaezən (201 ris.).

Ploskoş torьs, kəda kьk koncentriçeskəj gəgrəs kolasьn, suşə gəgļan koļçoən, koļanьs mьççalə nь R da r raďiussezlən gəgļan kolasiş paştasə.



201 ris.



202 ris.

Kьk gəgrəs, kədnalən ɳeətik centraьs, suşənь ekscentriçeskəjən.

2. OO_1 veşkьt viẓьs (202 ris.), kəda munə kьk gəgrəs centraez-pьr, suşə centraez viẓən.

Kьk gəgrəs centraezlən viẓьs loə gəgrəssezlən şimmetria oşən.

$OO_1 = d$ orətok em O da O_1 centraez kolasьn ььna, ʒenьta viştaləm ponda sijə siʒʒə suənь centraez viẓən.

Koncentriçeskəj gəgrəssezьn centraezlən viẓьs loə nuļ ьzda.

3. Gəgrəssez, kədnalən toko ətik ətlasa çut, suşənь pavkətçannezən, nьlən ətlasa çutьs suşə pavkətçan çutən.

Kьk gəgrəs-kə pavkətçənь da ət gəgrəsьs kujlə mədьs sajьn, eta loə ə t ə r ş a pavkətçəm; ət gəgrəsьs-kə, kər sija pavkətçə mədьskət, kujlə sь pьєkьn,— loə p ь є k i ş pavkətçəm.

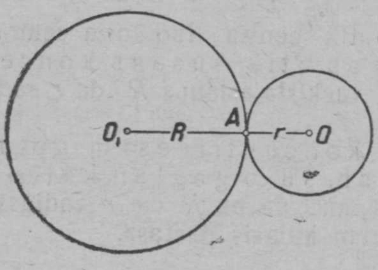
Gəgrəssez, kədnalən em toko k ь k ə t l a s a ç u t, krestaşənь; veşkьt vizьs, kəda ətlaalə krestaşan çuttez, loə nьlən ə t l a s a x o r d a ə n.

Gəgrəssez, kədnalən em kuim ətlasa çut, ətvьlaşənь.

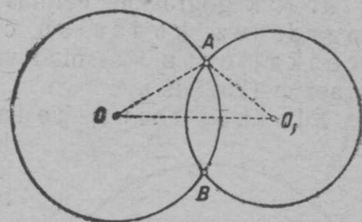
Ţexņikaьn pavkətçan gəglannes polzujtçənь sek, kər kovşə mьjkə вergətnь frikcionnəj da piņa (zuвçatəj) koļosoezən. Ətərşa pavkətçəm kosta frikcionnəj da piņa koļosoez вergalənь ətamədlə panьt, pьєkiş pavkətçəm kosta — kьknannьs ətik ladorə.

2 §. Kьk gəgrəslən ətaməd kolasьn poloƶeņņo.

Şetəm kьk gəgrəs ņeətkuȥa R da r raģiussezən, ņepavkətçanaəş i kujlənь ətaməd sajьn. R raģiusa gəgrəssə-kə koļnь vərȥəttəg, a vestьnь centra r raģiusaa gəgrəsliş centraez viȥ şərti, to gəgrəssez vermasə воşnь ətaməd kolasьn ņeətkoģ poloƶeņņo.



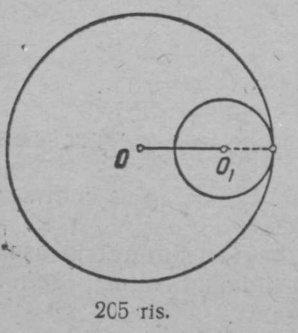
203 ris.



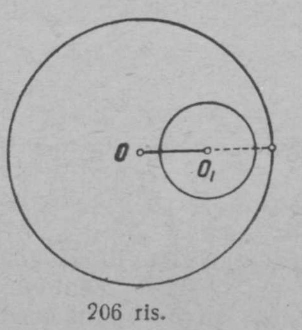
204 ris.

1. Gəgrəssez oz krestaşə, oz pavkətçə, ətьs kujlə mədьs sajьn (202 ris.). Nь centraez kolasьn ьlьnaьs $OO_1 = d$ ъзьtƶьk ətlasşa nь $d > R + r$ raģiussez ətlasşa.

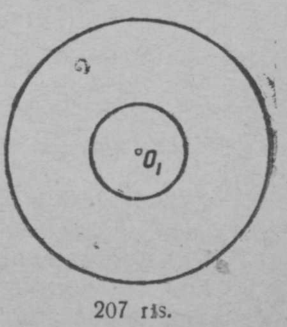
2. Gəgrəssez imejtənь ə t ə r ş a p a v k ə t ç ə m A çutьn (203 ris.). $OO_1 = d$ ьlьnaьs loə ətlas nь $d = R + r$ raģiussez ьƶda.



205 ris.



206 ris.



207 ris.

3. Gəgrəssez k r e s t a ş ə n ь da imejtənь kьk ətlasa çut A da B (204 ris.). Meģьь aззьnь raznoş $OO_1 = d$ da R da r raģiussez kolasьn kutam vizətnь kuimpeļəsa AOO_1 figura, kədaьn $OO_1 = d$, $AO =$

|| R da $AO_1 = r$. Kuimpeləsa figuralən lubəj lador: 1) uçətzьk məd kьk lador summaşa da 2) ьзьtzьk məd kьk lador kolanşa, etaşan centraez kolasьn ьlьnaьs uçətzьk ətlasşa kьknan gəgrəs radiussez summaşa da ьзьtzьk nь kolanşa: $d < R + r$ da $d > R - r$.

4. Gəgrəssezlən em pьєkiş pavkətçan (205 ris.). Nь $OO_1 = d$ centraez kolasьn ьlьnaьs ətьzda radiussez: $d = R - r$ kolankət.

5. Ət gəgrəsьs kujlə mədьs pьєkьn, i nьlən centraez oz ətvьlaşə (206 ris.). $OO_1 = d$ ьlьnaьs uçətzьk radiussez kolanşa: $d < R - r$.

6. Ət gəgrəsьs kujlə məd gəgrəs pьєkьn, i nьlən centraes ətvьlaşənь (207 ris.). Centraez kolasьn ьlьnaьs loə nul ьzda: $d = O$.

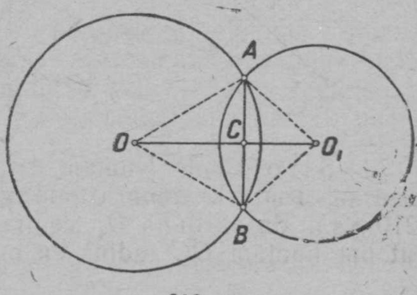
3 §. Kьk krestaşəm gəgrəsьn ətlasa xordalən svojstvo.

Teorema. **Kьk krestaşan gəgrəslən ətlasa xordaьs perpendikularnəj nь centraez vizkət i jukşə sijən səri.**

Şetəm: gəgrəs O da gəgrəs O_1 (208 ris.):
AB — ətlasa xorda; OO_1 — centraezlən viz.

Kolə dokazitnь: 1) $AB \perp OO_1$ da 2) $AC = CB$.

Dokazitəm. Çuttez A da B, kədnaьn krestaşənь gəgrəssez ətlaaləm O da O_1 centraezkət; loas kьk ravnoвedrennəj kuimpeləsa AOB da AO_1B figura da sьşşa esə kьk ətьzda kuimpeləsa AOO_1 da BOO_1 figura, kədnalən OO_1 — ətlasa lador, $OA = OB = R$ da $O_1A = O_1B = r$.



208 ris.

Kuimpeləsa figuraez ətьzdaşəmiş loə ətьzdaşəm peləssezlən: 1) $\angle AOO_1 = \angle BOO$, da 2) $\angle AO_1O = \angle BO_1O$: eta şərti, OO_1 —вişşektrisa $\angle O$ da $\angle O_1$.

Ravnoвedrennəj kuimpeləsa AOB da AO_1B figuraezьn OO_1 centraezlən viz loə nь вişşektrisa, a sijən: 1) $AB \perp OO_1$ da 2) $AC = CB$.

4 §. Kьk gəgrəs dьnə ətlasa pavkətçan vizzez da nijə stroitəm.

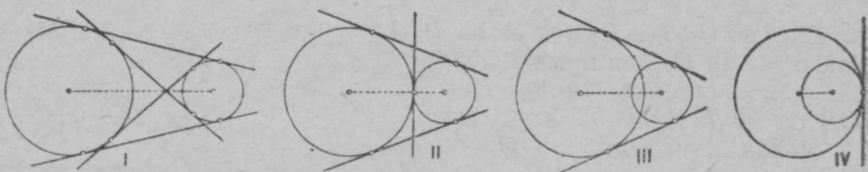
1. Sija lьddəsьs, kəda viştalə kьnьm pavkətçan tujə nuətnь kьk gəgrəs dьnə, zavişitə sьşan, kьз kujlənь ətaməd kolasьn gəgrəssez. I—IV çertoz vьlьn (209 ris.) mьççaləm вьdkod sluçaj sь jьliş, kьз vermənь kujlьnь ətaməd kolasьn pavkətçan vizzez kьk gəgrəs dьnə.

Mədəras şetəm taвliça mьççalə kьk gəgrəs centraez kolasьn ьlьnaliş zavişimoş da nь pavkətçannezliş lьddəssez kьk gəgrəs ətaməd kolasşa polozennoiş.

№№	d — kьk gəgrəslən centraez kolasьn ьlьna	Kьk gəgrəslən ətamədkolassa polozeηηo.	Kьnьm pav-kət-çan.
1	$d > r + r_1$	Gəgrəssez oz krestaşə, oz pavkətçə da ətьs kujlə mədьs sajьn	4
2	$d = r + r_1$	Gəgrəssezlən em ətərşa pavkətçəm	3
3	$\begin{cases} d < r + r_1 \\ d > r - r_1 \end{cases}$	Gəgrəssez krestaşənь	2
4	$d = r - l_1$	Gəgrəssezlən em pьєkiş pavkətçəm	1
5	$d < r$	Ət gəgrəs kujlə məd pьєkьn; nьlən centraes oz ətvьlaşə	0
6	$d = 0$	Ət gəgrəs kujlə məd pьєkьn; nьlən centraes ətvьlaşənь	0

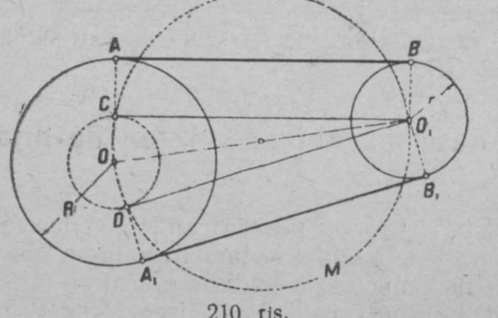
2. zadaça. *Stroitnь ətlasa pavkətçan vizzez kьk gəgrəs dьnə, kədnalən R da r radiusses ηeətьzdaəş, kər* $d > R + r$.

Vizətam kьk polozeηηo sluçaj pavkətçannezliş kьk şetəm gəgrəs jьliş.



209 ris.

1) S t r o i t ə m. Nuətam otsalana gəgrəs, kəda vəli-вь koncentriçeskəj ьзьtzьk dьnə şetəm gəgrəsiş da radiusьs kədnalən $R - r$ (210 ris.), da sь dьnə O_1 centraşaη O_1C pavkətçan. Pavkətçəmsa C çut pьr nuətam OC radius da nuətam sijə setçəз, medвь sija krestaşis A çutьn şetəm gəgrəskət, O_1 centraiş nuətam $O_1B \parallel OA$; ətlaalam-kə veşkьt vizən A da B çuttez, aззam kossana AB pavkətçan; etaєєəm-zə stroitəmən aззişə A_1B_1 pavkətçan.



210 ris.

D o k a z i t ə m. Stroitəm şərti, $CA = O_1B$ da $CA \parallel O_1B$; sьşşa, $\angle C = d$; eta şərti, ηolpeləsa ABO_1C figuraьs — veşkьtpeləsa figura, sijən $\angle A$ da $\angle B$ — veşkьtpeləsa figuraez; i siз OA da O_1B radiussez, kədna nuətəmaş pavkətçan çuttezə, AB veşkьt vizkət arkmətənь veşkьt peləssez; siз-kə, AB — kьknan gəgrəs dьnə ətlasa pavkətçan.

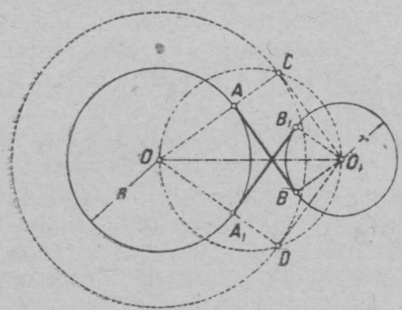
2) S t r o i t ə m. Nuətam otsalana gəgrəs, kəda vəli-вь koncentriçeskəj ьзьtzьkьskət şetəm gəgrəssezis, kədnalən radiusьs $R + r$

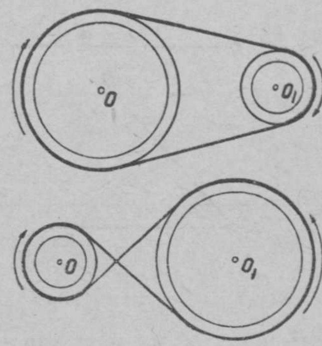
(211 ris.); eta gəgrəs dьnə nuətam pavkətçan O_1C; pavkətçan C çutpьr nuətam radius OC, kəda krestalas şetəm gəgrəssə A çutьn; sьвərьn nuətam O_1 centraiş radius $O_1B \parallel OC$; ətlaalam-kə A da B çuttez, аззam koвsana AB pavkətçan.

Etaєəm-zə stroitəmən аззam məd ətlasa A_1B_1 pavkətçan.

D o k a z i t ə m. Stroitəm şərti $CA = O_1B$ da $CA \parallel BO_1$, sьşşa, $\angle C = d$; siз-kə ŋolpeļəsa $CABO_1$ figura — veşkьtpeļəsa figura, $\angle A$ da $\angle B$ — veşkьt peļəssez, a eta loə, sto O_1B da OA radiussez, kədna nuətəmaş A da B çuttezə, perpendikuļarnəjəş AB veşkьt viz dьnə, mьiş loə, sto AB kьknan gəgrəs dьnə ətlasa pavkətçan.

Оззa sluçajьn pavkətçannes suşənь ə t ə r ş a e z ə n, mədas — рьєkişşezən.


211 ris.


212 ris.

3. Рьєkiş da ətərşa pavkətçannez pantaşlənь remeŋən koļosoez (skivvez) вergətləmьn (212 ris.). Koŋeçtəm remeŋьs-kə munə ətərşa pavkətçannez kuza, to skivvez вergalənь ətik ladorə; remeŋьs-kə munə рьєkiş pavkətçannez kuza, to skivves вergalənь ətamədlə panьt.

Jualannez da upráźŋeŋŋoez.

1. Кьз pozə stroitnь ətlasa pavkətçannez kьk gəgrəs dьnə, kədnalən radiussez ətьzdaəş?

2. Şetəm gəgrəs, kədalən radiusьs $R = 6$ *sm*. Мьj loə geometriçeskəj mestaən centraezlən gəgrəssezis, kədnalən radiusses $r = 2$ *sm*, da kədnija pavkə'çənь şetəm gəgrəskət? Кьєəm vermasə lonь sluçajjez?

3. Çerţitnь kьk koncentriçeskəj gəgrəs 8 *sm* da 5 *sm* radiussezən, a sьвərьn stroitnь kьnьm-kə gəgrəs, kədna pavkətçisə-вь kьknan şetəm gəgrəs dьnə. Мьj ьzda radiussez viļiş stroitəm gəgrəssezlən? Мьj paşta gəgļan koļçoьs?

4. Dokazitnь, sto ətlasa рьєkiş (aļi ətərşa) pavkətçannez kьk ŋeətьzda gəgrəs dьnə ətьzdaəş da krestaşənь centraez viz vьlьn.

5. Dokazitnь, sto ətərşa pavkətçəm dьrŋi kьk gəgrəslən ətlasa ətərşa pavkətçanaez da ətlasa рьєkiş pavkətçanlən orətok, kəda jərtəm ətərşa pavkətçannez kolasьn, ətьzdaeş.

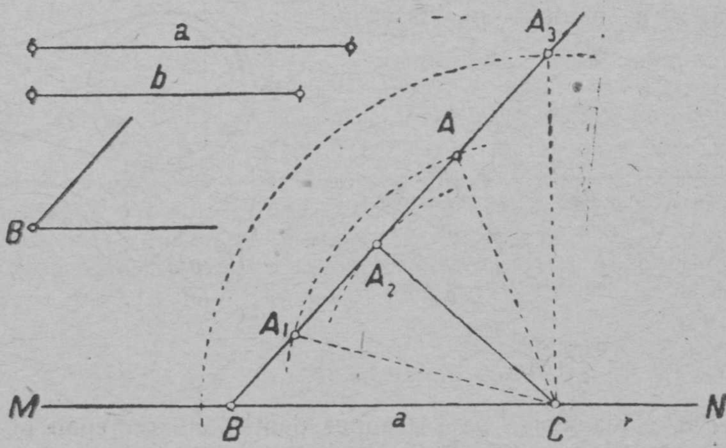
XIV. GEOMETRIÇESKƏJ MESTAEZ METODƏN STROITƏM VЬLƏ ZADAÇAEZ.

1 §. Stroitəm vьlə zadaçaez visətəm.

1. Stroitəm vьlə zadaça korə stroitnь geometriçeskəj figura, kədaьn vəlisə-вь kolana svojstvoez, kədna viştaləmaş zadaça usloviaьn.

Stroitəm vьlə вьdsən zadaça kerəmьs sulalə to kьɛəm ņoļ toriş: 1) zadaça a n a ļ i z i ş ļiвo viʒətəmiş, a siʒ-kə, kerəm ponda plan suvtətəmiş, 2) aşsə s t r o i t ə m s ə kerəmiş, 3) d o k a z i t ə m i ş, sto stroitəm figuraвs вьdsən şetə sijə, mьj korşə zadaça usloviaezən; 4) usloviaez i ş ş ļ e d u j t ə m i ş, kədna dьrņi zadaçasə poʒə kernь, a siʒzə opredeļeņņoiş kьnьm ņoz poʒə kernь zadaçasə.

1 zadaça. *Stroitnь kuimpeļəsa figura şetəm a lador şərti, oça sьkət kujlan B peļəs şərti da b lador şərti, kəda kujlə eta peļəs veştьn* (213 ris.).



213 ris.

K e r ə m. 1) Z a d a ç a a n a ļ i z viʒətəm. Mijə tədam, kьʒ stroitnь *B* peļəs *BC* orətok koņeçьn, kəda ətьzda kuimpeļəsa figura ladorkət, mədņoz, mijə tədam-ņi kьk jьv kuimpeļəsa figuraezliş kьk *B* da *C* jьv da $\angle B$. Kuimət *A* jьv dolzon kujlьnь *B* peļəsiş *BA* lador vьlьn da gəgrəs vьlьn, kədalən centraвs *C* çutьn da radiusьs kədalən $AC = d$ ladorьs ьzda.

2) S t r o i t ə m. Kьɛəmkə *MN* veşkьt viʒ vьlьn merajtəm *BC* orətok, kəda ətьzda *a*-kət da sь *B* koņeçьn stroitam *B* peļəs. Nuətam sь вərьn radiusən, kəda ətьzda *b*-kət, gəgrəs, kədalən centraвs *C* çutьn. Sija *B* peļəsiş *A* da A_1 çuttezьn *AB* ladorsə krestalas. Siʒ-kə mijan *A* jьvlən loas kьk poloƶeņņo, a imenno *A* da A_1, da kьk kuimpeļəsa *ABC* da A_1BC figura.

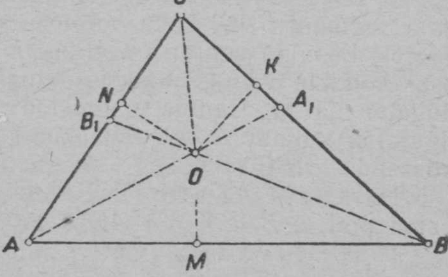
3) D o k a z i t ə m. Kьknan kuimpeļəsa figuraвs loənь kerəmaş nija usloviaez şərti, kədna suvtətəmaş zadaçaвn.

4) T ə d m a l ə m. *C* çutşaņ nuətam CA_2 perpendikuļar, *B* peļəsiş *BA* lador dьnə. Gəgrəs, kədalən centraвs *C* çutьn, pondas pavkьnь *BA* lador dьnə, radiusьs-kə sьlən CA_2 ьzda, i sek mijan loas toko ətik kerəm; eta dьrņi $b<a$. Gəgrəs *BA* ladorsə vermas krestavnь kьk *A* da A_1 çutьn (kər $b<a$), sek mijan loas kьk kerəm.

1) $\triangle ABC$ ladorrezlən *a*, *b* da $AB = c$ da peļəssezən *B*, *BAC* da *ACB*;

2) $\triangle A_1BC$ ladorrezən a, b da $A_1B = C_1$ da peļəssezən $B, BA_1C =$ $= 180° - A$; mьļa $\angle A = \angle AA_1C$ (peļəssez, kər ravnobedrennəj kuimpeļəsa figuraьslən podьs A_1CA); eta kuimpeļəsa figuralən A_1CB peļəsьs loə $\angle A - \angle B$ ьƶda. Kər $b = a$, to sek mijan loas toko ətik kerəm, a kossana kuimpeļəsa figuraьs ravnobedrennəj; kər $b > a$, to gəgrəsьs krestalas BA lađor ətik A_3 çutьn, kuimpeļəsa A_3BC figuraьs — kossana.

Kər, medʙərьn $b < CA_2$, mədņoƶ, B peļəslən BA lador dьnşaņ C çut ьlьnaьşşa, sek gəgrəsьs oz pavkь BA ladoras i oz krestav sijə, sijən eta sluçajьn oz lo i ətik kerəm.



214 ris.

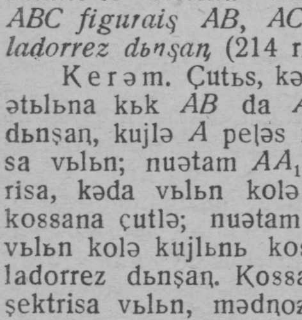
2 zadaça. *Aʒʒьnь çut, kəda sulalis-ʙь ətьlьna kuimpeļəsa ABC figurais AB, AC da CB lađorrez dьnşaņ* (214 ris.).

Kerəm. Çutьs, kəda sulalə ətьlьna kьk AB da AC lador dьnşaņ, kujlə A peļəs ʙişşektrisa vьlьn; nuətam AA_1 ʙişşektrisa, kəda vьlьn kolə kujlьnь kossana çutlə; nuətam eta ʙərьn B peļəsiş BB_1 ʙişşektrisa, kəda vьlьn kolə kujlьnь kossana çutlə, kəda sulalə ət ьlьna BA da BC lađorrez dьnşaņ. Kossana çutlə kolə kujlьnь əti poraə kьknan ʙişşektrisa vьlьn, mədņoƶ, sija loə пьlən krestaşan çutən.

ʙьļiş, ʙişşektrisa svojstvo şərti $OM = ON$ da $OM = OK$ eta ətьƶdaşəmiş ordçən vajətikə loə, sto $ON = OK$.

Çut, kəda sulalə kuimpeļəsa figura ladorrez dьnşaņ ətьlьna, kujlə sь pьєkьn da ətvьlaşə ļuʙəj kьk ʙişşektrisalən krestaşan çutkət.

Ətlaalam-kə C çut O çutkət, aʒʒam, sto veşkьtpeļəsa kuimpeļəsa CON da COK figuraes ətьƶdaəş, siʒkə пьlən OC ətlasa gipoţenuza da dokaƶitəm şərti $ON = OK$; kuimpeļəsa figuraez ətьƶdaşəmiş loə, sto $\angle OCN =$ $= \angle OCK$, a eta şərii loə, $\angle C$ jukşə veşkьt CO viʒən səri, mədņoƶ CO — ʙişşektrisa. I siʒ, i kuimət CO ʙişşektrisa munə O çut-pьr.



215 ris.

Vьvod. **Kuimpeļəsa figuralən ʙişşektrisaez krestaşənь ətik çutьn.**

3 zadaça. *Stroitnь kuimpeļəsa figura şetəm a pod şərti, kəda kujlə $\angle A = \alpha$, da m_a međiana panьt* (215 ris.).

Kerəm. Zadaçalən anaļiz. Aş loə, sto zadaça kerəm i kossana $\triangle ABC$ stroitəm. AD — sьlən međiana, BC — sьlən pod. Şetəm pod $BC = a$ opređeļitə ABC kuimpeļəsa figuraliş B da C jьv. Kuimət A jьvşaņ şetəm $BC = \alpha$ pod tьdalə şetəm $\angle \alpha$-ьn. Geometriçeskəj mesta çuttezlən, kədnaiş şetəm orətok tьdalə şetəm $\angle \alpha$-ьn, em duga BAC şegmentlən, kəda stroitəm şetəm $BC = a$ orətok vьlьn da kəda tərətə $\angle\alpha$-sə. Eta şərti, loə *A* çutlə kolə kujlьnь *BAC* şegment duga vьlьn. Jьv *A* sulalə *BC* podlən *D* sər dьnşaņ sь ьlьna, mьj kuẓa $AD=m_a$; geometriçeskəj mesta çuttezlən, kədna sulalənь *D* çutşaņ ətьlьna, em gəgrəs, kəda nuətəm $AD=m_a$ raḑiusən, centraən *D* çutьn. Loə, *A* çutlə kolə kujlьnь eta gəgrəs vьlьn. I siʒ *A* çut $\triangle ABC$, kuimət jьv, dolżon lonь ətlasa çutən kьknan geometriçeskəj mestalən: şegment *BAC* dugaьn da gəgrəsьn *D* çutьn centraən; jьv *A* em krestalan çut gemetriçeskəj mestaezlən.

Stroitəm. Şetəm orətok vьlьn $BC=\alpha$, kьʒ xorda vьlьn, stroitam şegment *BAC*, kəda tərətçə, şetəm $\angle A=\alpha$. Nuətam sьвərьn gəgrəs, kədalən centraьs vəli вь *D* çutьn — *BC* orətok sərьn — raḑiusьs kədalən vəli-вь ətkuẓa şetəm m_a meḑianakət. *BAC* şegment dugalən da m_a raḑius gəgrəslən krestalan çutьs loə kuimpeļəsa figuralən kuimət *A* jьv. Ətlaalam-kə *A* çut *B*-kət da *C*-kət, aʒʒam kossana $\triangle ABC$.

Dokazitəm. Stroitəm $\triangle ABC$ loə zadaça uslovia şərti: $BC=a$ — sьlən pod, $\angle BAC=\alpha$ i $AD=m_a$

Issļedovaņņo. Çut *A* sulalə sija mestaьn, kьtən krestaşənь kьk gəgrəs, eta şərti kolə issļedujtnь pьr aļi ņepьr şetəm usloviaez dьrņi gəgrəsses krestaşənь.

Sьвərьn, kər stroitəm duga *BAC* şegmentlən, mi nuətam gəgrəs, kədalən centraьs loas *D* çutьn da raḑiusьs kədalən loas ətьżda $DA=m_a$ (215 ris.); eta poraə vermasə lonь to kьeəm kuim sluçaj: 1) gəgrəssez pavkətçənь A_2 çutьn, mədņoz, gəgrəssezlən toko ətik ətlasa çutьs; eta şərti, tujə stroitnь toko ətik $\triangle A_2BC$; eta kuimpeļəsa figuraьs ravnoвedrennəj, meḑiana A_2D loə i sь suvdaən; 2) kər şetəm m_a meḑianaьs uçətżьk A_2D-şa, to gəgrəssez krestaşasə kьk *A* da A_1 çutьn i zadaça şetə kьk kerəm, aʒʒam kьk kuimpeļəsa *ABC* da A_1BC figura; 3) kər şetəm m_a meḑiana ьʒьtżьk A_2D-şa, to gəgrəssez oz krestaşə i stroitnь kuimpeļəsa figura sek oz tuj, a sijən zadaçasə kernь oz poẓ.

2 §. Zadaçaez.

1. Şetəm kьk çut, *A* da *B*. Aʒʒьnь kuimət *C* çut, kəda kujlis-вь *A* çut dьnşaņ *a* ьlьna da *B* çut dьnşaņ *b* ьlьnə.

2. Nuətnь gəgrəs, kəda munis-вь şetəm *A* çut-pьr da pavkətçis-вь şetəm *B* çutьn şetəm *MN* veşkьt viẓkət.

3. Stroitnь kuimpeļəsa figura *a* lador şərti da h_b da h_c suvdaez şərti.

4. Stroitnь kuimpeļəsa figura *a* pod şərti, h_a suvda şərti da $\angle A$ şərti.

5. Aʒʒьnь geometriçeskəj mesta: 1) вьd xorda sərrezliş, kədna petənь ətik çutiş şetəm gəgrəsiş; 2) вьd xorda sərrezliş, kədna munənь gəgrəs pьekьn ətik çut-pьr.

XV. PROPORCIONAĻNƏJ ORƏTOKKEZ.

1 §. Kьk orətoklən ətlasa mera.

Kьk şetəm orətoklən ətlasa meraən suşə seeəm orətok, kəda вьd kьk şetəm orətokas kьnьmişkə tərə вьdsən.

Şetəm kьk orətok, AB da CD (216 ris.); a orətok AB orətokə tərə 5-iş, CD orətokə 3-iş:

$$AB=5a \quad \text{da} \quad CD=3a;$$

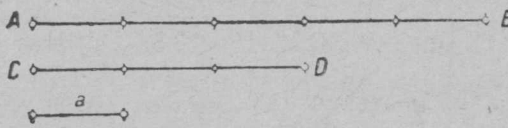
a loə şetəm AB da CD orətokkezlən ətlasa meraən. Ķьk orətoklən ətlasa merais вьd torьs, suam sьlən $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}\cdots$ $\frac{1}{10}\cdots$ siз-zə loə пьlən ətlasa meraən, siзkə sija вьd şetəm orətokə tərə koḷantəg, a estiş loə, sto kьk orətoklən vermasə loпь əddən una ətlasa meraez, kədnaiş ətik loas medьзьtən.

2 §. Orətokkezlən otnoseņņoez.

1. Merajtпь orətok — loə orđçətпь sijə mədik orətokkət, kəda вoştəm mera ətsa tujə; orətok merajtəmşaņ petə lьddḑəs, kəda mьççalə, kьпьmiş orətokьs, kəda вoştəm mera ətsa tujə, təras merajtan orətokas.

Siз, a orətoksə·kə вoşпь mera ətsa tujə (216 ris.), to lьddḑəsьs, kəda merajtə AB orətok, loas 5; lьddḑəs, kəda merajtə orətok BC, loas 3; poẓə vezərtпь, sto lьddḑəs, kəda merajtə orətok a, loas 1.

2. Ķьk orətok, kьз i kьk lьddḑəs, poẓə ordçətпь kьk sposoвən. Tujə tədпь, mьmdaən ətik orətok ьзьtzьk, ḷiвo uçətzьk mədьsşa, ḷiвo tədпь, kьпьmiş ətik orətokьs ьзьtzьk ḷiвo uçətzьk mədьsşa, da eta şərti tədпь, kьпьmiş ətik orətok tərə mədas.



216 ris.

Ordçəna vajətəm dьrņi orətokkezlən medвərja sposoв şərti mi aззam kratnəj otnoseņņo ḷiвo prosto otnoseņņo kьk orətok kolasьп.

Ətik orətoklən mədik dьпə otnoseņņoən suşə lьddḑəs otnoseņņo, kəda merajtə ətik orətok kьeəmkə mera ətsaezən, lьddḑəs dьпə, kəda merajtə mədik orətok nija zə mera ətsaezən.

3. Ķьk orətokliş otnoseņņo kossəm dьrņi vermasə loпь kьk sluçaj.

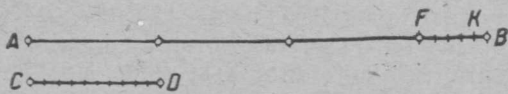
I. Otnoseņņo — toçnəj lьddḑəs, вьdsa ḷiвo droвa. Şetəm kьk orətok $AB=5a$ da $CD=3a$ (216 ris.); пьlən ətlasa meraən loə a orətok. Medвь aззьпь AB da CD orətokkezliş otnoseņņo, lьddḑəssə, kəda merajtə AB orətok a orətokən jukan lьddḑəs vьlə, kəda merajtə CD sija-zə a orətokən, loas:

$$\frac{AB}{CD}=\frac{5}{3}, \text{ ḷiвo } AB:CD=5:3.$$

Ķьk orətoklən gizəm otnoseņņoьs lьddḑətşə siз: AB orətok CD orətok dьпə otnoşitçə; kьз 5 otnoşitçə 3 dьпə, ḷiвo: otnoseņņo AB orətoklən CD orətok dьпə loə $\frac{5}{3}$.

Şetəməş-kə $MN = 8a$ da $KL = 2a$ orətok, kьtən a — nьlən ətlasa mera, to $\frac{MN}{KL} = \frac{8}{2} = 4$; otnoseꞑꞑoьs loə 4—вьdsa lьdḑəs. Eta lьdḑəsьs mьçcalə, sto MN orətokьs 4-iş ьзьtƶьk KL orətokşa, ˋļiвo, sijaƶə saməj, sto KL orətokьs 4-iş uçətƶьk MN orətokşa.

II. Otnoseꞑꞑo — matьnşaləm lьdḑəs. Şetəmaş orətokkez AB da CD (217 ris.). Boştam uçətƶьk CD orətoksə mera ətsa tujə. Teçlam CD orətoksə AB vьlьn; aş sija təris AB orətok vьlьn 3-iş da eta вərьn koļçcis esə FB koļan, kəda uçətƶьk CD-ьsşa. Giƶnьkə, sto $\frac{AB}{CD} \approx 3$, to mijan loas AB da CD orətokkezlən otnoseꞑꞑoьs ꞑetoçnəj, a toko nьlən matьnşaləm otnoseꞑꞑo, kəda loas ꞑevna uçətƶьk, sizkə rezuļtat gəgrəstəm ponda mi FB koļansə çapkim.



217 ris.

Medвь aззьnь toçnəjƶьk otnoseꞑꞑo AB da CD orətokkezlis, CD-sə jukam 10-ətьƶda tor vьlə da boştam CD-iş 0,1 viļ mera ətsa tujə. Aş eta viļ mera ətsaьs tərə AB-ьn 34-iş da şetə esə KB koļan, kəda uçətƶьk CD 0,1-şa.

Giƶam: $3{,}4\, CD < AB < 3{,}5\, CD$, ļiвo $\frac{AB}{CD} \approx 3{,}4$ tьrmantəg da $\frac{AB}{CD} \approx 3{,}5$ unaƶьkən.

Otnoseꞑꞑoez 3,4 ļiвo 3,5 lьdḑəmaş toçnoşən 0,1-əз boştəm ətsa meraiş. Kьз lьdḑəssez jukikə, siз i otnoseꞑꞑo lьdḑikə orətokkes kolasьn otnoseꞑꞑoьs boşşə tьrmantəg, kər koļanьs uçətƶьk boştəm mera ətsa зьnşa, da unaƶьk, kər koļanьs ьзьtƶьk boştəm mera ətsa зьnşa.

Medвь tədnь esə toçnəjƶьk otnoseꞑꞑo AB da CD orətokkezliş, CD jukam 100 ətьƶda tor vьlə. Aş CD-iş 0,01 tərə koļan KB vьlə 3-iş kьєəmkə unaƶьkən, kəda uçətƶьk CD 0,01-şa.

Giƶam: $3{,}43\, CD < AB < 3{,}44\, CD$, ļiвo $\frac{AB}{CD} \approx 3{,}43$ tьrmantəg, ļiвo $\frac{AB}{CD} \approx 3{,}44$ unaƶьkən.

Lьdḑəssez 3,43 da 3,44 — AB da CD orətokkezlən otnoseꞑꞑoez, kədna lьdḑəmaş toçnoşən 0,01-əз, ətьs tьrmantəg, mədьs unaƶьkən.

Bərjəm mera ətsasə-kə juknь esə uçətƶьk dasəta doļaez vьlə, suam 1000-vьlə ļiвo 10,000 tor vьlə, to loas şo toçnəjƶьk i toçnəjƶьk orətokkezlən otnoseꞑꞑoьs, kəda mьçcaləm dasəta droвən.

4. Kьk orətok, kədnalən em seteəm ətlasa mera, kəda вьd orətokə kьnьmiş-kə tərə вьdsən, suşənь ətimerajtçana orətokkezən; orətokkez, kədnalən aвu ətlasa mera, suşənь ꞑemerajtçannezən.

Ꞑemerajtçana orətokkezliş otnoseꞑꞑosə mьçcalənь kьєəmkə matьnşaləm toçnoş ştepeꞑən.

Kьk ꞑemerajtçan orətokkezlən otnoseꞑꞑoez lьdḑişənь ətьƶdaezən, kər ena otnoseꞑꞑoezlən matьnşaləm lьdḑəsa znaçeꞑꞑoes ətьƶdaəş, kədna lьddəməş luвəj ətьzda toçnoş şţepeŋən i вoştəməş kьknannьs liвo tьrmantəg liвo unazьkən. Suam, kər

$$\frac{a}{b}\approx 7{,}5 \quad \text{da} \quad \frac{c}{d}\approx 7{,}5,$$

$$\frac{a}{b}\approx 7{,}52 \quad \text{da} \quad \frac{c}{d}\approx 7{,}52,$$

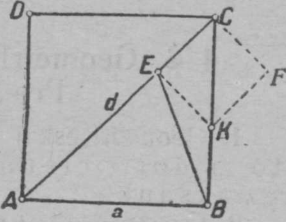
$$\frac{a}{b}\approx 7{,}524 \quad \text{da} \quad \frac{c}{d}\approx 7{,}524 \text{ i siз oз; to}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

5. Medвь tədnь, sto eməş ŋemerajtçana orətokkez, kutam viзətnь kvadratliş lador da diagonal, kədna ŋemerajtçanaəş.

Şetəm $ABCD$ kvadrat (218 ris.) a ladorən da d diagonalən. Puktam-kə AC diagonal vьlьn orətok AE, kədá AB ətьzda ladorkət, loə, sto $AC=AE+EC$.

Nuətam AC dьnə E çutьn EK perpendikular da ətlaalam veşkьt viзən E da B çut, loas ravnoвedrennəj kuimpeləsa ABE figura, siз-kьз $AE=AB$, a eta şərti $\angle AEB = \angle ABE$. Viзətam-kə $\triangle BKE$, to sloə, to i sija ravnoвedrennəj siз-kьз $\angle KEB=\angle KBE$: ena peləsseziş вьd ladorьs loə kьз kolan veşkьt peləs kolasьn da ətik ətьzda peləssez kolasьn, $\angle AEB$ liвo $\angle ABE$.



218 ris.

$\triangle BKE$ figuraiş loə, sto $KE=KB$. Kutam-kə viзətnь veşkьtpeləsa kuimpeləsa CEK figura; aззam, sto i sija ravnoвedrennəj, sijən, sto $\angle ECK=45°$, a sьşan $\angle EKC=45°$ i $KE=CE$, no $KE=KB$, siзkə, i $CE=KB$.

Medoзза EC kolan, kəda puktəm vəli kvadrat BC lador vьlьn, şetə KC kolan; KC orətok vьlьn-zə, kəda loə $EKFC$ diagonalən, sija tərə ətpьriş ŋeьзьt unazьkən.

Boştam-kə $EKFC$ kvadrar ponda nijə-zə stroitəmmesə, mijə вəra aззam, sto unazьkьs oz pondь tərnь вьdsa lьddəs mьmdaiş $EKFC$ kvadrat ladoras i iз oз. Eta şərti loktam vьvod dьnə, sto kvadrat ladorlən da diagonallən ətlasa mera aвu.

3 §. Proporcionalnəj orətokkez. Geometriçeskəj proporcia.

Şetəməş ŋol orətok: $AB=a=4$, $CD=b=2$, $MN=c=6$ da $KL=d=3$ (219 ris.). Boşnь-kə nь kolasiş kьk orətokliş, AB da CD otnoseŋŋo da məd kьkliş, MN da KL otnoseŋŋo, to $\frac{AB}{CD}=\frac{4}{2}=2$ da $\frac{MN}{KL}=\frac{6}{3}=2.$

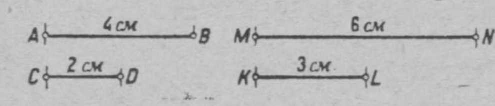
Enaiş вьd otnoseŋŋoвь loə 2 ьzda, siзkə, otnoseŋŋoes ətьzdaəş, a sijən $\frac{AB}{CD}=\frac{MN}{KL}.$

Kьk ətьzda otnoseŋŋo, kədna ətlaaləmaş ətьzdaşan pasən, suşənь geometriçeskəj (kratnəj) proporciaən.

Ətьzdaşəm: $\frac{AB}{CD}=\frac{MN}{KL}$ geometriçeskəj proporcia.

Medвərja giƶəmьs lьddətşə siз: orətok AB, ļiво prosto AB, siз otnoşitçə CD-đьnə, kьз MN otnoşitçə KL dьnə.

Geometriçeskəj proporcia kerşə ŋoļ çļeniş. Ņe вьd ŋoļ lьddəs ləşətənь geometriçeskəj proporciasə; suam, lьddəssez 4, 5, 8 da 10 ləşətənь geometriçeskəj proporcia, siз-kьз $\frac{8}{4}=\frac{10}{5}$, lьddəssez-ƶə 4, 5, 6 da 7 oz kerə geometriçeskəj proporcia, siз-kьз пьiş or tuj kernь kьk ətьƶda otnoseŋŋo.



219 riз.

Kər lьddəssez, kədna merajtənь orətok, ləşətənь geometriçeskəj proporcia, to seєəm ŋoļ orətokьs jьliş вaitənь, sto nija proporcionaļnəjəş.

Opredeļeŋŋo. Ņoļ orətok suşənь proporcionaļnəjjezən, kər lьddəssez, kədna nijə merajtənь, ləşətənь geometriçeskəj proporcia.

I siз, kər ŋoļ a, b, c da d orətok proporcionaļnəjəş, to ətьƶdaşəmьs spravedļivəj: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, ļiво $a:b=c:d$.

4 §. Geometriçeskəj proporcialən svojstvoez. Proporciaezlən çuƶəmmez.

1. Geometriçeskəj proporciaьslən osnovnəj svojstvoьs seєəm, sto sь doriş çļennezlən əkşanьs ətьƶa sь səriş çļennez əkşankət.

2. Geometriçeskəj proporciaьn poʐəveƶnь mestaezən: 1) doriş çļennez, 2) səriş çļennez, 3) əti poraə i doriş i səriş çļennez.

3. Geometriçeskəj proporciaьn poʐə səriş çļennesə suvtətnь dorişşes mestaə da doriş çļennesə sərişşes mestaə.

4. **Orlьtəm proporcia.** Geometriçeskəj proporcia, kədalən doriş, ļiво səriş çļennes ətьƶdaəş, suşə orlьtəm proporciaən.

Orlьtəm geometriçeskəj proporcialən ətkod çļen suşə sərət geometriçeskəj ļiво sərət proporcionaļnəjən kьk mədik çļenlən.

$a:b=b:c$, ļiво $b:a=c:b$ — orlьtəm proporciaez.

Proporciaьs osnovnəj svojstvo şərti loə: $b^2=ac$, kьşaŋ $b=\sqrt{ac}$. **Kьk lьddəslən sərət geometriçeskəjьs ətьƶda пь əkşaniş kvadrata vuзkət.**

5. **Proizvodnəj proporciaez.** Kər $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ proporciaьn kьknan torьs dьnə sodtьnь ļiво proporcia kьknan torşis çintnь 1-ən, to ətьƶdaşəmьs etaşaŋ oz зugşь:

$$\frac{a}{b}\pm 1=\frac{c}{d}\pm 1,\ \text{ļiво}\ \frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d},\ \text{mədŋoƶ}$$

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}\ \text{(I)},\quad \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}\ \text{(II)}.$$

Proizvodnəj (I) proporciasə çļennez şərna juknь (II) vьlə, to ļoas esə ətik proizvodnəj proporcia.

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}.$$

Medoзза otnoseņņoiş çļennezlən ətlasьs siз otnoşitçə nь koļan dьnə, kьз məd otnoseņņoiş çļennezlən ətlasьs otnoşitçə nь koļan dьnə.

6. Una ətьƶda otnoseņņolən svojstvo.

Ţeorema. **Şetəmaş-kə una ətьƶda otnoseņņoez, to oзis çļennezlən otnoseņņo siз otnoşitçə вərişşes ətlas dьnə, kьз вьd oзişьs otnoşitçə aslas вəriş dьnə.**

Şetəm: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{m}{n}=\frac{p}{q}.$

Kolə dokazitnь: $\frac{a+c+m+p}{b+d+n+q}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ i siз oз.

Dokaƶitəm. Aş $\frac{a}{b}=k$, sek i $\frac{c}{d}=k, \frac{m}{n}=k$, i $\frac{p}{q}=k$ $i\; a=bk$, $c=dk, m=nk, p=qk.$ Ətlaalamkə çļennez şərna suļga da veşkьtlaņiş torresə medвərja ətьƶdaşəmmeziş da petkətam-kə veşkьtladorьn ətlasa k вoştansə skoвkaez sajə, loas:

$$a+c+m+p=k(b+d+n+q), \text{ kьşaņ}$$

$$k=\frac{a+c+m+p}{b+d+n+q}; \text{ no } k=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{m}{n}=\frac{p}{q},$$

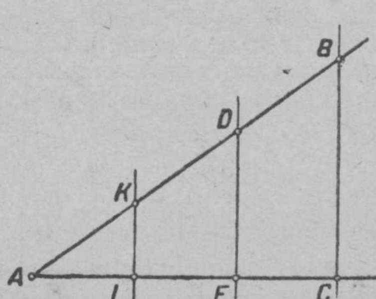
a sijən

$$\frac{a+c+m+p}{b+d+n+q}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\ldots$$

5 §. Peļəs ladorrez krestalan paraļļeļnəj veşkьt viƶƶezlən svojstvo.

Krestalam BAC peļəsliş ladorresə paraļļeļnəj veşkьt viƶƶezən BC, DE, KL i siз oз. (220 ris.); orətokkez, kədna ətmoz kujlənь peļəs ladorrez vьlьn nija-ƶə ətik paraļļeļļez şərti, suşənь sootvetstvennəja kujlan orətokkezən.

Orətokkez: AK da AL, KD da LE, AB da AC, KB da LC — sootvetstvennəja kujlan orətokkez; orətokkez: AK da EC ļiвo KB da DB ļiвo KL da AL oz loə sootvetstvennəja kujlan orətokkezən.

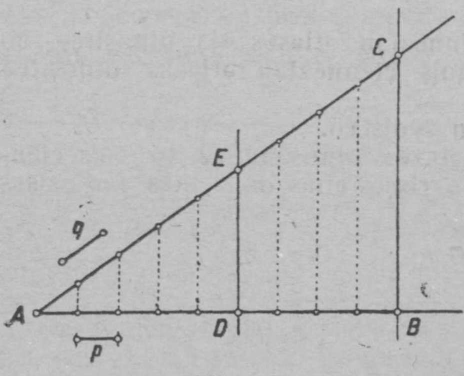


220 ris.

Ţeorema. **Krestavnь-kə peļəs ladorresə kьk paraļļeļnəj veşkьt viƶən, to sьlən ətik ladoriş ļuвəj kьk orətoklən otnoseņņoьs loə ətьƶda məd ladoriş sootvetstvennəja kujlan kьk orətok otnoseņņokət, a sijən peļəs ladorrez vьlьn arkməm ņoļ orətokьs proporcionaļnəjəş.**

Şetəm: $\angle BAC$, $BC \parallel ED$ (221 ris.).

Kolə dokazitnь: 1) $\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DB}$; 2) $\frac{AC}{EC} = \frac{AB}{DB}$; 3) $\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD}$.



221 ris.

Dokaƶitəm. Aş kьєəmkə orətok q loə AC ladoriş AE da EC orətoklən ətlasa meraən, sek $AE = mq$, $EC = nq$ da $AC = (m+n)q$. AC ladorsə jukan çuttez-pьr nuətam veşkьt paraļļeļnəj BC, a siз-ƶə i DE viz̧; AB ladorlən AD da DB orətok torjaşasə sootvetstvennəja siзƶə ətaməd kolasьn m da n orətokkez vьlə, kuz̧asə вьdьsliş nь kolasiş pasjalam p-pьr; sek $AD = mp$, $DB = np$ da $AB = (m+n)p$. Siзkə:

I. $\frac{AE}{EC} = \frac{mq}{nq} = \frac{m}{n}$; $\frac{AD}{DB} = \frac{mp}{np} = \frac{m}{n}$ i $\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DB}$.

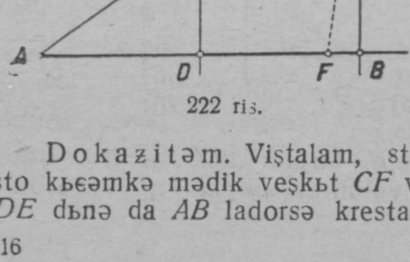
II. $\frac{AC}{EC} = \frac{(m+n)q}{nq} = \frac{m+n}{n}$; $\frac{AB}{DB} = \frac{(m+n)p}{np} = \frac{m+n}{n}$ i $\frac{AC}{EC} = \frac{AB}{DB}$.

III. $\frac{AC}{AE} = \frac{(m+n)q}{mq} = \frac{m+n}{m}$; $\frac{AB}{AD} = \frac{(m+n)p}{mp} = \frac{m+n}{m}$ i $\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD}$.

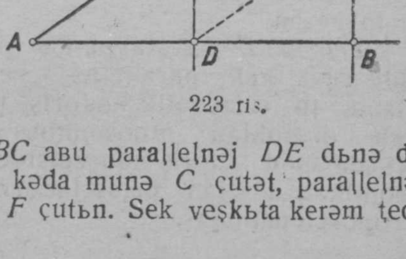
Ţeorema (вərəna). **Peļəsliş ladorresə kьk veşkьt viz̧ən krestaləm kosta ətik ladoriş ļuвəj kьk orətoklən-kə otnoseņņoьs ətьƶda mədik ladoriş sootvetstvennəja kujlan kьk orətok otnoseņņokət, to seєəm veşkьt viz̧z̧es paraļļeļnəjəş.**

Şetəm: BC da DE krestalənь ladorrez $\angle BAC$; $\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DB}$ (222 ris.).

Kolə dokazitnь: $BC \parallel DE$.



222 ris.



223 ris.

Dokaƶitəm. Viştalam, stọ BC aвu paraļļeļnəj DE dьnə da sto kьєəmkə mədik veşkьt CF viz̧, kəda munə C çutət, paraļļeļnəj DE dьnə da AB ladorsə krestalə F çutьn. Sek veşkьta kerəm ţeorema şərti BAC peļəs ladorrez vыlыn loasə proporcionaļnəj orətokkez, siз sto $\frac{AE}{EC}=\frac{AD}{DF}$. Pondamkə ordçən vajətnь arkməm proporciasə şetəm $\frac{AE}{EC}=\frac{AD}{DB}$, vermam sunь, sto kьk proporciaьn, kədnaьn ətьƶdaəş kuim çļen, kolə lonь ətьƶdaən i ņoļət çļennezlə, mədņoƶ, $DF=DB$, mьj vermas lonь toko sek, kər çut F ətvыlaşas B çutkət.

I siз, F çutlə kolə ətvыlaşnь B çutkət, a eta mьççalə, sto mijan as dumaiş kerəmьs loə, sto BC-ьs aвu paraļļeļnəj DE dьnə ņeverno, $BC \parallel DE$.

Ţeorema. **Paraļļeļnəj veşkьt viʐʐez-kə krestalənь peļəsliş ladorresə, to nija paraļļeļnəj veşkьt viʐʐez orətokkezlən otnoseņņoes, kədna jərtəmaş sь ladorrez kolasьn, ətьƶda loə peļəsiş вьd lador orətokkez otnoseņņokət, kər lьdd̦ənь sь jьvşaņ nija çuttez, kьtən krestaşənь paraļļeļnəj veşkьt viʐʐes peļəs ladorrezkət.**

Şetəm: $\angle BAC$; $BC \parallel DE$ (222 ris.).

Kolə dokaƶitnь: $\frac{BC}{DE}=\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$.

D o k a ƶ i t ə m. Nuətam otsalan veşkьt viʐ $DF \parallel AC$, sek $DE=FC$ (223 ris.). Ķutam viзətnь $\angle ABC$; sija krestaləm paraļļeļnəj veşkьt AC da DF viʐən, eta şərti, $\frac{BC}{FC}=\frac{BA}{DA}$; veƶam-kə FC sьkət ətьƶda DE orətokən, loas $\frac{BC}{DE}=\frac{BA}{DA}$, no $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$, a sijən $\frac{BC}{DE}=\frac{AC}{AE}$. I siз,

$$\frac{BC}{DE}=\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}.$$

6 §. Puçok jugərrez krestalan paraļļeļnəj veşkьt viʐʐezlən svojstvo.

Ţeorema. **Jugərrezliş puçoksə-kə krestavnь paraļļeļnəj veşkьt viʐʐezən, to: 1) ət jugəriş ļuвəj kьk orətoklən otnoseņņoьs ətьƶda loə məd jugəriş sootvetstvennəja kujlan orətokkez otnoseņņokət da 2) torja jugərrez kolasiş paraļļeļnəj veşkьt viʐʐezlən orətokkez siз otnoşitçənь ətaməd kolasьn, kьз sootvetstvujtan jugərrezkət otnoşitçənь puçok centraşaņ paraļļeļnəj veşkьt viʐʐez krestaləməз orətokkez.**

Şetəm: O centra jugərrezlən puçok; $AM \parallel BN$ (224 ris.).

Kolə dokaƶitnь: 1) $\frac{OA}{AB}=\frac{OC}{CD}=\frac{OE}{EF}=\frac{OM}{MN}$; 2) $\frac{BD}{AC}=\frac{DF}{CE}=\frac{FN}{EM}=\frac{ON}{OM}$.

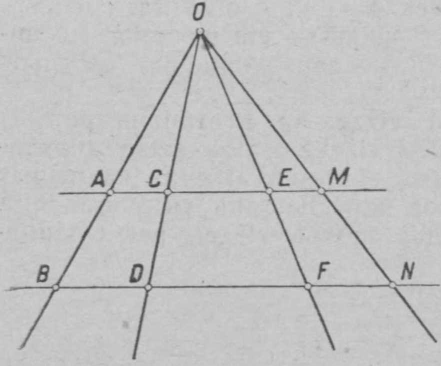
D o k a ƶ i t ə m. Puçokiş вьd kьk jugər arkmətənь peļəssez: BOD, DOF da FON; etna peļəsses krestaləmaş kьk paraļļeļnəj veşkьt BN da AM viʐən, kədna orətənь peļəsses ladorrez vыlыn proporcionaļnəj orətokkez, a sijən:

$$\frac{OA}{AB}=\frac{OC}{CD};\quad \frac{OC}{CD}=\frac{OE}{EF};\quad \frac{OE}{EF}=\frac{OM}{MN}.$$

Pondam-kə ordçən vajətnь etnijə proporciaesə, aʒʒam, sto

$$\frac{OA}{AB}=\frac{OC}{CD}=\frac{OE}{EF}=\frac{OM}{MN}.$$

Dokaz̧itəma ţeoremalən oʒʒa tor; medʙь dokaz̧itnь ţeoremaliş məd torsə, suvtətam proporcia, kədaə pьrasə orətokkez nija paraļļeļnəj veşkьt viz̧z̧ezən, kədna orətənь BOD, DOF da FON peļəsliş ladorres, mijan loas:



224 ris.

$$\frac{BD}{AC}=\frac{OB}{OA}=\frac{OD}{OC};$$

$$\frac{DF}{CE}=\frac{OD}{OC}=\frac{OF}{OE};$$

$$\frac{FN}{EM}=\frac{OF}{OE}=\frac{ON}{OM}.$$

Kutam-kə ordçən vajətnь etnijə proporciaesə, aʒʒam, sto

$$\frac{BD}{AC}=\frac{DF}{CE}=\frac{FN}{EM}=\frac{ON}{OM}.$$

Dokaz̧itəm məd tor ţeoremaiş.

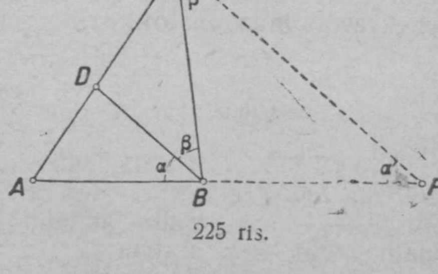
7 §. Kuimpeļəsa figura pьɛkiş peļəs ʙişşektrisalən svojstvo.

Ţeorema. **Ku'mpeļəsa figura pьɛkiş peļəslən ʙişşektrisaʙs ʝukə lador, kəda kujlə eta peļəs veşţьn məd kьk ladorlə proporcionaļnəj torrez vьlə.**

Şetəm: $\triangle ABC$; BD — ʙişşektrisa; $\angle\alpha=\beta$ (225 ris.).

Kolə dokaz̧itnь: $AD:DC=AB:BC$.

D o k a z̧ i t ə m. Nuətam C ʝьlət veşkьt viz̧ $CF \parallel BD$ setçəʒ, kьtçəʒ sija oz krestaş F çutьn AB lador sodtətkət.



225 ris.

Paraļļeļnəj veşkьt BD da CF viz̧ krestalənь A peļəsliş ladorresə da orətənь nijə proporcionaļnəj orətokkez vьlə, eta şərti $AD:DC=AB:BF$. $\triangle BCF$ figuraьn: $\angle F=\angle\alpha$ kьʒ sootvetstvennəj peļəssez BD da FC paraļļeļnəjjez dьnьn da krestalan AF viz̧ dьnьn da $\angle\beta=\angle BCF$ kьʒ pьɛkiş kresta peļəssez nija ʒə paraļļeļnəjjez dьnьn da krestalan BC viz̧ dьnьn. No $\angle\alpha=\angle\beta$, eta şərti, $\angle F = \angle C$; etna peļəssez $\triangle BCF$ pod dьnьnəş, nija ətьzdaəş, siзkə, $\triangle BCF$ — ravnoвedrennəj da $BF = BC$.

Vežam-kə petəm proporciaвn BF orətoksə sьkət ətьzda BC orətokən, kuimpeļəsa ABC figura ladorən, loas: $AD:DC = AB:BC$.

8 §. Ņoļət proporcionaļnəj orətok stroitəm.

Zadaça. Şetəmaş kuim orətok: a, b da c (226 ris.). Stroitnь ņoļət orətok, nьlə proporcionaļnəjə.

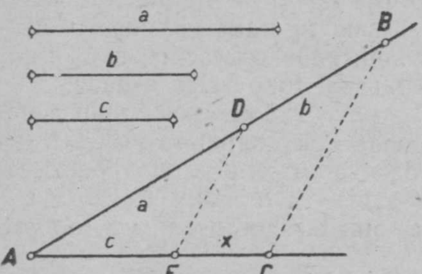
Stroitəm. Ķolə stroitnь seєəm x orətok, kəda ləşalis вь proporciaə $a:b = c:x$. Boştam mьjkə ьzda $\angle BAC$ da teçam sь ətlador vьlьn A jьvşaņ ətaməd şərna orətokkez: $AD = a$, $DB = b$, a məd vьlas — orətok $AE = c$; ətlaalam-kə D da E çut veşkьt DE viẓən da sьвəгьn nuətam $BC \parallel DE$, sek $EC = x$ loas kossana ņoļət proporcionaļnəj orətok.

Вьļiş: $BC \parallel ED$, eta şərti $a:b = c:x$.

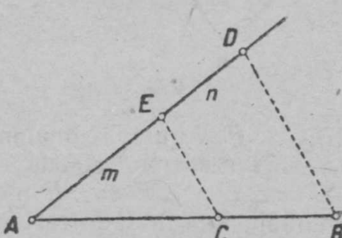
9 §. Şetəm otnoseņņoвn orətok jukəm.

Zadaça. *Orətok $AB = a$ (227 ris.) juknь seєəm kьk AC da CB orətok vьlə, otnoseņņoвs kədnalən vəli вь ətьzda şetəm kьk m da n lьddьəs otnoseņņokət.*

Stroitəm. Zadaça uslovia şərti $AC:CB = m:n$.



226 ris.



227 ris.

Aş $m = 4$ da $n = 3$ kuẓa ətsa. Stroitam mьjkə ьzdaə $\angle BAD$; sь ət lador vьlьn merajtam jьv dьnşaņas orətok $AB = a$, a məd vьlas — ətaməd şərna orətokkez: $AE = m$ da $ED = n$. Ətlaalam veşkьt viẓən B da D çut da nuətam jukşan E çutət veşkьt viẓ $EC \parallel BD$, kədija AB krestalas C çutьn. Eta C çutьs AB jukas otnoseņņoвn $m:n$.

Вьļiş: $EC \parallel BD$, a eta şərti $\frac{AC}{CB} = \frac{AE}{ED} = \frac{m}{n}$.

Jualannez da upražņeņņoez.

1. Loasə-ja proporcionaļnəjəş orətokkez, nь kolasiş-kə kьklən otnoseņņoвs loə 62,1 : 18 da məd kьklən otnoseņņoвs loə 41,4 : 12.

2. Aззьnь $\triangle ABC$ kəda-kə ətik lador vьlьn M çut, kədaвn lador jukşə seєəm torrez vьlə, kədna proporcionaļnəjəş məd kьk ladorlə.

3. Ravnoвedrennəj kuimpeļəsa ABC figuralən ladorres otnoşitçənь, kьз 1:4. Sьlən perimetraьs $P = 4{,}5$ *sm*. Aʒʒьnь ladorresə.

4. Ləşətnь вьdçuzəma proporciaesə əkşannez ətьzdaşəmiş:

1) $x.y = m \cdot n$, 2) $12 \cdot 8 = 16 \cdot 6$.

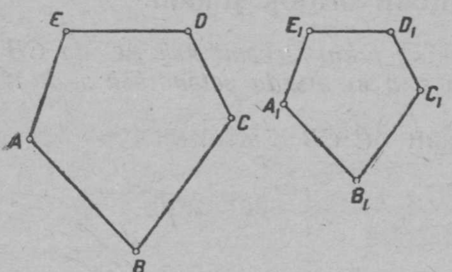
5. Şetəma veşkьtpeļəsa figura, kədalən lodorres: $a = 5$ *sm* da $b = 8$ *sm*. Stroitnь sьkət ətьzda plossaḑa veşkьtpeļəsa figura, kədalən ladorьs $c = 6$ *sm*. Kuz̧asə məd ladorьsliş aʒʒьnь stroitəmən.

6. Şetəma kuimpeļəsa figura, kədalən podьs $a = 16$ *sm*. Sьlən вokiş lador, pod şərtl lьddəmən, jukəma kuim tor vьlə otnoseņņoьn 2:3:5, da jukşan çuttezət nuətəmaş veşkьt viz̧z̧ez, kədna paraļļeļnəjəş podlə. Aʒʒьnь ena veşkьt viz̧ orətokkezliş kuz̧asə, kədna jərtəmaş ladorres kolasə.

XVI. FIGURAEZLƏN PODOBIA.

1 §. Podoвnəj unapeļəsa figuraez.

1. Uçastok plan çerţitikə ļi masina ḑetaļļezliş ţexņiçeskəj çerţoz kerikə mьççalənь uçastokliş ļiвo masina ḑetaļļiş uçastoksə uçətzьka, no eta dьrņi koļənь veztəg вьdsən formasə çerţitan fuguraьsliş.



228 ris.

Kər çintam ətmьmdaiş figuraliş вьdəs ьzdaesə da koļam veztəg peļəsseslis ьzdasə, to mijə og vezə figura formasə i aʒʒam figuraliş çuzəmsə uçətzьkən, kəda oz vaçkiş вьļiş figuraьskət toko aslas ьzdaən.

2. 228 risunok vьlьn şetəmaş kьk unapeļəsa $ABCDE$ da $A_1B_1C_1D_1E_1$ figura, kədnalən ətmьmdaəş ladorreznьs; пьlən peļəssezпьs şərşən-вərşən ətьzdaəş: $\angle A = \angle A_1$; $\angle B = B_1$; $\angle C = \angle C_1$; $\angle D = \angle D_1$; $\angle E = \angle E_1$; da etaşşa, ətьzdaəş otnoseņņoez sootvetstvennəja kujlan ladorrezlən:

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1D_1}{CD} = \frac{D_1E_1}{DE} = \frac{E_1A_1}{EA} = k.$$

Seвəm kьk unapeļəsa figura suşənь p o d o в n ə j j e z ə n.

К ь k u n a p e ļ ə s a f i g u r a s u ş ə n ь p o d o в n ə j j e z ə n, n ь l ə n - k ə ə t m ь m d a ə ş l a d o r r e z n ь s, p e ļ ə s s e z n ь s s o o t v e t s t v e n n ə j a ə t ь z d a ə ş d a ə t i v e ş t i ş l a d o r r e z n ь s n ь l ə n p r o p o r c i o n a ļ n ə j ə ş.

Ətiveştiş ladorrezən unapeļəsa figuraьn loənь ladorrez, kədna dьnьn kujlənь sootvetstvennəja ətьzda peļəssez. Podoвiaьs pasjaşşə pasən $\backsim$.

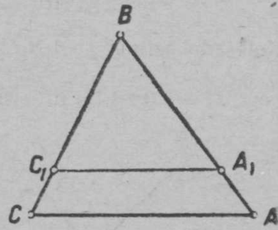
Gizəm: $A_1B_1C_1D_1E_1 \backsim ABCDE$ lьddişşə to kьз: unapeļəsa $A_1B_1C_1D_1E_1$ figura podoвnəj unapeļəsa $ABCDE$ figuralə.

Кьk podoвnəj unapeļəsa figuraiş əfveştiş ladorrezlən podoвnəjьs suşə p o d o в i a k o e f i c i e n t ə n.

Unapeļəsa figuraezlən-kə koeficientьs $\frac{A_1B_1}{AB} = k = 1$, to unapeļəsa figuraes ətьƶdaəş. Eta şəti poz̧ə viştavnь, sto ətьƶdaşəmьs em podoʙiaiş torja sluçaj.

2 §. Kuimpeļəsa figuralən podoʙia.

Kuimpeļəsa figuraez suşənь podoʙnəjjezən, nьlən-kə sootvetstvennəja ətьƶdaəş peļəssez da ətiveştiş ladorreznьs proporcionaļnəjəş.



229 ris.

Ķuimpeļəsa figuraezlən ətiveştişa ladorrez kujlənь ətьƶda peļəssez veştьn.

Ţeorema. **Veşkьt viz̧, kьda paraļļeļnəj loə kuimpeļəsa figuraiş kədakə ətik ladorlə, orətə sь ʙerdiş kuimpeļəsa figura şetəmlə podoʙnəj.**

Şetəm: $\triangle ABC$; $C_1A_1 \parallel CA$ (229 ris.).

Ķolə dokaƶitnь: $\triangle A_1BC_1 \backsim \triangle ABC$, mədņoƶ 1) $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$;

2) $\frac{BA_1}{BA} = \frac{BC_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA}$.

Dokaƶitəm. Nuətam $C_1A_1 \parallel CA$, loas $\triangle A_1B_1C_1$, peļəsses kədalən ətьƶdaəş $\triangle ABC$ peļəssezkət; siʒ, $\angle B$ — ətlasa, $\angle A_1 = \angle A$ da $\angle C_1 = \angle C$ kьʒ sootvetstvennəj peļəssez. Jugərrez puçok jьliş ţeorema şərti loə:

$$\frac{BA_1}{BA} = \frac{BC_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA};$$

siʒkə, kuimpeļəsa figuraes podoʙnəjəş, $\triangle A_1BC_1 \sim \triangle ABC$.

3 §. Kuimpeļəsa figuraez podoʙiaiş kuim priznak.

1. Ķuimpeļəsa figuraez podoʙiaiş medoʒʒa priznak.

Ţeorema. **Ətik kuimpeļəsa figuraiş-kə kьk peļəs sootvetstvennəja ətьƶdaəş mədiş, kьk peļəskət, to seєəm kuimpeļəsa figuraes podoʙnəjəş.**

Şetəm: $\triangle ABC$ da $\triangle A_1B_1C_1$. $\angle A_1 = \angle A$ da $\angle B_1 = \angle B$ (230 ris.).

Ķolə dokaƶitnь: $\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle ABC$.

Dokaƶitəm. Uslovia şərti $\angle A = \angle A_1$ da $\angle B = \angle B_1$, eta şərti, i $\angle C = \angle C_1$ kьʒ $2d$-əʒ şetəm peļəssez ətlaslən sodtət. Merajtam B jьv dьnşaņ BA lador vьlьn orətok $BE = B_1A_1$ da nuətam $FE \parallel CA$, loas $\triangle EBF \sim \triangle ABC$; $\triangle EBF = \triangle A_1B_1C_1$, sijən, mьļa nьlən $BE = B_1A_1$, $\angle B = \angle B_1$ uslovia şərti da $\angle E = \angle A = \angle A_1$, no $\triangle EBF \sim \triangle ABC$, eta şərti, i sьkət ətьƶda $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$.

Petkətassez 1. **Veşkьtpeļəsa kuimpeļəsa figuraez, kədnalən eməş ətьƶda vekņit peļəsən, podoʙnəjəş.**

2. Ŗavnoʙedrennəj kuimpeļəsa figuraez, kədnalən eməş jьv dьnьn ļiʙo pod dьnьn ətьƶda peļəsən, podoʙnəjəş.

3. Ətьƶda ladora kuimpeļəsa figuraez podoʙnəjəş.

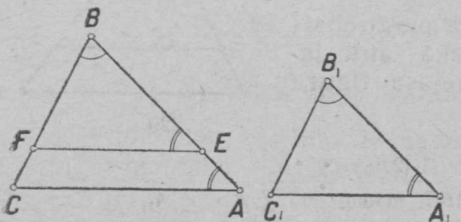
2. Kuimpeļəsa figuraez podoʙiaiş mədik priznak.

Ţeorema. **Kuimpeļəsa figuraiş-kə kьk lador proporcionaļnəjəş mədiş kьk ladorlə da ena ladorrez kolasiş peļəssez ətьƶdaəş, to kuimpeļəsa figuraez podoʙnəjəş.**

Şetəm: $\triangle ABC$ da $\triangle A_1B_1C_1$; $\dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{A_1C_1}{AC}$ da $\angle A_1 = \angle A$ (231 ris.).

Kolə dokazitnь: $\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle ABC$.

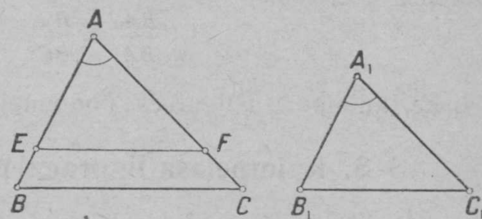
Dokaƶitəm. Merajtam A jьv dьnşaņ AB lador ʙьlьn orətok $AE = A_1B_1$ da nuətam $EF \parallel BC$, loas $\triangle AEF \backsim \triangle ABC$. Kuimpeļəsa figuraez podoʙiaiş loə: $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF}{AC}$ (1); kər proporciaьn (1) AE veƶam A_1B_1 ʙьlə, loas $\dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{AF}{AC}$ (2).



230 ris.

Sravņitam-kə ətьƶdaşəmsə (2) proporciakət, kəda şetəm usloviaьn, aʒʒam, sto nьlən kuim çļen ətkodəş, a sijən kolə loņь ətьƶdaezən i ņoļət çļennezlə, mədņoz, $AF = A_1C_1$; $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle AEF$, sijən, mьļa nьlən $\angle A_1 = \angle A$ uslovia şərti, $AE = A_1B_1$ stroitəm şərti da $AF = A_1C_1$ dokaƶitəm şərti, $\triangle AEF \backsim \triangle ABC$, sisкə, i sьkət ətьƶda $\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle ABC$.

Petkətas. **Veşkьtpeļəsa kuimpeļəsa figuraez podoʙnəjəş, nь kaţettezlən-kə otnoseņņoez ətьƶdaəş.**



231 ris.

3. Kuimpeļəsa figuraez podoʙiaiş kuimət priznak.

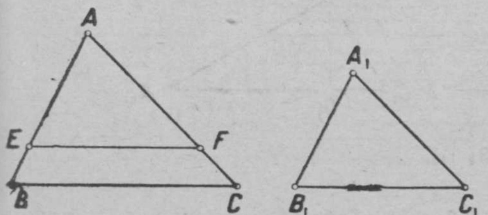
Ţeorema. **Ətik kuimpeļəsa figuraiş-kə kuim lador proporcionaļnəjəş mədiş kuim ladorlə, to seєəm kuimpeļəsa figuraes podoʙnəjəş.**

Şetəm: $\triangle ABC$ da $\triangle A_1B_1C_1$; $\dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{B_1C_1}{BC} = \dfrac{C_1A_1}{CA}$ (232 ris.).

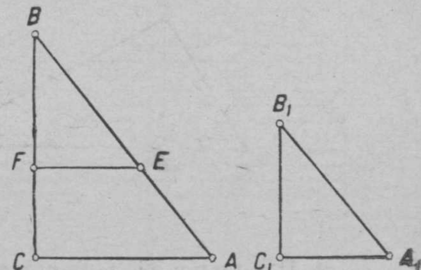
Kolə dokazitnь: $\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle ABC$.

Dokaƶitəm. Merajtam A jьv dьnşaņ AB lador ʙьlьn orətok $AE = A_1B_1$ da nuətam $EF \parallel BC$, sek $\triangle AEF \backsim \triangle ABC$. Kuimpeļəsa figuraez podoʙiaiş loə, sto $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF}{AC} = \dfrac{EF}{BC}$ (1). Kər meɗoʒʒa otnoseņņoьn AE veƶam A_1B_1 ʙьlə, loas: $\dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{AF}{AC} = \dfrac{EF}{BC}$ (2). Sravņitam-kə proporcia (2) sija proporciakət, kəda şetəm usloviaьn, tədam, što $\frac{AF}{AC}=\frac{A_1C_1}{AC}$, kəđa şərti $AF=A_1C_1$ da $\frac{EF}{BC}=\frac{B_1C_1}{BC}$, kəda şərti $EF=B_1C_1$.

I siʒ, kuimpeļəsa AEF figuraiş kuim lador ətьzdaəş kuimpeļəsa $A_1B_1C_1$ figuraiş kuim ladorkət, siʒ-kə, $\triangle AEF=\triangle A_1B_1C_1$, no $\triangle AEF\sim\triangle ABC$, eta şərti, i sьkət ətьzda $\triangle A_1B_1C_1\sim\triangle ABC$.



232 ris.



233 ris.

Petkətas. Ravnoʙedrennəj kuimpeļəsa figuraez podoʙnəjəş, ətik kuimpeļəsa figuraiş-kə pod da ʙokiş lador proporcionaļnəjəş mədiş podlə da ladorlə.

4. _Ţeorema._ Kьk veşkьtpeļəsa kuimpeļəsa figura podoʙnəjəş, ətik kuimpeļəsa figuraiş-kə gipoţenuza da kaţet proporcionaļnəjəş mədiş gipoţenuzalə da kaţetlə.

Şetəm: $\triangle ABC$ da $\triangle A_1B_1C_1$; $\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}$ (233 ris.).

Kolə dokazitnь: $\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle ABC$.

D o k a z i t ə m. Merajtam B jьv dьnşaņ BA gipoţenuza vьlə orətok $BE=B_1A_1$ da nuətam $EF\parallel AC$. $\triangle BEF\sim\triangle ABC$, eta şərti, $\frac{BE}{BA}=\frac{BF}{BC}$; arkməm proporcia şetəm proporciakət sravņitəmiş petə, što $BF=B_1C_1$, siʒkə, $\triangle EBF=\triangle A_1B_1C_1$ gipoţenuza da kaţet şərti. No $\triangle EBF\sim\triangle ABC$, eta şərti, i sьkət ətьzda $\triangle A_1B_1C_1\sim\triangle ABC$.

4 §. Podoʙnəj kuimpeļəsa figuraeziş vьlьnaezlən da ladorrezlən proporcionaļnoş.

1 _Ţeorema._ Podoʙnəj kuimpeļəsa figuraezlən vьlьnaez proporcionaļnəjəş ətiveştiş ladorrezlə.

Şetəm: $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$; BD da B_1D_1 — vьlьnaez (234 ris.).

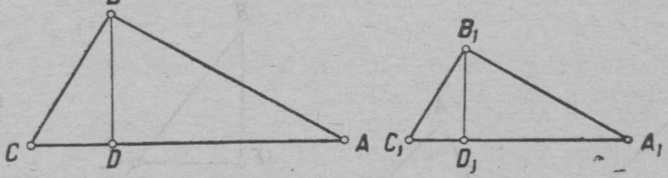
Kolə dokazitnь: $\frac{B_1D_1}{BD}=\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{C_1A_1}{CA}$.

D o k a z i t ə m. Veşkьtpeļəsa kuimpeļəsa ABD da $A_1B_1D_1$ figura podoʙnəjəş, sijən, mьļa emaş nьlən ətьzda veknit peļəsən: $\angle A=\angle A_1$.

Nь podoвiaiş loə, sto $\frac{B_1D_1}{BD}=\frac{A_1B_1}{AB}$, no $\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{C_1A_1}{CA}$, a sijən i

$$\frac{B_1D_1}{BD}=\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{C_1A_1}{CA},$$

mədnoz, podoвnəj kuimpeləsa figuraezlən vьlьnaez proporcionalnəjəş ətiveştiş lodorrez luвəj paralə.

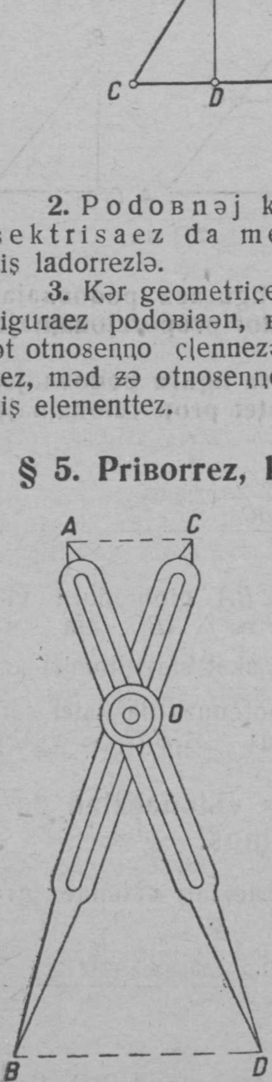


234 ris.

2. Podoвnəj kuimpeləsa figuraezьn ətiveştiş вişşektrisaez da medianaez proporcionalnəjəş ətiveştiş ladorrezlə.

3. Kər geometriçeskəj zadaça kerikə mijə polzujtçam kuimpeləsa figuraez podoвiaən, вьєəmzьk loə suvtətnь proporciasə siз, medвь ət otnosenno çlennezən vəlisə ət kuimpeləsa figuraiş viz elementtez, məd zə otnosenno çlennezən məd kuimpeləsa figuraiş ətiveştiş elementtez.

§ 5. Priвorrez, kədna ləşətəmaş podoвnəj kuimpeləsa figuraez svojstvoez şərti.

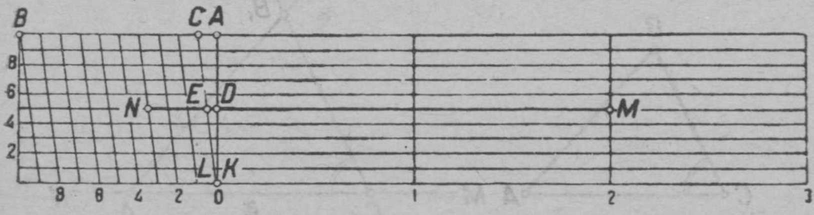


235 ris.

1. Jukan cьrkul. Çertoznəj uззez nuətəm kosta polzujtçənь jukana cьrkulən (235 ris.). Sijən jukənь orətokkez ьzda torrez vьlə; sьlən kerəmьs panşə kuimpeləsa figuraez podoвia vьlьn. Jukan cьrkulьslən eməş kьk *AD* da *CB* kok, kədna jьvdəmaş kьknan koneçşanas; kokkez kuzas kerəmaş kolassez (prorezzez), da kokkes ətlaaləmaş vestaşana *O* sarnirən. Medвь aззьnь jukan cьrkul şərti, suam, *MN* orətokliş kuimət tor, krepitənь *O* sanirsə siз, medвь *BO* vəli 3-iş взьtzьk *CO*-şa; medвь koknitzьk da çozaaьk pozis lьddişnь, *AD* da *CB* kok вьlьn suвtətəmaş jukəmmez. *O* sarnir krepitəm vərьn kokkeziiş *B* da *D* koneç suvtətənь orətokiş *M* da *N* çutə, da sek *C* da *A* koneç kolasьnrasstojannoьs loə $\frac{1}{3}$ *MN*.

Вьliş, $\triangle COA \sim BOD$, kьşan $\frac{CA}{BD}=\frac{OC}{OB}$, no $CO=\frac{1}{3}OB$, eta şərti, $\frac{CA}{BD}=\frac{1}{3}$, a sijən $CA=\frac{1}{3}BD$, ļiвo $CA=\frac{1}{3}MN$, ed $BD=MN$.

2. **Poperesnəj mastaв.** Viz̧ mastaв şərti oz tuj merajtnь mastaвa ətsaiş uçət torrez; sijən poļzujtçənь poperesnəj mastaвən, kəda şərti tujə merajtnь ətsaliş i şoət torrez. Poperesnəj mastaвlən kerəmьs mьtçaləma 236 risunok vьlьn.



236 ris.

Mera ətsaən sьlən loə BA; $CA=0,1BA$. Ķuimpeļəsa AOC figuraiş, kədaьn nuətəməş veşkьt viz̧z̧ez, paraļļeļnəj AC dьnə, mijan loə: $KL=0,1CA$ ļiвo 0,01 BA; mədik paraļļeļnəj orətokkez $\triangle AOC$ figuraьn BA mera ətsaiş sootvetstvennəja 0,02, 0,03... 0,10 ьƶdaəş.

Poperesnəj mastaвən poļzujtçəm. Suam, kolə puktьnь orətok $x=2,35\ AB$. Suvtətam sьrkuļļiş ət koksə M çutə, a mədsə — N çutə, sek $NM=x=2,35$.

Вьļiş, $NM=DM+ED+NE$, kьtən $DM=2BA$, $NE=0,3\ BA$, $ED=0,05\ BA$, sijən, mьļa $\triangle OAC\sim\triangle ODE$, kьşaц $\frac{OD}{OA}=\frac{ED}{CA}=\frac{5}{10}$; siзkə, $ED=\frac{5}{10}CA$, no $CA=0,1\ BA$, a eta şərti $ED=0,05\ BA$.

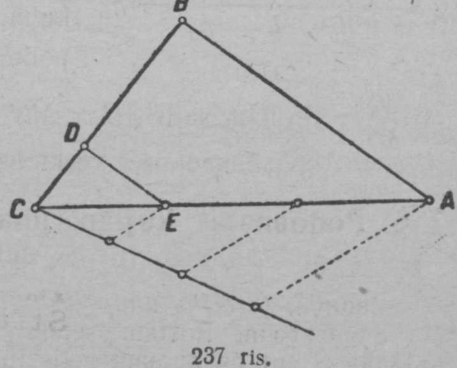
I siз, $NM=2+0,3+0,05=2,35$.

6 §. Podoвnəj veşkьtviz̧a figuraez stroitəm.

1 zadaça. *Stroitnь kuimpeļəsa figura, kuimpeļəsa ABC figuralə podoвnəjə* (237 ris.), *ladorres kədalən vəlisə вь kuimiş uçətzьkəş şetəm kuimpeļəsa ABC figura ladorrezşa.*

Stroitəm. Ķuimpeļəsa ABC figura ladorrez kolasiş ətikə, suam AC, jukam 3 ətьƶda ţor vьlə da nuətam jukan E çuţət veşkьt ED viz̧, kəda vəli вь paraļļeļnəj kaimpeļəsa ABC figuraiş AB ladorlə; petas $\triangle EDC$, kəda podoвnəj loə şetəmlə.

$\triangle EDC\sim\triangle ABC$ kьз ətьƶdapeļəsa kuimpeļəsa figuraez.

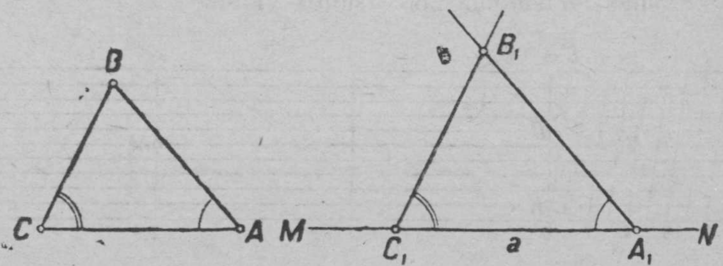


237 ris.

2 zadaça. *Şetəm a orətok vьlьn stroitnь kuimpeļəsa figura, kəda vəli ʙь podoʙnəj şetəm kuimpeaļəsa ABC figuralə* (238 ris.).

Stroitəm. a — orətok, kəda ətiveştişən loə kuimpeļəsa ABC figura CA ladorkət.

Puktam veşkьt MN viz̦ vьlьn orətok $C_1A_1 = a$ da A_1 çut dьnьn stroitam $\angle A_1 = \angle A$ da C_1 çut dьnьn peļəs $C_1 = \angle C$; petas $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$.

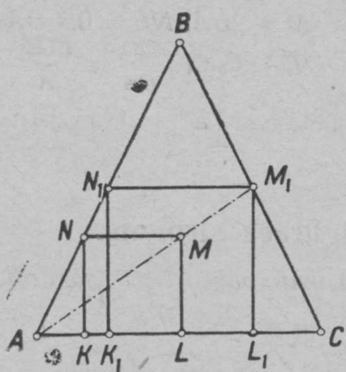


238 ris.

Bьļiş, etna kuimpeļəsa figuraes podoʙnəjəş, kьʒ peļəssez, kədnalən eməş sootvetstvennəja ətьżda kьk peļəsən.

3 zadaça. *Şetəm* $\triangle$ *ABC figuraə* (239 ris.) *pьrtnь kvadrat siʒ, medʙь sьlən kьk jьv kujlisə pod vьlьn, a məd kьk jьv — kuimpeļəsa figura ʙokiş ladorrez vьlьn.*

Kerəm. Nuətam kuimpeļəsa figura AB lador vьliş kьɛəmkə N çutşaꞑ AC dьnə NK perpendikuļar da stroitam $KLMN$ kvadrat, kədalən ladorьs NK ьżda. Nuətam kuimpeļəsa figura A jьvşaꞑ kvadrat M jьlət veşkьt AM_1 viz̦ setçəʒ, kьtçəʒ sija oz krestaş BC ladorkət M çutьn; nuətam sьʙərьn $M_1L_1 \perp AC$, $M_1N_1 \parallel AC$ da $N_1K_1 \perp AC$, aʒʒam kossan kvadratsə.



239 ris.

Dokażitəm. Bьļiş, $K_1L_1M_1N_1$ — veşkьtpeļəsa figura. Kuimpeļəsa AL_1M_1 da ALM figura podoʙiaiş loə: $\frac{M_1L_1}{ML} = \frac{M_1A}{MA}$; kuimpeļəsa AM_1N_1 da AMN figuraez podoʙiaiş loə: $\frac{M_1N_1}{MN} = \frac{M_1A}{MA}$, siʒkə $\frac{M_1L_1}{ML} = \frac{M_1N_1}{MN}$, stroitəm şərti $ML = MN$ kьʒ kvadrat ladorrez, a sijən i $M_1L_1 = M_1N_1$, mədꞑoż, veşkьtpeļəsa $K_1L_1M_1N_1$ figura — kvadrat.

7 §. Podoʙnəja kujlan unapeļəsa figuraez. Podoʙialən centra.

Zadaça. *Stroitnь unapeļəsa figura, podoʙnəjə şetəmlə.*

Stroitəm. Boştam şetəm unapeļəsa $ABCDE$ figura pьɛkьn kьtənkə S çut da nuətam setiş jugərrez sь jьlət (240 ris.).

Nija kolasiş ətik jugər vьlьn, suam SA vьlьn, вoştam A_1 çut (etijə çutsə tujə вərjьnь şetəm unapeļəsa figura pьekьn ļiвo sь sajьn) da nuətam veşkьt viz $A_1B_1\|AB$ setçəз, medвь sija pantaşis B_1 çutьn SB jugərkət; B_1 çutət nuətam $B_1C_1\|BC$ setçəз, medвь sija pantaşis C_1 çutьn SC jugərkət; sьвərьn $C_1D\|CD$, $D_1E_1\|DE$ da ətlaalam E_1 da A_1; petas unapeļəsa $A_1B_1C_1D_1E_1$ figura, kəda podoвnəj şetəm unapeļəsa $ABCDE$ figuralə.

Вьļiş, jugərrez puçok jьliş ţeorema şərti mijan loə:

$$\frac{SA_1}{SA}=\frac{SB_1}{SB}=\frac{SC_1}{SC}=\frac{SD_1}{SD}=\frac{SE_1}{SE}.$$

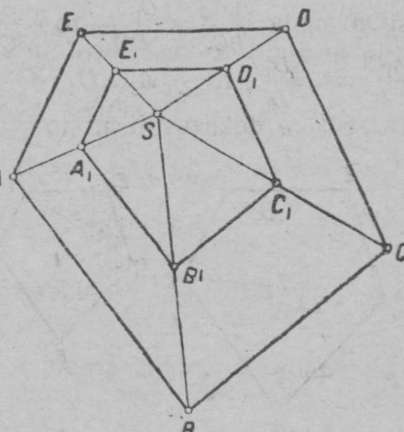
Siзkə, $E_1A_1\|EA$, siз-kьз $\frac{SA_1}{SA}=\frac{SE_1}{SE}$.

$A_1B_1\|AB$, $B_1C_1\|BC$ da siз oз., eta şərti, $\angle A_1=\angle A$, $\angle B_1=\angle B$, $\angle C_1=\angle C$ da siз oз. kьз peļəssez, kədnalən ladorreznьs paraļļeļnəjəş, da

$$\frac{SA_1}{SA}=\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{SB_1}{SB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{SC_1}{SC}=\frac{C_1D_1}{CD}=\frac{CD_1}{CD}=\frac{D_1E_1}{DE}=\frac{SE_1}{SE}=\frac{E_1A_1}{EA}.$$

Ena otnoseņņoez ətьzdaşəmiş loə, sto:

$$\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{C_1D_1}{CD}=\frac{D_1E_1}{DE}=\frac{A_1E_1}{AE}.$$



240 ris.

Unapeļəsa $A_1B_1C_1D_1E_1$ da $ABCDE$ figuralə eməş sootvetstvennəja ətьzda peļəssez da nьlən ətiveştiş ladorreznьs proporcionaļnəjəş; siзkə $A_1B_1C_1D_1E_1 \sim ABCDE$. Çut S suşə p o d o в i a c e n t r a ə n, a aşnьs unapeļəsa figuraes suşənь p o d o в n ə j a k u j l a n figuraezən.

Ətik unapeļəsa figuraliş-kə veznь mestasə, suam ətsə nь kolasiş вergətnь, to unapeļəsa figuraezlən podoвiaьs koļtças; veзşan nьlən poḑoвnəja kujləmьs, mədņoz, nьlən ətveştiş ladorrez oz loə paraļļeļnəjəş, da jugərrez, kədna ətlaalənь sootvetstvennəja ətьzda peļəssezliş jьvvez, oz munə ətik çutət; unapeļəsa figuraes əstasə podoвialiş centra.

Medвь unapeļəsa figuraez vəlisə podoвnəjəş, kolə: 1) nь sootvetstvennəj peļəssezlən ətьzdaşəm, 2) ətiveştiş lədorrezlən proporcionaļnoş. P o d o в n ə j a k u j l a n unapeļəsa figuraezlə sьşşa kolə esə, medвь vəli i podoвia centra.

8 §. Podoвnəj unapeļəsa figura ḑiagonaļļezlən svojstvo.

Ķər kolə mədpəv çerţitnь plannez ņeətkoḑ mastaввezən, şetəm plansə вurzьk torjətnь una uçastok vьlə da sьвərьn çerţitnь nijə ətik ʙərьn mədikə. Plansə çastəƶьk torjətənь kuimpeļəsa figuraez vьlə. Seꞓəm çerţitəmьs munə to kьꞓəm kьk ţeorema şərti.

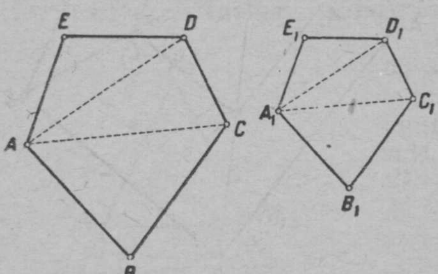
1. *Ţeorema.* Ḑiagonaļļez, kədna nuətəmaş kьk podoʙnəj da podoʙnəja kujlan unapeļəsa figuraiş sootvetstvennəja ətьƶda peļəssez jьvvezşaņ, torjətənь nijə ətmьmda podoʙnəj da podoʙnəja kujlan kuimpeļəsa figuraez vьlə.

Şetəm: $A_1B_1C_1D_1E_1 \backsim ABCDE$ (241 ris.), mədņoz,
1) $\angle A_1 = \angle A$, $\angle B_1 = \angle B$ i siʒ oʒ.;
2) $\dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{B_1C_1}{BC} = \dfrac{C_1D_1}{CD}$ i siʒ. oʒ.;
3) A_1D_1 da AD, A_1C_1 da AC — ətveştiş ḑiagonaļļez.

Ķolə dokaƶitnь: 1) $\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle ABC$;
2) $\triangle A_1C_1D_1 \backsim \triangle ACD$;
3) $\triangle A_1D_1E_1 \backsim \triangle ADE$.

Dokaƶitəm. $\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle ABC$, siʒ kьʒ uslovia şərti $\angle B_1 = \angle B$ da $\dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{B_1C_1}{BC}$; nь podoʙiaiş petə, sto $\angle A_1C_1B_1 = \angle ACB$, no $\angle C_1 = \angle C$, a sijən $\angle A_1C_1D_1 = \angle ACD$, etaşşa, $\dfrac{B_1C_1}{BC} = \dfrac{A_1C_1}{AC}$, a sijən, mьļa $\dfrac{B_1C_1}{BC} = \dfrac{C_1D_1}{CD}$, to $\dfrac{A_1C_1}{AC} = \dfrac{C_1D_1}{CD}$. Kьʒ $\angle A_1C_1D_1 = ACD$ da $\dfrac{A_1C^1}{AC} = \dfrac{C_1D_1}{CD}$, to $\triangle A_1C_1D_1 \backsim \triangle ACD$.

Siʒ-ƶə dokaƶьvajtşə, sto $\triangle A_1D_1E_1 \backsim \triangle ADE$.



241 ris.

Petkətas. **Podoʙnəj unapeļəsa figuraezlən ətveştiş giagonaļļez proporcionaļnəjəş ətveştişa ladorrezlə:**

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{C_1D_1}{CD} = \frac{A_1D_1}{AD}$$

da siʒ oʒ.

2. *Ţeorema (ʙərəna).* Kьk unapeļəsa figura-kə torjaşənь ətveştiş ḑiagonaļļezən ətmьmda podoʙnəj da podoʙnəja kujlan kuimpeļəsa figuraez vьlə, to seꞓəm unapeļəsa figuraes podoʙnəjəş.

Şetəm: $\left.\begin{array}{l}\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle ABC \\ \triangle A_1C_1D_1 \backsim \triangle ACD \\ \triangle A_1D_1E_1 \backsim \triangle ADE\end{array}\right\}$ da podoʙnəja kujlənь (241 ris.).

Ķolə dokaƶitnь: $A_1B_1C_1D_1E_1 \backsim ABCDE$, mədņoz,
1) $\angle A = \angle A_1$; $\angle B = \angle B_1$ i siʒ oʒ.,
2) $\dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{B_1C_1}{BC} = \dfrac{C_1D_1}{CD}$ i siʒ oʒ.

Dokaƶitəm. Ķuimpeļəsa $A_1B_1C_1$ da ABC figura podoʙiaiş petə, sto $\angle B_1 = \angle B$ da $\angle A_1C_1B_1 = \angle ACB$ (1). Ķuimpeļəsa $A_1C_1D_1$ da ACD figura podoʙiaiş petə, sto $\angle A_1C_1D_1 = \angle ACD$ (2); sodtamkə çļennez şərna ətьƶdaşəmmesə (1) da (2), mijan loə, sto $\angle C_1 =$

$= \angle C$; siз-zə dokazitçə unapeļəsa figuraiş mədik peļəssezlən ətьz-daşəmьs.

Kuimpeļəsa $A_1B_1C_1$ da ABC figura podoвiaiş petə proporcionaļnoş nь ladorrezlən, a imenno: $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC}$; kuimpeļəsa $A_1C_1D_1$ da ACD figura podoвiaiş loə: $\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{C_1D_1}{CD}$; kutam-kə ordçən vajətnь medвərja kьk ətьzdaşəmsə, aззam: $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1D_1}{CD}$. Siз-zə dokazitşə kьknan unapeļəsa figura mədik ladorrezlən proporcionaļnoş. I siз, $A_1B_1C_1D_1E_1 \backsim ABCDE$.

9 §. Podoвnəj figuraez perimetraezlən otnoseŋŋo.

***Ţeorema.* Podoвnəj unapeļəsa figuraezlən perimetraeznьs otnoşitçənь kьз unapeļəsa figuraezlən sootvetstvennəj ladorreznьs.**

Şetəm: $A_1B_1C_1D_1E_1 \backsim ABCDE$ (241 ris.).

Kolə dokazitnь: $\frac{A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1 + D_1E_1 + E_1A_1}{AB + BC + CD + DE + EA} = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} \ldots$

D o k a z i t ə m. Unapeļəsa $ABCDE$ da $A_1B_1C_1D_1E_1$ figuraez podoвiaiş loə:

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1D_1}{CD} = \frac{D_1E_1}{DE} = \frac{E_1A_1}{EA} = k.$$

Una ətьzda otnoseŋŋoez svojstvo şərti mijan em:

$$\frac{A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1 + D_1E_1 + E_1A_1}{AB + BC + CD + DE + EA} = k = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} \ldots$$

ļiвo $\frac{P_1}{P} = \frac{A_1B_1}{AB}$, kьtən P_1 da P — şetəm unapeļəsa figuraezlən perimetraez.

Ţeoremaьs loə spravedļivəj ļuвəj n ladora podoвnəj unapeļəsa figuraez ponda; sija spravedļivəj i sija sluçaj ponda, kər $n = 3$, mədŋoz, podoвnəj kuimpeļəsa figuraez ponda.

10 §. Podoвnəj kuimpeļəsa da unapeļəsa figuraez plossaddezlən otnoseŋŋo.

1. *Ţeorema.* Plossaddez kьk kuimpeļəsa figuraezlən, kədnalən eməş ətьzda peļəsən, otnoşitçənь ətaməd kolasanьs kьз ena peļəssez dьniş ladorrezlən əkşannez.

Şetəm: $\triangle ABC$ da $\triangle A_1B_1C_1$; $\angle A = \angle A_1$ (242 ris.).

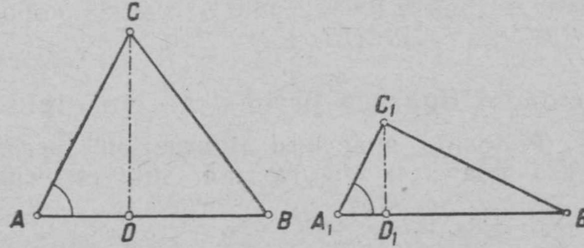
Kolə dokazitnь: $\frac{S}{S_1} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}$.

D o k a z i t ə m. Nuətam-kə şetəm kuimpeļəsa figuraezьn CD da C_1D_1 vьlьna, mijan loas:

$$\frac{\text{pl}\cdot ABC}{\text{pl}\cdot A_1B_1C_1} = \frac{S}{S_1} = \frac{AB \cdot CD}{A_1B_1 \cdot C_1D_1} = \frac{AB}{A_1B_1} \cdot \frac{CD}{C_1D_1}. \quad (1)$$

$\triangle ACD \backsim \triangle A_1C_1D_1$, sijən, mьļa nija veşkьtpeļəsaəş da eməş ņьlən sootvetstvennəja ətьƶda vekņit peļəsən, $\angle A = \angle A_1$; ņь podoвiaiş petə, sto $\frac{CD}{C_1D_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, (2) veƶam-kə ətьƶdaşəmьn (1) otnoseņņo $\frac{CD}{C_1D_1}$ sьkət ətьƶda $\frac{AC}{A_1C_1}$ otnoseņņoən, loas:

$$\frac{S}{S_1} = \frac{AB}{A_1B_1} \cdot \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}.$$



242 ris.

Ţeoremaьs koļçə vernəjən i sija sluçaj ponda, kər $\angle A + \angle A_1 = 2d$.

2. *Ţeorema*. Podoвnəj kuimpeļəsa figuraezlən plossaḑḑez otnoşitçənь kьʒ ətiveştiş ladorrezlən kvadrattez.

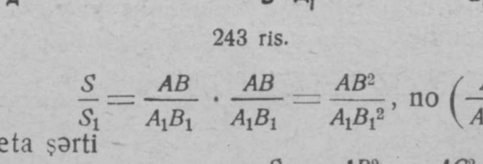
Şetəm: $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$ (243 ris.).

Kolə dokaƶitnь: $\frac{S}{S_1} = \frac{AB^2}{A_1B_1^2} = \frac{AC^2}{A_1C_1^2} = \frac{BC^2}{B_1C_1^2}$.

D o k a ƶ i t ə m. $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$, eta şərti, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, a sijən $\frac{S}{S_1} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1} \cdot \frac{AC}{A_1C_1}$. (1)

Kuimpeļəsa figuraez podoвiaiş petə, sto

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}. \quad (2)$$



243 ris.

Veƶam-kə otnoseņņoвьn (1) ətik otnoseņņo mədikkez (2) kolasiş ļuвəj otnoseņņoən, loas:

$$\frac{S}{S_1} = \frac{AB}{A_1B_1} \cdot \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AB^2}{A_1B_1^2}, \text{ no } \left(\frac{AB}{A_1B_1}\right)^2 = \left(\frac{AC}{A_1C_1}\right)^2 = \left(\frac{BC}{B_1C_1}\right)^2,$$

eta şərti

$$\frac{S}{S_1} = \frac{AB^2}{A_1B_1^2} = \frac{AC^2}{A_1C_1^2} = \frac{BC^2}{B_1C_1^2}.$$

***Ţeorema*. Podoвnəj unapeļəsa figuraezlən plossaḑḑezьs otnoşitçənь kьʒ ətiveştiş ladorrezlən kvadrattez.**

Setəm: $ABCDE \backsim A_1B_1C_1D_1E_1$ (241 ris., 128 ļisвok).

Kolə dokaƶitnь: $\dfrac{S}{S_1} = \dfrac{AB^2}{A_1B_1^2} = \dfrac{BC^2}{B_1C_1^2} = \ldots$

D o k a ƶ i t ə m. Ḑiagonaļļezən, kədna nuətəmaş sootvetstvennəj A da A_1 jьvveziş, şetəm unapeļəsa figuraez torjaşşənь ətmьmda sootvetstvennəja podoвnəj kuimpeļəsa figuraez vьlə: ABC da $A_1B_1C_1$, ACD da $A_1C_1D_1$, ADE da $A_1D_1E_1$ vьlə. Kuimpeļəsa figuraez podoвiaiş petə:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{pl \cdot ABC}{pl \cdot A_1B_1C_1} = \dfrac{AB^2}{A_1B_1^2} = \dfrac{BC^2}{B_1C_1^2}; \quad \dfrac{pl \cdot ACD}{pl \cdot A_1C_1D_1} = \dfrac{CD^2}{C_1D_1^2}; \\ \qquad\qquad \dfrac{pl \cdot AED}{pl \cdot A_1E_1D_1} = \dfrac{ED^2}{E_1D_1^2} = \dfrac{AE^2}{A_1E_1^2}. \end{array}\right\} \tag{1}$$

Unapeļəsa figuraez podoвiaiş mijan em:

$$\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{CD}{C_1D_1} = \dfrac{DE}{D_1E_1} = \dfrac{EA}{E_1A_1}$$

ļiвo

$$\dfrac{AB^2}{A_1B_1^2} = \dfrac{BC_2}{B_1C_1^2} = \dfrac{CD^2}{C_1D_1^2} = \dfrac{DE^2}{D_1E_1^2} = \dfrac{EA^2}{E_1A_1^2}. \tag{2}$$

Sravņitam-kə otnoseņņoesə rjadđeziş (1) da (2), loə:

$$\dfrac{pl \cdot ABC}{pl \cdot A_1B_1C_1} = \dfrac{pl \cdot ACD}{pl \cdot A_1C_1D_1} = \dfrac{pl \cdot AED}{pl \cdot A_1E_1D_1} = \dfrac{AB^2}{A_1B_1^2} = \ldots$$

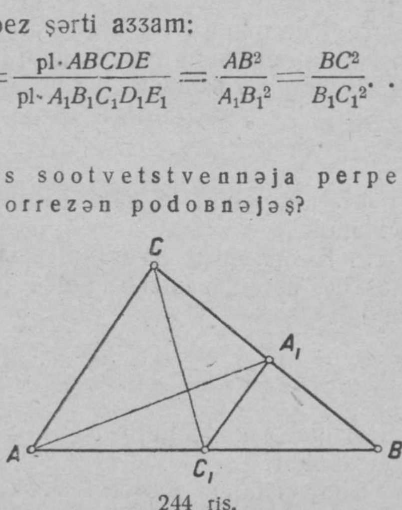
Una ətьƶda otnoseņņo svojstvoez şərti aʒʒam:

$$\dfrac{pl \cdot ABC + pl \cdot ACD + pl \cdot AED}{pl \cdot A_1B_1C_1 + pl \cdot A_1C_1D_1 + pl \cdot A_1E_1D_1} = \dfrac{pl \cdot ABCDE}{pl \cdot A_1B_1C_1D_1E_1} = \dfrac{AB^2}{A_1B_1^2} = \dfrac{BC^2}{B_1C_1^2} \ldots$$

Jualannez da upraƶņeņņoez.

1. Мьļa kuimpeļəsa figuraes sootvetstvennəja perpenđikuļarnəj ļiвo paraļļeļnəj ladorrezən podoвnəjəş?

2. Мьļa kvadrat da veşkьtpeļəsa figura oz vermə lьđđişşьnь podoвnəj figuraezən, kəţ peļəsseznьs nьlən i ətьƶdaəş kьз veşkьt peļəssez?



244 ris.

3. Мьļa a ladora kvadrat da $2a$ ladora romв aвu podoвnəj figuraez, kəţ nьlən ladorreznьs i proporcionaļnəjəş?

4. Кьk kuimpeļəsa figura podoвia ponda kolə nь peļəssezlən ətьƶdaşəm ļiвo nь ladorrezlən proporcionaļnoş. Vermasə-ja lonь podoвnəjjezən kьk unapeļəsa figura, kədnalən ətmьmdaəş ladorreznьs, şetəm-kə ena usloviaeziş kədakə ətьs?

5. Stroitnь kuimpeļəsa ABC figura kьeəmkə formaaə da jugərrez puçok sposoвən stroitnь sьlə podoвnəjə; podoвia koeficientьs $k = 1{,}5$.

6. Kuimpeļəsa ABC figuralən ladorres $AB = 6\ sm$, $BC = 8\ sm$ da $AC = 9\ sm$. Tədnь, mьj ьƶdaəş podoвnəj kuimpeļəsa figuralən ladorres, kər $k = 2{,}5$.

7. Trapecialən điagonaļļes ətaməd kolasьn jukşənь torrez vьlə, kədna proporcionaļnəjəş poddezlə. Dokaƶitnь.

8. Ķuimpeļəsa ABC figuraьn nuətəmaş A da C peļəs jьvveziş AA_1 da CC_1 meḑiana (244 ris.). Dokaƶitnь, ȣto veşkьt C_1A_1 viz keralə eta kuimpeļəsa figura вerdiş podoвnəj kuimpeļəsa figura da ȣto AA_1 da CC_1 meḑiana jukşənь otnoȣeņņoьn 2:1.

9. Şetəmaş 3 kuimpeļəsa figura, kədnalən ladorres loənь: 1) 10; 8 da 12; 2) 7,5; 6 da 7,2; 3) 25; 20 da 24.

Təḑnь, kədna ena kuimpeļəsa figuraez kolasiş podoвnəjəş.

10. Ķuimpeļəsa figuraə, kədalən poḑьs $a = 10$ *sm* da vьlьnaьs $h = 15$ *sm*, pьrtəm kvadrat, kьk jьv kədalən kujlənь kuimpeļəsa figura pod vьlьn, a məd kьk jьlьs — kuimpeļəsa ladorrez vьlьn. Aззьnь kvadrat laḑorliş kuẓasə.

11. Peļəsə pьrtəmaş kьk ətəriş pavkətçan gəgrəs, kədnalən centraez sulalənь peļəs jьv dьnşaņ 9 *sm* ьlьna da 3 *sm* ьlьna. Aззьnь ena gəgrəssezliş raḑiussez.

12. Veşkьtpeļəsa $ABCD$ figura rьɛkьn kujlə mədik veşkьtpeļəsa $A_1B_1C_1D_1$ figura, kədalən ladorres paraļļeļnəjəş medoзза veşkьtpeļəsa figura laḑorrezlə da sulalənь nь dьnşaņ ətьlьna. Poḑoвnəjəş-ja ena veşkьtpeļəsa figuraes?

XVII. ĶUIMPEĻƏSA FIGURA EĻEMENTTEZ KOLASЬN METRIÇESKƏJ SOOTNOȢEŅŅOEZ.

1 §. Ķuimpeļəsa figura eļementtez kolasьn zavişimoş.

1. Ļuвəj kuimpeļəsa figura peļəssez kolasьn zavişimoş tədşə ətьƶdaşəmən:

$$\angle A + \angle B + \angle C = 2d.$$

2. Ķuimpeļəsa figura ladorrez kolasьn em to kьɛəm zavişimoş: kuimpeļəsa figuralən ļuвəj ladorьs məd kьk lador ətlaşşa uçətƶьk da koļanşa ьзьtƶьk.

$$a < b + c \text{ da } a > b - c.$$

3. Ķuimpeļəsa figura ladorrez da peļəssez kolasьn em seɛəm zavişimoş:

a) Ķuimpeļəsa figuraьn ьзьtƶьk lador veştьn kujlə i ьзьtƶьk peļəs da, вərən, ьзьtƶьk peļəs veştьn kujlə i ьзьtƶьk lador: ȣuam, kьз

$$AC > BC, \text{ to } \angle B > \angle A; \text{ kьз } \angle B > \angle A, \text{ to } AC > BC;$$

в) kaţet, kəda kujlə 30° ьƶda peļəs veştьn, ətьƶda loə gipoţenuza зьnkət.

Ena viştaləm ţeoremaes oz şetə opreḑeļonnəj lьddəsa zavişimoş, kəda em kuimpeļəsa figura ladorrez kolasьn da nь eļementtez kolasьn — vьlьna, ladorrezlən proekcia, meḑiana kolasьn da siз oз., a siз-ƶə kuimpeļəsa figura ladorrez da sь peļəssez kolasьn.

Bərlaņişƶьk ţeoremaez sodtənь etə maţerialsə da otsalənь kuimpeļəsa figuraiş torja viz eļementtez ьƶda şərti tədnь sьliş mədik viz eļementtez; a kuimpeļəsa figura ladorrez da peļəssez kolasiş lьdḑəsa zavişimoşьs tədşə natoḑiļ maţemaţika jukətьn — trigonometriaьn.

2 §. Veşkьtpeļəsa kuimpeļəsa figura eļementtez kolasьn metriçeskəj sootnoseņņoez.

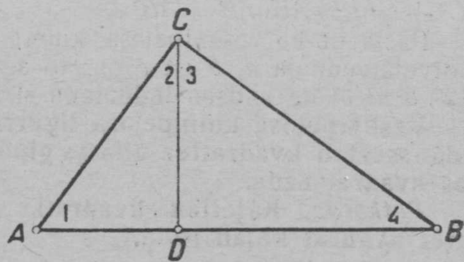
1. *Ţeorema.* **Vьlьna, kəda nuətəma kuimpeļəsa figuraьs veşkьt peļəs jьvşaņ gipoţenuza dьnə, jukə sijə kьk kuimpeļəsa figura vьlə, kədna podoвnəjəş ətaməd kolasьn da podoвnəjəş şetəm kuimpeļəsa figuralə.**

Şetəm: $\triangle ABC$; $\angle ACB = d$; $CD \perp AB$ (245 ris.).

Kolə dokazitnь: $\triangle ADC \backsim \triangle BDC \backsim \triangle ABC$.

Dokazitəm: Vizətam veşkьtpeļəsa kuimpeļəsa figuraez:

1) $\triangle ACD$ da $\triangle ABC$. Nьlən $\angle 1$ — ətlasa, eta şərti, nija ətьždapeļəsaəş, a sizkə, to nija podoвnəjəş. $\triangle ACD \backsim \triangle ABC$.



245 ris.

2) $\triangle BCD$ da $\triangle ABC$. Nьlən $\angle 4$ — ətlasa, eta şərti, nija ətьždapeļəsaəş, a etaşaņ nija podoвnəjəş. $\triangle BCD \backsim \triangle ABC$.

3) $\triangle ACD$ da $\triangle CBD$. Bьdьs ena kuimpeļəsa figuraeziş podoвnəj şetəm kuimpeļəsa ABC figuralə, a sijən i nija podoвnəjəş ətamədlə. $\triangle ACD \backsim \triangle ABC$ da $\triangle CBD \backsim \triangle ABC$. Sizkə, $\triangle ACD \backsim CBD$.

2. *Ţeorema.* **Vьlьna, kəda nuətəma veşkьtpeļəs jьvşaņ gipoţenuza vьlə, loə sərət proporcionaļnəjən gipoţenuza vьlə kaţettes proekciaez kolasьn.**

Şetəm: $\triangle ABC$; $\angle ACB = d$; $CD \perp AB$ (245 ris.).

Kolə dokazitnь: $AD:CD = CD:DB$.

Dokazitəm. $\triangle ACD$ da $\triangle CBD$ podoвiaiş loə nь ətiveştiş ladorrezlən proporcionaļnoş, mədņož, $\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DB}$, ļiвo $CD^2 = AD \cdot DB$, kьşaņ $CD = \sqrt{AD \cdot DB}$, eta dьrņi kьz estən, siz i ozlaņ boşşə toko vužlən arifmeţiçeskəj znaçeņņo, sijən, mьļa şorņitənь toko orətok kuža jьliş, a ņe sь veşkəv jьliş.

3. *Ţeorema.* **Bьd kaţet loə sərət proporcionaļnəjən gipoţenuza da gipoţenuza vьlas sь proekcia kolasьn.**

Dokazitəm. 1) Kuimpeļəsa ACD da ABC figura (245 ris.). podoвiaiş petə: $AB:AC = AC:AD$ ļiвo $AC^2 = AB \cdot AD$, kьşaņ $AC = \sqrt{AB \cdot AD}$.

2) Kuimpeļəsa CBD da ABC figura podoвiaiş petə: $AB:CB = CB:DB$, ļiвo $CB^2 = AB \cdot DB$, kьşaņ $CB = \sqrt{AB \cdot DB}$.

Petkətas. **Kaţettezlən kvadratteznьs otnoşitçənь ətaməd kolasьn kьz gipoţenuza vьlə nьlən proekciaez.**

Bьļiş: $AC^2 = AB \cdot AD$ da $CB^2 = AB \cdot DB$.

Jukam-kə çlennez şərna ət ətьzdaşəmsə məd vьlas, mijan loə:

$$\frac{AC^2}{CB^2}=\frac{AB\cdot AD}{AB\cdot DB}=\frac{AD}{DB}.$$

4. *Ţeorema (Pifagorlən).* Gipoţenuzalən kvadratьs sija ətlas ьzda, kəda loə kaţettezliş kvadrattez ətlaaləmşaņ.

Şetəm: $\triangle ABC$; $\angle C=d$.

Kolə dokazitnь: $AC^2+CB^2=AB^2$.

Dokazitəm (kuimət). 1) $AC^2=AB\cdot AD$ da 2) $CB^2=AB\cdot DB$.

Ətlaalam-kə çlennez şərna enə ətьzdaşəmmesə, loə: $AC^2+CB^2=AB\cdot AD+AB\cdot DB=AB(AD+DB)$, no $AD+DB=AB$, a sijən $AC^2+CB^2=AB\cdot AB=AB^2$.

Pasjavnь-kə veşkьtpeləsa kuimpeləsa figuraliş ladorrez kuzasə sootvetstvennəja a, b da c pьr, to зendətəmən etə ţeoremasə gizənь: $a^2+b^2=c^2$ da вьdsən lьddətənь siз:

Veşkьtpeləsa kuimpeləsa figura kaţettezliş kuzaesə pasjalan lьddəssezlən kvadrattez ətlasьs gipoţenuzaliş kuzasə pasjalan lьddəs kvadrat ьzda.

***Petkətas.* Kaţetlən kvadratьs gipoţenuza kvadrat da məd kaţet kvadrat koļan ьzda.**

$$a^2+b^2=c^2,\ \text{kьşaņ}\ a^2=c^2-b^2,\ \text{ļiвo}\ a=\sqrt{c^2-b^2}$$

$$\text{da}\ b^2=c^2-a^2,\ \text{ļiвo}\ b=\sqrt{c^2-a^2}.$$

5. *Ţeorema (вərəna).* Kuimpeləsa figura a, b da c ladorrez kolasьn-kə em zavişimoş $a^2+b^2=c^2$, to kuimpeləsa figuraьs veşkьtpeləsa.

Şetəm: a, b da c — kuimpeləsa figura ladorrez da $a^2+b^2=c^2$.

Kolə dokazitnь: Kuimpeləsa figura — veşkьtpeləsa.

Dokazitəm. Stroitam veşkьtpeləsa kuimpeləsa figura, kaţettez kədalən a da b, da pasjalam sьliş gipoţenuzasə m pьr. Sek Pifagor ţeorema şərti $a^2+b^2=m^2$. Sravnņitam-kə etə ətьzdaşəmsə şetəm $a^2+b^2=c^2$ ətьzdaşəmkət, mijə vermam вunь, вto $c^2=m^2$ ļiвo $c=m$. Siзkə, şetəm kuimpeləsa figura da veşkьtpeləsa kuimpeləsa figura ətьzdaəş kuim lador şərti, a sijən i şetəm kuimpeləsa figuraьs veşkьtpeləsa.

6. Viзətəm ţeoremaьs (da sьlə вərənaьs) loə geometriaьn əddən vaznəj ţeoremaən; sijə ləşətləm greçeskəj filosof Pifagor, mьjşaņ sija i вuşə „Pifagor ţeoremaən". Tədənь, вto veşkьtpeləsa kuimpeləsa figura ladorrez kolasьn lьddəsa zavişimoşьs, kədija aззişşə etija ţeorema şərti, vələm tədsa esə jegipţanalə ,Pifagor velətişşezlə. Veşkьtpeləsa kuimpeləsa figura, kədalən ladorres 3, 4 da 5, вuşə jegipetskəj kuimpeləsa figuraən. Ozзьksa mumerajtişşez (ţemļemerrez) veşkьtpeləs stroitləmaş to kьeəm prijom şərti: gərəddezən nija jukləmaş vəsņit gezok 12 ətьzda tor vьlə, kərtavləmaş sьliş koņeççesə da zelətləmaş sijə mu vьlьn majəzokkezən kuimpeləsa figura çuzəm şərti, kədalən ladorres vələmaş 3, 4 da 5 jukəmən (deļenņoən), i sek arkmьvləm veşkьt peləs 3 da 4 jukəma ladorrezən.

Veşkьtpeləsa kuimpeləsa figuraez, kədnalən ladorres merajtşənь ʙьdsa lьdḑəssezən, suşənь pifagora kuimpeļəsa figuraezən, aşnьs lьdḑəsses — pifagora lьdḑəssezən. Siʒ, 3, 4 da 5; 5, 12 da 13; 6, 8 da 10; 7, 24 da 25; 8, 15 da 17; 9, 12 da 15; 10, 24 da 26 da siʒ oʒ. — pifagora lьdḑəssez.

3 §. Piņəlapeļəsa kuimpeļəsa figura eļementtez kolasьn metriçeskəj zavişimoş.

1. *Ţeorema.* **Kuimpeļəsa figura vekņit peļəs veştiş ladorlən kvadratьs uçətƶьk məd kьk lador kvadrattez ətlasşa sija kьkpəvsa əkşanən, kəda loə nь kolasiş ət ladorlən da sь vьlə məd lador proekcialən.**

Şetəm: $\triangle ABC$; $\angle A$ — vekņit; m — b vьlə c proekcia (246 ris.).
Kolə dokaƶitnь: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bm$.

Dokaƶitəm. Nuətam B peļəs jьvşaņ vьlьna $BD = h$; loasə kьk veşkьtpeļəsa kuimpeļəsa ABD da BDC figura; $AD = m$ em AB ladorlən AC lador vьlə proekcia.

$\triangle BDC$ figuraiş mijan em:

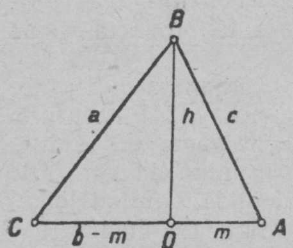
$$a^2 = h^2 + (b - m)^2. \qquad (1)$$

$\triangle ABD$ figuraiş mijan em:

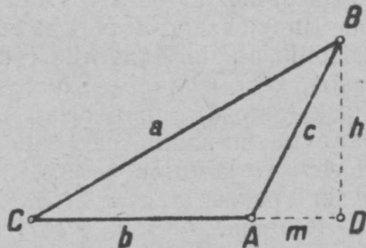
$$h^2 = c^2 - m^2. \qquad (2)$$

Ətlaalam-kə çļennez şərna ətьƶdaşəmmez (1) da (2), keram kolana vezəmmez; loas şərşən-ʙərşən:

$a^2 + h^2 = h^2 + (b - m)^2 + c^2 - m^2$; $a^2 = (b - m)^2 + c^2 - m^2$;
$a^2 = b^2 - 2bm + m^2 + c^2 - m^2$, ļibo $a^2 = b^2 + c^2 - 2bm$.



246 ris.



247 ris.

2. *Ţeorema.* **Kuimpeļəsa figura paşkьt peļəs veştiş ladorlən kvadratьs ьʒьtƶьk məd kьk lador kvadrattez ətlasşa sija kьkpəvsa əkşanən, kəda loə nь kolasiş ət ladorlən da sь sodtət vьlə məd lador proekcialən.**

Şetəm: $\triangle ABC$; $\angle A$ — paşkьt (247 ris.).
Kolə dokaƶitnь: $a^2 = b^2 + c^2 + 2bm$.

Dokaƶitəm. Nuətam B jьvşaņ AC pod sodtət dьnə vьlьna $BD = h$, loasə kьk veşkьtpeļəsa kuimpeļəsa figura: BCD da ADB; $AD = m$ — AC lador sodtət vьlə AB ladorlən proekcia; $CD = b + m$.

$\triangle BCD$ figuraiş mijan em:

$$a^2 = h^2 + (b + m)^2. \tag{1}$$

$\triangle ADB$ figuraiş mijan em:

$$h^2 = c^2 - m^2. \tag{2}$$

Ətlaalam-kə çlennez şərna ətъzdaşəmmesə (1) da (2), keram kolana vezəmmez; loas şərşən-bərşən:

$$a^2 + h^2 = h^2 + (b + m)^2 + c^2 - m^2;$$
$$a^2 = (b + m)^2 + c^2 - m^2;$$
$$a^2 = b^2 + 2bm + m^2 + c^2 - m^2.$$

ļiвo

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bm.$$

3. Ķutam-kə ordçən vajətnь vekņit peļəs veştiş lador kvadrat formulasə paşkъt peļəs veştiş lador kvadrat formulakət, kaẓalam, sto nija oz yaçkişə ətamədkət toko medвərja çļenən. Къknan formulasə tuјə ətlaavnь ətikə, sek loas:

$$a^2 = b^2 + c^2 \pm 2bm,$$

kъtən $m - b$ lador ļiвo sъ sodtət vъlə c ladorlən proekcia; minus pas вoşşə sek, kər kossan ladorъs kujlə vekņit peļəs veştъn, da pļus pas — kər sija kujlə paşkъt peļəs veştъn.

4. Vekņitpeļəsa kuimpeļəsa ABC figuraъn-kə (246 ris.) pondam çasъ strevka munan ņozə вergətnь B çut gəgər BA lador, to $\angle A$ pondas ъzdъnь, a $AC = b$ lador vъlə $AB = c$ ladorlən m proekcia pondas çinnь; kər $\angle A$ pərtças veşkъt peļəsə, to proekciaъs loas nuļ ъzda, i mijə aззam Pifagorliş ţeorema.

Въļiş, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bm$; kər $m = 0$ mijan loə: $a^2 = b^2 + c^2$.

Paşkъtpeļəsa kuimpeļəsa ABC figuraъn-kə (247 ris.) pondam çasъ strevka munəmlə panъt вergətnь B çut gəgər BA lador, to i $\angle A$ i $AB = c$ ladorlən m proekcia pondasə çinnь; da kər $\angle A$ pərtças veşkъt peļəsə, sek m proekcia loas nuļ ъzda, i mijan loas Pifagorlən ţeorema: $a^2 = b^2 + c^2$. I siз, Pifagorlən ţeoremaъs loə kъk medвərja ţeoremalən torja (çasnəj) sluçaj.

5. Pifagorlən ţeorema da kъk medвərja ţeorema otsalənь tədnь şetəm kuimpeļəsa figura ladorrez şərti sъliş çuzəmsə sъ peļəssez şərna.

Ķuimpeļəsa ABC figuraъn-kə:

1) $a^2 < b^2 + c^2$, to kuimpeļəsa figuraъs vekņitpeļəsa;
2) $a^2 = b^2 + c^2$, to kuimpeļəsa figuraъs veşkъtpeļəsa;
3) $a^2 > b^2 + c^2$, to kuimpeļəsa figuraъs paşkъtpeļəsa.

Въd torja sluçajъn kolə toko ordçən vajətnь ъзъtzъk ladorliş kvadratsə məd kъk lador kvadrattez ətlaskət.

6 zadaça. Tədnь çuzəmsə kuimpeļəsa figuraliş, kədalən ladorres 13 *sm*, 9 *sm* da 4 *sm* kuẓaəş.

K e r ə m.: $13^2 > 9^2 + 4^2$, eta şərti, kolə dumajtnь, sto şetəm kuimpeļəsa figuraъs — paşkъtpeļəsa.

No zadaça şetəmmez şərti oz tuj stroitnь kuimpeļəsa figura, sijən, mьļa abu sija usloviaьs, kəda kolə kuimpeļəsa figuraez stroitikə, usloviaьs korə, medвь ьзьtzьk lador vəli məd kьk ladorьs ətlasşa uçətzьk; şetəm zadaçaьn $13 = 9 + 4$, mədŋoz, ьзьtzьk ladorьs loə ətьzda məd kьk lador ətlaskət, mьj oz vermь lonь.

Şetəm zadaçasə visətəmьs mьççalə, sto sь votəз, medвь şorŋitnь, kьєəm çuzəma kuimpeļəsa figuraьs ladorres şərti, kolə vezərtnь, tujə-ja stroitnь kuimpeļəsa figurasə zadaça şetəmmes şərti.

I siз, uslovia $13^2 > 9^2 + 4^2$ loə sija usloviaən, kəda kolə paşkьtpeļəsa kuimpeļəsa figura ponda, no ŋe вьdsa. Toko kьknan uslovia şərti poʐə sunь, sto kuimpeļəsa figuraьs paşkьtpeļəsa.

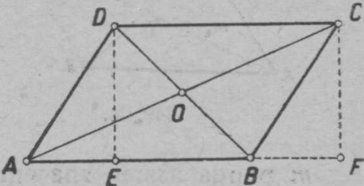
4 §. Paraļļelogram diagonaļļez da ladorrez kolasьn zavişimoş.

Ţeorema. **Paraļļelogram diagonaļļezlən kvadrattez ətlasьs ladorres kvadrattez ətlas ьzda.**

Şetəm: $ABCD$ — paraļļelogram; $AB \parallel CD$ da $AD \parallel BC$ (248 ris.).

Kolə dokazitnь: $AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2$.

Dokazitəm. Nuətam $ABCD$ peraļļelogram B da C jьvşaŋ DE da CF vьlьna; loasə veşkьtpeļəsa kuimpeļəsa DAE da CBF figura; ena kuimpeļəsa figuraes ətьzdaəş, siз-kьз $DA = CB$ da $\angle A = \angle CBF$, a sijən $AE = BF$.



248 ris.

$\triangle ABC$ figuraiş mijan em:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2AB \cdot BF. \quad (1)$$

$\triangle ABD$ figuraiş mijan em:

$$BD^2 = DA^2 + AB^2 - 2AB \cdot AE. \quad (2)$$

Medвərja ətьzdaşəmьn DA^2 vezam-kə BC^2-ən da AE-sə BF-ən da ətlaalam sьвərьn çlennez şərna kьknan ətьzdaşəmsə, loas:

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2.$$

5 §. Kuimpeļəsa figuraliş meḍiana da vьlьna lьdḍəm.

1 zadaça. *Lьdḍьnь kuimpeļəsa figuraliş* m_a *meḍianasə kuim lador şərti:* a, b *da* c (249 ris.).

Kerəm. Nuətam kuimpeļəsa ABC figuraьn meḍiana $AD = m_a$, puktam sь sodtət vьlьn $DE = AD$ da ətlaalam E çut B da C çuttezkət, loas $ABEC$ paraļļelogram, kədalən ladorres — b da c, a diagonaļļes — a da $2m_a$.

Paraļļelogramiş diagonaļļez da ladorrez svojstvo şərti mijan em:

$$(2m_a)^2 + a^2 = b^2 + b^2 + c^2 + c^2,$$

ļiвo $4m_a^2 + a^2 = 2b^2 + 2c^2$, ļiвo $4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$, kьşaŋ $m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$, ļiвo $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$.

Analogia şərti:

$$m_b=\frac{1}{2}\sqrt{2c^2+2a^2-b^2} \text{ da } m_c=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}.$$

2 zadaça. *Lьdđьnь kuimpeļəsa figuraliş* h_b *vьlьnasə kuim lador şərti:* a, b *da* c (250 ris.).

Kerəm. B jьvşaņ kuimpeļəsa figuraьn nuətam vьlьna $BD=h_b$ da AD pasjalam m pьr.

$\triangle ABD$ figuraiş mijan em:

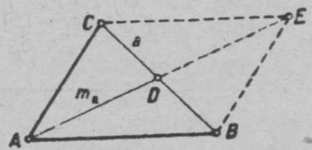
$$h_b^2=c^2-m^2. \quad (1)$$

m kolə veƶnь viştəsən, kədaьn vəlisə вь a, b da c — kuimpeļəsa figuralən ladorreв. $\triangle ABC$ figuraiş mijan em:

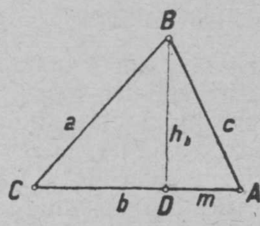
$$a^2=b^2+c^2-2bm,$$

kьtiş aззam:

$$m=\frac{b^2+c^2-a^2}{2b}. \quad (2)$$



249 ris.



250 ris.

m ponda aззəm znaçeņņosə (2) suvtətam ətьƶdaşəmə (1), loas:

$$h_b^2=c^2-\frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{(2b)^2}, \text{ ļiвo } h_b^2=\frac{(2bc)^2-(b^2+c^2-a^2)^2}{(2b)^2}. \quad (3)$$

Torjətam-kə drовliş (3) çişļiţeļsə воştannez vьlə, aззam:

$$h_b^2=\frac{(2bc+b^2+c^2-a^2)\cdot(2bc-b^2-c^2+a^2)}{(2b)^2},$$

ļiвo

$$h_b^2=\frac{[(b+c)^2-a^2]\cdot[a^2-(b-c)^2]}{(2b)^2}.$$

Torjətam-kə eta вərьn воştannez vьlə вьd viştəssə, kədna jərtəmaş kvadrata skoвkaezə, loas:

$$h_b^2=\frac{(b+c+a)\cdot(b+c-a)\cdot(a+b-c)\cdot(a+c-b)}{(2b)^2}. \quad (4)$$

Pasjalam kuimpeļəsa figuraliş perimetrasə $2p$ pьr, mədņoƶ, $a+b+c=2p$, sek :

$$\left.\begin{aligned} b+c&=2p-a, & b+c-a&=2p-a-a=2\ (p-a); \\ a+b&=2p-c, & a+b-c&=2p-c-c=2\ (p-c); \\ a+c&=2p-b, & a+c-b&=2p-b-b=2\ (p-b). \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Vezam-kə ətьzdaşəmas (4) вoştannesə petəm viştəssezən (5), loə:

$$h_b^2=\frac{2p\cdot 2(p-a)\cdot 2(p-b)\cdot 2(p-c)}{4b^2},$$

kьtiş:

$$h_b=\frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \qquad (6)$$

h_c da h_a ponda petə analogia şərti:

$$h_c=\frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};\quad h_a=\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Koļçço esə dokazitnь, sto ŋekəda вoştanьs $p-a$, $p-b$, $p-c$ oz lo otricaţeļnəjən, sijən, mьļa panьta sluçajьn h vəli вь mŋiməj lьddəsən.

Ļuвəj kuimpeļəsa figuralən ladorьs uçətzьk məd kьk lador ətlasşa, a eta şərti $a<b+c$. Pondam-kə ətьzdaşəmşis kьknan tor dьnə sodtьnь a-ən, mijan loə: $2a<a+b+c$ ļiвo $2a<2p$, kьşaŋ $a<p$, da sijən $p-a$ lьddəsьs položiţeļnəj; siз-zə $p-b$ da $p-c$ lьddəssez položiţeļnəjəş; siз-kə, vuz uvtiş viştəsьs — položiţeļnəj lьddəs.

6 §. Kuim lador şərti kuimpeļəsa figuraliş plossaď tədəm. Geron formula.

Zadaça. *Tədnь △ ABC plossadsə kuim lador şərti a, b da c.*

Kerəm. $S_\triangle=\frac{1}{2}a\cdot h_a$, no $h_a=\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$,

kьtən p — kuimpeļəsa figuralən зьperimetra, eta şərti:

$$S_\triangle=\frac{1}{2}a\cdot\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-a)(p-c)};$$

зendətəm вətьn loas:

$$\boxed{S_\triangle=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}\ \text{kv. ətsa.}$$

Eta formulaьs suşə Geron formulaən, greçeskəj maţemaţik Geron ŋim şərti, kəda olis Aļeksandriaьn.

Jualannez da upraźŋeŋŋoez.

1. Tujə-ja stroitnь veşkьtpeļəsa kuimpeļ əsafigurasə opredeļonnəj formaaə, tədam-kə: a) toko sь gipoţenuzaliş kuzasə, в) orətokkez, kədna vьlə torjaşə gipoţenuzaьs veşkьt peļəs jьvşaŋ nuətəm vьlьnaən?

2. Kьєəm loas peļəssez çuzəm şərti kuimpeļəsa figura, kədalən ladorres 4 *sm*, 5 *sm* 6 *sm*? 10 *sm*, 6 *sm*, 4 *sm*?

3. Veşkьtpeļəsa kuimpeļəsa figuraьn h_c vьlьnaьs loə 8 *sm* da gipoţenuza vьlə ətik kaţetlən proekcia loə 6 *sm*. Tədnь kuimpeļəsa figuraliş ladorresə.

4. Kьk vьn — 3,2 *kg* ьzda da 2,4 *kg* vajətəmaş ətik çut dьnə da iŋdəmaş veşkьt peļəs şərna ətaməd dьnə. Aззьnь nь ravnodejstvujussəjliş ьzdasə.

5. Kuimpeļəsa figuralən ladorres 8 *sm*, 10 *sm* da 11 *sm* kuzaəş. Tədnь medianaliş da vьlьnaliş ьzdasə.

XVIII. GƏGĻANЬN PROPORCIONAĻNƏJ ORƏTOKKEZ.

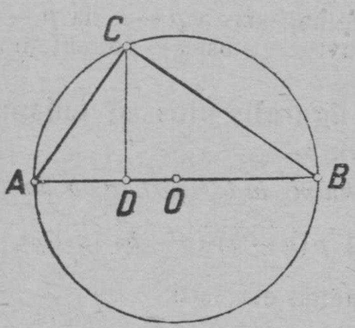
1 §. Gəgrəs çutşaꞑ ḑiametra vьlə nuətəm perpenḑikuļarlən svojstvo.

1. *Ţeorema.* Perpenḑikuļar, kəda nuətəma gəgrəs vьliş kьєəmkə çutşaꞑ ḑiametra vьlə, loə sərət proporcionaļnəjən ḑiametra orətokkez kolasьn, a vьnьs kьknan xordaiş, kədna ətlaaləпь etə çutsə ḑiametra koꞑeççezkət, loə sərət proporcionaļnəjən ḑiametra da ḑiametra vьlas xorda proekcia kolasьn.

Şetəm: AB — ḑiametra; $CD \perp AB$; AC da CB — xordaez (251 ris.).

Kolə dokazitnь: 1) $\frac{AD}{CD}=\frac{CD}{DB}$; 2) $\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{AD}$; 3) $\frac{AB}{CB}=\frac{CB}{DB}$.

D o k a z i t ə m. Ķuimpeļəsa ABC figura — veşkьtpeļəsa, siʒ-kьʒ $\angle C$ pькşə ḑiametra vьlə; CD — sьlən vьlьna, AD da DB — ḑiametra (gipoţenuza) vьlə xordaezlən (kaţettezlən) proekcia, sijən:



251 ris.

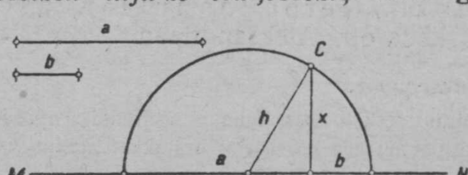
1) $\frac{AD}{CD}=\frac{CD}{DB}$, 2) $\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{AD}$, 3) $\frac{AB}{CB}=\frac{CB}{BD}$.

2. 1 zadaça. *Stroitnь x orətok şetəm kьk a da b orətok kolasьn sərət proporcionaļnəj* (252 ris.).

S t r o i t ə m. Veşkьt MN viʒ vьlə A çutşaꞑ şərşən-bərşən puktam orətok $AD=a$ da orətok $DB=b$. Ḑiametra tujə AB boştəm bərьn nuətam ʒьngəgrəs da D çutət AB dьnə perpenḑikuļar setçəʒ, kьtçəʒ sija oz krestaş gəgrəskət C çutьn, sek $CD=x$ — koşsan orətok.

Bьļiş, $a:x=x:b$, ļibo $x^2=ab$ da $x=\sqrt{ab}$.

2 zadaça. *Dokazitnь, sto kьk ꞑeətьzda a da b lьdḑəslən sərət arifmeţiçeskəj ьʒьtzьk nija-ʒə lьdḑəssezlis sərət geometriçeskəjşa.*



252 ris.

Ķ e r ə m. Aş kьk ꞑeətьzda orətok sootvetstvujtənь a da b lьdḑəslə (252 ris.). Stroitam a da b lьdḑəssezliş sərət geometriçeskəj. $CD=\sqrt{ab}$.

Sərət-ʒə arifmeţiçeskəjьs a da b lьdḑəssezlən, mədꞑoz, $\frac{a+b}{2}$, loə, kьз tьdalə risunok vыlьn, $\frac{AD+DB}{2}=AO=r$. Siзkə, $\frac{a-b}{2}=r$. No CO siззə r ьzda. Veşkьtpeləsa kuimpeləsa COD figuraiş loə, sto $CO>CD$, $CO=\frac{a+b}{2}$ da $CD=\sqrt{ab}$, a sijən $\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$, mədnoz:

kьk neətьzda lьddəssezlən sərət arifmeticeskəjьs ьзьtzьk nijazə lьddəsseziş sərət geometriceskəjşa.

Kьз $b=a$, to i $CD=CO$, sijən, eta sek $\frac{a+a}{2}=\sqrt{aa}$ libo $a=a$.

2 §. Krestaşan xordaez orətokkezlən svojstvo.

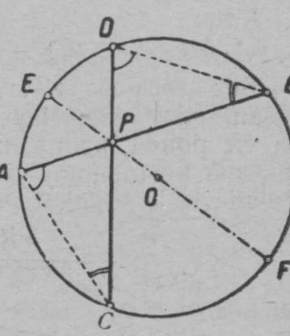
***Teorema.* Şetəmaş-kə kьk libo kьnьmkə xorda, kədna krestaşənь şetəm gəgrəsas ətik çutьn, to lubəj xorda orətokkézlən əkşəsьs em postojannəj veliçina, kəda ətьzda şetəm gəgrəsьs sija-zə çutət munan diametra orətokkez əkşəskət.**

Şetəm: AB da CD — xordaez; EF — diametra; P — nьlən krestaşan çut (253 ris.).

Kolə dokazitnь: $PA\cdot PB=PC\cdot PD=PE\cdot PF$.

D o k a z i t ə m. Nuətam otsalan AC da BD xordaez, loasə kьk kuimpeləsa APC da BPD figura, nija ətьzdapeləsaəş: $\angle A=\angle D$ da $\angle C=\angle B$ kьз pьrtəm peləssez, kədna meraççənь ətlasa dugaezən, siз-kə, kuimpeləsa figuraes podobnəjəş; nь podobiaiş loə:

$$PA:PC=PD:PB,$$
$$\text{libo } PA\cdot PB=PC\cdot PD.$$



253 ris.

Viзətam-kə AB xorda da EF diametra kьз kьk krestaşan xorda, mijan dokazitəm şərti loə:

$$PA\cdot PB=PE\cdot PF.$$

Sijə zə tujə viştavnь lubəj xorda jьliş, kəda munə P çutət, a sijən şetəm gəgrəsas ətik çutьn krestaşan вьd xorda orətokkezlən əkşəsьs em postojannəj veliçina; sija loə seeəm gəgrəsьn sija-zə çutət munan diametra orətokkez əkşəs ьzda.

3 §. Gəglan sajьn krestaşəm krestalan vizzezlən svojstvo.

1. Ətəriş A çutşan nuətəm krestalan AB viz (254 ris.). Krestalan vizlən tor, kəda kujlə gəgrəs pьeкьn, — BC xorda; sьlən gəgrəs sajə şetəm ətərişa A çut dьnəз CA sodtət suşə k r e s t a l a n v i z l ə n ə t ə r i ş t o r. Kьknan orətok ətlas $BC+CA=AB$ воşşə kres talan viz kuza tujə.

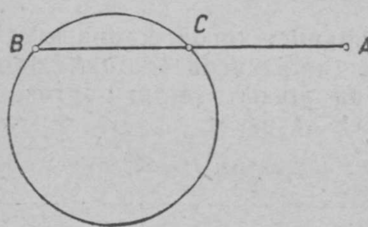
2. ***Teorema.* Gəglan sajiş ətik çutşan-kə nuətəmaş krestalan viz da pavkətçan viz, to вьd krestalan vizlən sь ətəriş tor vыlə**

əkşəsьs em postojannəj veļiçina da pavkətçan viz̧ kvadratkət ətьƶda.

Şetəm: PA da PC—krestalan viz̧z̧ez; PK — pavkətçan viz̧; P — nьlən krestaşan çut (255 ris.).

Kolə dokaƶitnь: $PA \cdot PB = PC \cdot PD = PK^2$.

D o k a ƶ i t ə m. PA da PC — krestalan viz̧z̧ez, PB da PD — nьlən ətəriş torrez. Nuətam otsalan AD da BC xorda, loas kьk kuimpeļəsa figura. Ena kuimpeļəsa figuraezlən kьk sootvetstvennəja ətьƶda peļəsən, $\angle A$ da $\angle C$ — pьrtəm peļəssez, kədna merajtşənь ətlasa BD duga зьnən, da $\angle P$ — ətlasa, siзkə, nija ətьƶdapeļəsaəş, a sijən podobnəjəş. Nь podobiaiş loə: $\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB}$, ļibo $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.



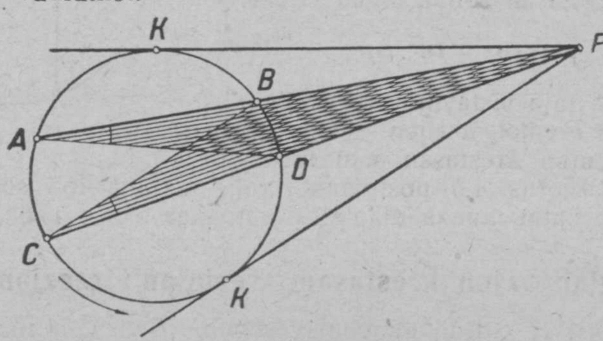
254 ris.

Bergətnь-kə krestalan PC viz̧sə P çut gəgər siз, medbь sija loktis PK viz̧ mestaə, to C da D çut, kьtən krestalan viz̧z̧ez krestaşənь gəgrəskət, pondasə matətçьnь, krestalan PC viz̧ pondas çinnь, da sьlən ətəriş PD tor ьƶdьnь; pavkətçan K çutьn krestalan viz̧ьs i sьlən ətəriş torьs loasə ətьƶdaəş pavkətçan PK viz̧kət, a sijən, veƶamə-kə ətьƶdaşəmьn $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ bьd PC da PD orətoksə PK orətokən, loas: $PA \cdot PB = PK \cdot PK$ ļibo $PA \cdot PB = PK^2$.

I siз:

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD = PK^2.$$

Sijə ƶə poz̧ə viştavnь ļubəj krestalan viz̧ jьliş, kəda nuətəm P çutşaņ, sijən krestalan viz̧lən sь ətəriş tor vьlə ətlasьs bьd krestalan viz̧ ponda, kədna nuətəməş şetəm gəgļan sajiş ətik ətlasa çutşaņ, em postojannəj veļiçina da ьtьƶda sija-ƶə çutşaņ nuətəm pavkətçan viz̧ kvadratkət.



255 ris.

3. ***Petkətas.*** **Gəgļan sajiş ətik ətlasa çutşaņ-kə nuətəməş pavkətçan da krestalan viz̧, to pavkətçan viz̧ьs em bьdsa krestalan viz̧ da sь ətəriş tor kolasьn sərət proporcionaļnəj.**

Bьļiş, $PA \cdot PB = PK^2$, eta şərti $PA : PK = PK : PB$.

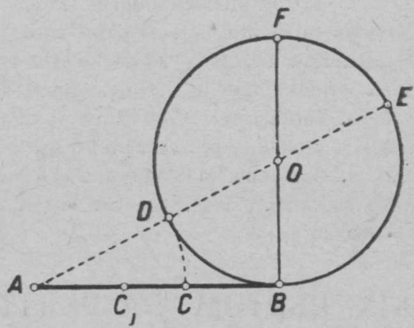
4 §. Doriş da sərət otnoseꞑꞑoьn orətok jukəm.

1. Juknь doriş da sərət otnoseꞑꞑoьn orətok—znaçit aззьnь orətokliş çut, kədaьn sija jukşas kьk tor vьlə siз, sto ьзьtƶьk tor em вьđsa orətok đa sь uçətƶьk tor kolasьn sərət proporcionaļnəj.

2. **Zadaça.** *Juknь sərət orətoksə doriş da sərət otnoseꞑꞑoьn.*

Kerəm. $AB=a$—şetəm orətok. Aş C çut—kossan çut (256 ris.). Pasjalam oзƶьk AC tor x pьr, sek uçətƶьk tor $CB=a-x$. Zadaça uslovia şərti:

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{a-x},\ \text{ļiвo}\ x^2=a\,(a-x),\ \text{ļiвo}\ x^2=a^2-ax.$$



256 ris.

Giƶam etə ətьƶdaşəmsə mədpəv siз: $a^2=x^2+ax$, kьşaꞑ $a^2=x(a+x)$.

Boştam $AB=a$ kьєəmkə gəgrəs dьnə pavkətçan viʐ tujə, $a+x$—krestalan viʐ tujə da x—sь ətəriş tor tujə; etaşşa, вoştam esə, sto krestalan viʐ munə centraət, sek a em gəgrəs ḑiametra.

Stroitəm. Pavkətçan viʐ tujə $AB=a$ da pavkətçan çut tujə B çut вoştəm вərьn, nuətam B çutьn AB dьnə perpenḑikuļar da puktam sь vьlьn BF orətok, kəda ətьƶda a—gəgrəs ḑiametrakət. Jukam BF səri, aззam O centra da keram OB ьƶda radiusən gəgrəs, sьвərьn nuətam O centraət krestalan AE viʐ; sek krestalan viʐlən ətəriş AD torьs x ьƶda, $AD=x$.

Puktam-kə AB vьlьn orətok $AC=AD$, aззam AB orətok vьlьn kossan C çut, kəda jukə sijə doriş da sərət ornoseꞑꞑoьn.

Вьļiş, $AE\cdot AD=AB^2$. No $AE=a+x$, $AD=x$ da $AB=a$, a sijən $(a+x)\,x=a^2$ ļiвo $ax+x^2=a^2$, kьşaꞑ $x^2=a^2-ax=a\,(a-x)$, mədꞑoƶ, $a:x=x:(a-x).$)

Stroitnь-kə otsalan gəgrəs, kəda-вь pavkətçis AB orətokkət sь məd A koꞑeçşaꞑ, to AB orətok vьlьn loas esə ətik C_1 çut, kəda jukas şetəm AB orətoksə doriş da sərət otnoseꞑꞑoьn.

I siз, AB orətok vьlьn eməş kьk çut, kədna jukənь sijə doriş da sərət otnoseꞑꞑoьn. Ena C da C_1 çuttes kujlənь şimmetriçnəja AB orətok sər şərti. Oзƶьk aззəm $a^2=x^2+ax$ ətьƶdaşəmsə tujə giƶnь mədꞑoƶ siз: $x^2+ax-a^2=0$; kər etə uravꞑeꞑꞑosə keram x şərna, loas $x_{1,2}=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{a}{a}\right)^2+a^2}$. Çapkam-kə uravꞑeꞑꞑoiş otricaţeļnəj vnz, sijən mьļa mijə visətam x orətokliş kuʐasə, a ꞑe veşkəvsə sьliş, mijan petə:

$$x=-\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2}\ \text{ļiвo,}\ x=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2}-\frac{a}{2}\ ;$$

siʒkə, x orətokьs loə koļan sija veşkьt peļəsa gipoţenuza kolasьn, kədalən kaţettes $\frac{a}{2}$ da a (kuimpeļəsa ABO figura), da şetəm a orətok (OD orətok) ʒьn kolasьn, mədņoz, $x = AO - OD = AD = AC$ (256 ris.).

Mədkoḑşətam-kə x ponda aʒʒəm vьrazeņņosə, loə:

$$x = \frac{a}{2}\sqrt{5} - \frac{a}{2} = a \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

ļiвo $x \approx 0{,}62\,a$. Siʒkə, $AC : CB \approx 5:3$.

Jualannez da uprazņeņņoez.

1. Gəgrəs ḑiametra jukşə P çutən torrez vьlə, kədna 4 *sm* da 6 *sm* ьzdaəş. Mьļa oz tuj nuətnь sija-zə çutət xorda, kədalən ət torьs vəli-вь 3 *sm*?

2. Ķьk krestaşьn xorda kolasis ətьslən orətokkes 6 *sm* da 25 *sm* ьzdaəş; məd xorda orətokkezlən otnoseņņoьs loə 1:2. Aʒʒьnь, mьj kuʒa məd xordaьs.

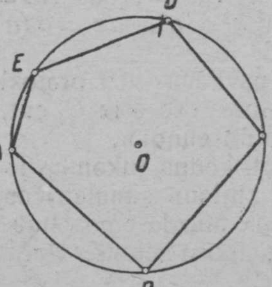
3. Xorda 5 *sm*. Mьmdaən kolə sijə sodtьnь, medвь pavkətçan viʒ, kəda nuətəm sodtət orətok koņeççezşaņ, vəli 6 *sm*?

4. Gəgļanьn, kədalən raḑiusьs R, nuətəma xorda, kəda perpenḑikuļarnəj loə raḑius dьnə sь вərьn. Aʒʒьnь xordaliş kuʒasə da tədnь, kьeəm gəgļan torən loə duga, kəda zelətşə xordaən.

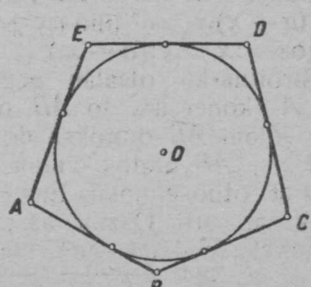
XIX. PЬRTƏM DA PЬRTTƏM UNAPEĻƏSA FIGURAEZ.

1 §. Pьrtəm da pьrttəm kuimpeļəsa figuraez.

1. Unapeļəsa figura, kədalən вьdəs jьvves kujlənь gəgrəs vьlьn, suşə **pьrtəm** unapeļəsa figuraən, açьs-zə gəgrəsьs — **pьrttəm** figuraən. $ABCDE$ — pьrtəm vitpeļəsa figura (257 ris.). Ladorres sьlən — AB, BC, CD... — şetəm gəgrəslən xordaez.



257 ris.



258 ris.

Unapeļəsa figura, kədalən вьdəs ladorres pavkətçənь gəgrəs вerdə, suşə pьrttəm unapeļəsa figuraən, açьs-zə gəgrəsьs — **pьrtəm** figuraən. $ABCDE$ — pьrttəm vitpeļəsa figura (258 ris.). Ladorres sьlən AB, BC, CD... — gəgrəs вerdə pavkətçan viʒʒez.

2. *Ţeorema.* **Bьd kuimpeļəsa figura jьlət poẓə nuətnь gəgrəs i toko ətikə.**

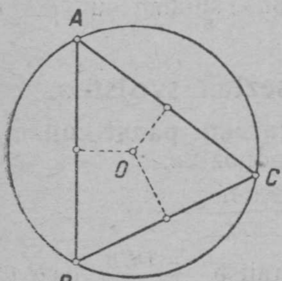
Ķuim *A*, *B* da *C* çutət kuimpeļəsa *ABC* figura jьlət, kədna oz kujlə ətik veşkьt vьlьn, poẓə nuətnь gəgrəs i toko ətikə.

Pьrttəm gəgrəslən centra kujlə çutьn, kьtən krestaşənь perpenḑikuļarrez, kədnanuətəmaş kuimpeļəsa figuraiş ļubəj kьk lador sərət.

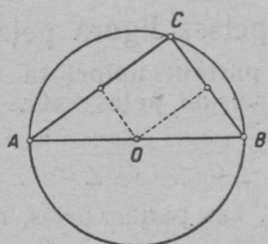
Perpenḑikuļar, kəda nuətəm kuimət lador sərət, sizzə munə pьrttəm gəgrəs centraət.

Petkətas. **Perpenḑikuļarrez, kədna nuətəmaş kuimpeļəsa figura ladorrez sərət, krestaşənь ətik çutьn — pьrttəm gəgrəs centraьn.**

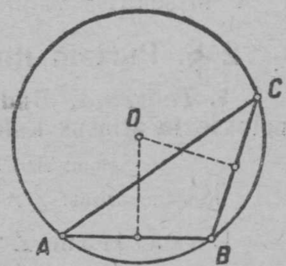
Pьrttəm gəgrəslən centra kujlə:



259 ris.



260 ris.



261 ris.

1) kuimpeļəsa figura pьєkьn, kuimpeļəsa figuraьs-kə vekņit peļəsa (259 ris.); 2) gipoţenuza vьlьn, sь sərьn, kuimpeļəsa figuraьs-kə veşkьtpeļəsa (260 ris.); 3) kuimpeļəsa figura sajьn, kuimpeļəsa figuraьs-kə paşkьtpeļəsa (261 ris.)

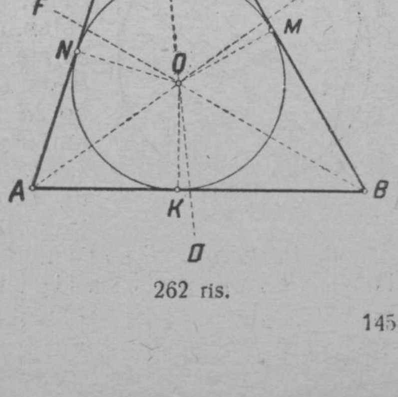
3. *Ţeorema.* **Bьd kuimpeļəsa figuraə tujə pьrtnь gəgrəs i toko ətikə.**

Şetəm: △ *ABC* (262 ris.).

Kolə dokazitnь: △ *ABC* figuraə tujə pьrtnь gəgrəs i toko ətikə.

Dokazitəm. Pьrtnь kuimpeļəsa figuraə gəgrəs — znaçit аззьnь sьliş centrasə da raḑius kuẓasə. Ķuimpeļəsa *ABC* figuralən ladorrez loənь kossan gəgrəs dьnə pavkətçan viẓẓezən, a ətlasa gəgrəs dьnə pavkətçan viẓẓez sulalənь centra dьnşaņ sььlьna, mьj kuẓa raḑius; sijən, medbь аззьnь pьrtəm gəgrəs centra, kolə аззьnь çut, kəda sulalə ətьlьna kuimpeļəsa figura ladorrezşaņ.

Çuttez, kədna ətьlьnaəş *AB* da *AC* ladorşaņ, kujlənь *A* peļəs *AE*



262 ris.

ʙişşektrisa vьlьn; çuttez, kədna ətьlьnaəş *AB* da *BC* ladorşaŋ, kujlənь *B* peļəs *BF* ʙişşektrisa vьlьn; ena kьk ʙişşektrisaьs krestaşənь kuimpeļəsa figura pьɛkas kьɛəmkə *O* çutьn; *O* çut, kьʒ əti kadə kьknan ʙişşektrisa vьlьn kujlan, loə ətьlьna kuimpeļəsa figuraьs ʙьd ladorşaŋ da loə kuimpeļəsa figuraə pьrtəm gəgrəs centraən; radiusən ena gəgrəslən vermə lonь ļuʙəj perpendikuļar—*OK*, *OM* ļiʙo *ON*, kədna nuətəmaş centraşaŋ kuimpeļəsa figura ladorrez dьnə. Kuimpeļəsa figuralən ladorres, kədna perpendikuļarnəjəş—*OK*, *OM* da *ON* radius dьnə da munənь gəgrəs vьlьn kujlan nь *K*, *M* da *N* koŋeçət, loənь gəgrəs dьnə pavkətçan viʒʒezən.

Mədik gəgrəs, kəda vəli-ʙь pьrtəm sija-ƶə kuimpeļəsa *ABC* figuraə, lonь oz vermь sijən, mьļa kьk peļəslən ʙişşektrisaes krestaşənь toko ətik çutьn.

Çut *O*, kьʒ *BC* da *AC* ladorrezşaŋ ətьlьna sulalan çut, kujlə i $\angle C$ ʙişşektrisa vьlьn.

2 §. Pьrtəm ŋoļpeļəsa figura peļəssezlən svojstvo.

1. ***Ţeorema.*** **Bьd pьrtəm ŋoļpeļəsa figuraьn panьt kujlan peļəssezlə ətlasьs kьk veşkьt peļəs ьƶda,** mədŋoƶ $2d$.

Şetəm: $ABCD$ — pьrtəm ŋoļpeļəsa figura (263 ris.).

Kolə dokaƶitnь: $\angle A + \angle C = 2d$ da $\angle B + \angle D = 2d$.

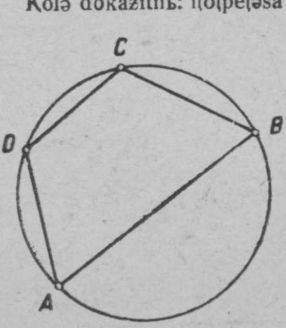
D o k a ƶ i t ə m. $\angle A$, kьʒ pьrtəm peļəs, merajtşə $\dfrac{\smile DCB}{2}$, da $\angle C$ merajtşə $\smile \dfrac{BAD}{2}$, eta şərti, *A* da *C* peļəslən ətlasьs merajtşə ətlasən $\dfrac{\smile DCB}{2} + \dfrac{\smile BAD}{2}$, ļiʙo $\dfrac{\smile DCB + \smile BAD}{2}$, mədŋoƶ, gəgrəs ʒьnən, a sijən $\angle A + \angle C = 180°$, ļiʙo $2\,d$.

Top siʒ-ƶə dokaʒьvajtşə, ŝto $\angle B + \angle D = 2\,d$.

2. ***Ţeorema (ʙərəna).*** **Ŋoļpeļəsa figuraьn-kə panьta kujlan peļəssezlən ətlasьs $2\,d$ ьƶda, to sь jьvvezət tujə nuətnь gəgrəs.**

Şetəm: $ABCD$—ŋoļpeļəsa figura (263 ris.).
$\angle A + \angle C = 2d$ da $\angle B + \angle D = 2d$.

Kolə dokaƶitnь: ŋoļpeļəsa *ABCD* figuraьn *A*, *B*, *C* da *D* jьlət poʒə nuətnь gəgrəs



263 ris.

D o k a ƶ i t ə m. Ŋoļpeļəsa *ABCD* figuraьn kuim *A*, *B* da *C* jьlət nuətam gəgrəs. Dokaƶitam, ŝto eta gəgrəsьs munas siʒ-ƶə *D* jьlət. Bьļiş, viştavnь-kə, ŝto *D* çut oz kujlь gəgrəs vьlьn, a kujlə sь sajьn, ļiʙo sь pьɛkьn, to $\angle D$ ez merajtşь-ʙь *ABC* duga ʒьnən i eta şərti, *B* da *D* peļəslən ətlasьs ez-ʙь vəv 180°, ļiʙo $2d$ ьƶda, mьj loə ŋe uslovia şərti, a sijən *D* çut dolƶon kujlьnь gəgrəs vьlьn, a siʒ-kə, to loə, ŝto gəgrəs, kəda munə *A*, *B* da *C* çutət, siʒ-ƶə munə i *D* çutət. Ŋoļpeļəsa *ABCD* figura em pьrtəm figura.

3. ***Petkətas.*** P ь r t ə m ŋ o ļ p e ļ ə s a f i g u r a e ʒ ə n v e r m a s ə l o n ь v e ş k ь t p e ļ ə s a f i g u r a, k v a d r a t d a r a v n o ʙ e d r e n n ə j

trapecia, siз-kьз пьlən paпьta kujlan pe|əssezlən ətlasьs 2*d* ьẑda.

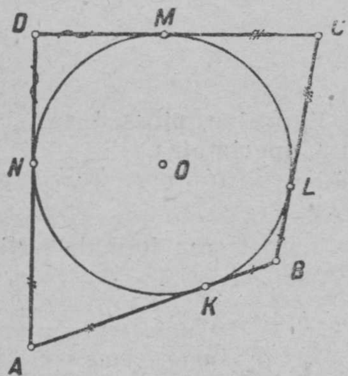
Para||elogram da roмв pьrtпь oz poz—пьlən paпьta kujlan pe|əssezlən ətlasьs aвu 2*d* ьẑda.

3 §. Pьrttəm ŋo|pe|əsa figura ladorrezlən svojstvo.

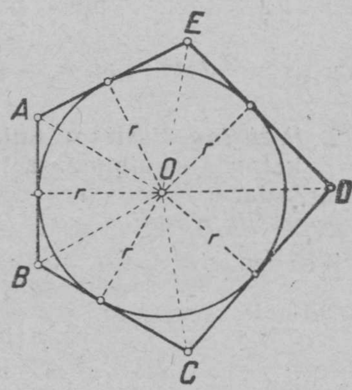
1. ***Ţeorema.*** **Pьrttəm ŋo|pe|əsa figuraьn kьk paпьta kujlan ladorlən ətlasьs ətьẑda məd kьk lador ətlaskət.**

Şetəm: $ABCD$ — pьrttəm ŋo|pe|əsa figura (264 ris.).

Kolə dokazltпь: $AD + BC = AB + DC$.



264 ris.



265 ris.

Dokazitəm. Pьrttəm ŋo|pe|əsa figuralən ladorres loəпь gəgrəs dьпə pavkətçan vizzezən. Kьk pavkətçan viz, kədna nuətəmaş gəgrəs dьпə ətik çutşaŋ, ətьẑdaəş; sijən $AN = AK$, $BL = BK$, $CL = CM$, $DN = DM$. Ətlaalam-kə ç|ennez şərna enə ətьẑdaşəmmesə, loas:

$$AN + DN + BL + CL = AK + BK + CM + DM,$$

|iвo

$$AD + BC = AB + DC.$$

2. Pьrtпь gəgrəssə tujə veşkьtpe|əsa figuraə, kədalən kьk paпьta kujlan ladorrezlən ətlasьs ətьẑda məd kьk ladorьs ətlaskət.

Bьdəs para||elogrammez kolasьn tujə pьrtпь gəgrəsə toko roмвə da kvadratə.

4 §. Pьrttəm unape|əsa figuralən da kuimpe|əsa figuralən plossaḑ.

1. ***Ţeorema.*** **Pьrttəm unape|əsa figuralən plossaḑьs sija əkşan зьn ьẑda, kəda loə pьrttəm gəgrəs raḑius vьlə sьliş perimetrasə boştəmşaŋ.**

Şetəm: $ABCDE$ pьrttəm n - peļəsa figura;
r — pьrttəm gəgrəslən radius;
P_n— n-peļəsa figuralən perimetra (265 ris.).

Kolə dokaƶitnь: sьlən plossad $S_n = \frac{1}{2} P_n \cdot r$.

Dokaƶitəm. Ətlaalam-kə O gəgrəsliş centrasə unapeļəsa $ABCDE$ figuraiş jьvvezkət, mijə torjətam unapeļəsa figurasə n kuimpeļəsa figura vьlə.

$$Pl. \triangle AOB = \frac{1}{2} AB \cdot r; \text{ pl. } \triangle BOC = \frac{1}{2} BC \cdot r$$

. . . .

$$\text{Pl. } \triangle AOB + \text{pl. } \triangle BOC + ... = \frac{1}{2} r \; (AB + BC = ...);$$

siзkə, $S_n = \frac{1}{2} r \cdot P_n$, ļibo $S_n = \frac{1}{2} P_n \cdot r$.

2. ***Petkətas.*** **Pьrttəm kuimpeļəsa figuralən plossadьs** $S\triangle = p \cdot r$, **kьtən** p**—kuimpeļəsa figuralən зьnperimetra.**

3. Zadaça. *Kuimpeļəsa figuralən* a, b *da* c *lador. Tədnь pьrtəm gəgrəsliş* r *radius.*

Kerəm. $S\triangle = p \cdot r$, siзkə, $r = \frac{S\triangle}{p}$, no Geron formula şərti

$$S\triangle = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

a sijən $r = \frac{\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}{p}}$.

Jualannez da upraƶņeņņoez.

1. Mьļa oz tuj nuətnь gəgrəs вьd jьvvezət seeəm ņoļpeļəsa figuraьn, kəđalən peļəsses şərşən - вərşən otnoşitçənь kьз 2:3:4:5?

2. Mьļa oz tuj pьrtnь gəgrəs seeəm ņoļpeļəsa figuraə, kəđalən ladorres şərşən-вərşən otnoşitçənь kьз 1:2:3:4?

3. Stroitnь kuimpeļəsa ABC figura, şetəmaş-kə: b da c lador da pьrttəm gəgrəslən R radius.

4. Stroitnь kuimpeļəsa ABC figura, şetəmaş-kə: a lador, $\angle B$ da pьrttəm gəgrəslən R radius.

5. Stroitnь kuimpeļəsa ABC figura, şetəmaş-kə: c lador, $\angle A$ da pьrtəm gəgrəslən r radius.

6. Stroitnь kuimpeļəsa ABC figura, şetəmaş-kə: $\angle A$ da $\angle B$ da pьrtəm gəgrəslən r radius.

7. Stroitnь ravnoвeđrennəj kuimpeļəsa figura sь a pod şərti da pьrttəm gəgrəs R radius şərti.

8. Stroitnь romв a lador şərti da pьrtəm gəgrəs r radius şərti.

9. Pьrttəm ņoļpeļəsa figuralən kuim lador, kədna вoştəmaş posļedovaţeļnəja, loənь 6 *sm*, 4 *sm*, 5 *sm*. Tədnь sьliş ņoļət ladorsə.

XX. PRAVIĻNƏJ UNAPEĻƏSA FIGURAEZ.

1 §. Praviļnəj unapeļəsa figuraez.

1. U n a p e ļ ə s a   f i g u r a,   k ə d a l ə n: 1)   в ь d ə s   l a d o r r e s   ə t ь ƶ d a ə ş   d a   2)   в ь d ə s   p e ļ ə s s e s   ə t ь ƶ d a ə ş,   ƨ u ş ə   p r a v i ļ n ə j ə n.

Ətьƶdaladora kuimpeļəsa figura da kvadrat — praveļnəj unapeļəsa figuraez. Veşkьtpeļəsa figura ļiвo romв oz tuj sunь praviļnəj unapeļəsa figuraezən. Veşkьtpeļəsa figuralən вьdəs peļəsses ətьƶdaəş, no ladorres aвu ətьƶdaəş, romвlən вьd ladorres ətьƶdaəş, no peļəsses aвu ətьƶdaəş.

2. n - peļəsa figura pьєkiş peļəssezlən ətlasьs loə $2d\ (n-2)$, eta şərti, praviļnəj n - peļəsa figura вьd pьєkiş peļəs ьƶdanas $\frac{2d\,(n-2)}{n}$. Sijən unapeļəsa figuraiş ətəriş peļəslən ətlasьs $4d$ ьƶda, a sijən, praviļnəj n - peļəsa figuralən вьd ətəriş peļəsьs $\frac{4d}{n}$ ьƶda.

Praviļnəj n - peļəsa figuraliş pьєkiş peļəs tujə lьddьnь sьkət ordça ətəriş peļəs şərti: pьєkiş peļəsьs ьƶdənas $2d - \frac{4d}{n} = 2d\left(1 - \frac{2}{n}\right)$.

3. n - peļəsa figuralən-kə ladorьs loə a ьƶda, to sьlən perimetra $P = an$.

Ətьƶda ladora unapeļəsa figuraez ƨuşənь ə t i ņ i m a e z ə n.

Praviļnəj ətiņima unapeļəsa figuraez ətьƶdaəş, пьlən-kə ətьƶdaəş ladorreznьs.

2 §. Praviļnəj pьrtəm da pьrttəm unapeļəsa figuraez stroitəm.

1. *Ţeorema.* Gəgrəs-kə jukəma кьпьmkə ьƶda tor vьlə, to: 1) xordaez, kədna posļedovaţeļnəja ətlaalənь jukan çuttez, arkmətənь praviļnəj pьrtəm unapeļəsa figura; 2) pavkətçan viţţez, kədna nuətəmaş jukan çuttezьn, arkmətənь praviļnəj pьrttəm unapeļəsa figura.

Şetəm: $A, B, C\ldots$ çuttezьn O gəgrəs jukəma n tor vьlə (266 ris.).

Kolə dokaƶitnь: 1) $AB, BC, CD\ldots$ xordaez arkmətənь praviļnəj pьrtəm da 2) $KL, LM, MN\ldots$ pavkətçan viţţez praviļnəj pьrttəm unapeļəsa figura.

D o k a ƶ i t ə m. 1) Ətlaalam-kə posļedovaţeļnəja gəgrəs jukan çuttesə xordaezən, loas pьrtəm unapeļəsa $ABCDEF$ figura. Dugaez $AB, BC, CD,\ldots$ ətьƶdaəş, a sijən-ƶə i xordaez $AB = BC = CD\ldots$ sizkьз zelətənь ətьƶda dugaez. Sьşşa, $\angle A = \angle B = \angle C = \ldots$ кьз pьrtəm peļəssez, kədna merajtşənь ətьƶda dugaezən, a sijən pьrtəm unapeļəsa $ABCDEF$ figuraьs, kədalən ladorres da peļəsses ətьƶdaəş,— praviļnəj.

2) Pavkətçan gəgrəssə-kə nuətnь $A, B, C, D\ldots$ jukan çuttez-pьr, loas pьrttəm unapeļəsa $KLMNPQ$ figura. Kuimpeļəsa $AKB, BLC, CMD\ldots$ fuguraeslən ətьƶdaəş $AB, BC, CD\ldots$ poddez; пьlən $\angle KAB$,

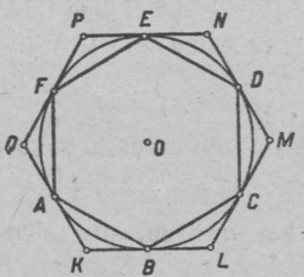
$\angle ĶBA$, $\angle LBC$, $\angle LCB$.... peļəsses, kədna loktənь poddes dьnə, siз-ƶə ətьƶdaəş, ed nija merajtşənь ətьƶda dugaezən; siзkə, kuimpeļəsa figuraes: 1) ravnoвedrennəjəş i 2) ətamədkət ətьƶdaəş.

Ķuimpeļəsa figuraez ətьƶdaşəmiş loə: $ĶA = ĶB = BL = LC = MC = MD = \ldots$, ļiвo $ĶL = LM = MN = \ldots$, a siз-ƶə, kьз $\angle K = \angle L = \angle M = \ldots$.

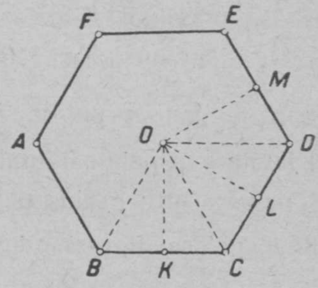
I siз, pьrttəm unapeļəsa $ĶLMNPQ$ figuraьslən ladorres da peļəsses ətьƶdaəş, siзkə, sija p r a v i ļ n ə j.

2. Pьrtəm ļiвo pьrttəm unapeļəsa figura praviļnəja stroitəmьs vajətşə ətьƶda torrez vьlə gəgrəs jukəmə.

3. ***Ţeoremaez.* 1) Вьd praviļnəj unapeļəsa figuraə poz̧ə pьrtnь gəgrəs da: 2) sь jьvvezət poz̧ə nuətnь pьrttəm gəgrəs.**



266 ris.



267 ris.

Şetəm: $ABCDEF$ — praviļnəj unapeļəsa figura (267 ris.).
$\angle A = \angle B = \angle C = \ldots$ da $AB = BC = CD = \ldots$

Ķolə dokaƶitnь: 1) Praviļnəj unapeļəsa figuraə poz̧ə pьrtnь gəgrəs,
2) sь jьvvezət poz̧ə nuətnь pьrttəm gəgrəs.

D o k a ƶ i t ə m m e z. 1) Medвь pьrtnь unapeļəsa figuraə gəgrəs, kolə tədnь sьliş centrasə da sь radiusliş kuz̧asə. Pьrtəm gəgrəslən centraьs — çut, kəda unapeļəsa figura вьd lador dьnşaņ ətьlьna. Çuttes, kədna ətьlьna vestəməş AB da BC ladorrez dьnşaņ, kujlənь $\angle B$ вişşektrisa vьlьn; çuttez, kədna ətьlьna vestəməş BC da CD ladorrez dьnşaņ, kujlənь $\angle C$ вişşektrisa vьlьn; siзkə, kьknan вişşektrisaьslən krestaşan O çutьs AB, BC da CD ladorrez dьnşaņ vestəma ətьlьna.

Dokaƶitam, sto O çutьs unapeļəsa figura CD da DE ladorrez dьnşaņ siз-ƶə vestəma ətьlьna i, siзkə, kujlə $\angle D$ вişşektrisa vьlьn. Eta ponda O çutsə ətlaalam D jьvkət da viзətam $\triangle COD$ da $\triangle BOC$. Nija ətьƶdaəş, siзkə nьlən OC ladorьs — ətik, $BC = CD$ i $\angle OCB = \angle OCD$. Ena kuimpeļəsa figuraez ətьƶdaşəmiş loə, sto $\angle OBC = \angle ODC$, no $\angle OBC = \frac{\angle B}{2}$, sijən, i $\angle ODC = \frac{\angle D}{2}$, siзkə $\angle D = \angle B$ kьз praviļnəj unapeļəsa figuralən peļəssez; suam $\angle ODC = \frac{\angle D}{2}$, sek OD em $\angle D$ вişşektrisa.

Siз-ƶə dokaƶitşə, sto i OE, i OF, i OA — unapeļəsa figuralən вişşektrisaez, a eta loə, sto O çutь, em unapeļəsa figura вьd peļəs вişşektrisaezlən krestaşan çut, kəda вьd ladorşaņ vestəm ətьlьna i, siзkə, loə pьrtəm gəgrəs centraən. $OK = OL = OM = \ldots = r$, gəgrəsiş kossan radiuskət.

2) Ətьzdaşan AOB, BOC, $COD\ldots$ kuimpeļəsa figuraeziş loə, sto $OA = OB = OC = \ldots$; eta loə, sto çutьs unapeļəsa figura вьd jьv dьnşaņ vestəma ətьlьna i sija loə pьrttəm gəgrəslə, kədaləн radiusьs $R = OA = OB = \ldots$, centraən.

Vьvod. Praviļnəj unapeļəsa figuraьn pьrtəm da pьrttəm gəgrəssezlən centraes uşənь ətiklaə. O çutьs suşə praviļnəj unapeļəsa figura centraən. Praviļnəj unapeļəsa figura ladorrez dьnşaņ OK, $OL\ldots$ ьlьnaьs O çutlən suşə sь apofemaən. Unapeļəsa figuralən apofemaьs sьkosta-ʒə loə i pьrtəm gəgrəs radiusən.

3 §. Ətiņima praviļnəj unapeļəsa figuraezlən svojstvoez.

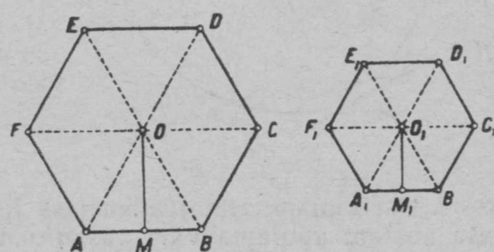
1. Ətiņima praviļnəj unapeļəsa figuraez podoвnəjəş, siз-kьз peļəsseznьs nьlən ətьzdaəş, a ladorreznьs proporcionaļnəjəş.

2. ***Ţeorema.*** **Ətiņima praviļnəj unapeļəsa figuraezlən ladorrez otnoşitçənь kьз pьrttəm ļiвo pьrtəm gəgrəssezlən radiussez.**

Şetəm: n — unapeļəsa figura ladorrezlən lьddəs (268 ris.);
AB da A_1B_1 — unapeļəsa figuraezlən ladorrez; OA da $OB\ldots$,
O_1A_1 da O_1B_1 — pьrttəm gəgrəssezlən radiussez;
OM da O_1M_1 — pьrtəm gəgrəssezlən radiussez ļiвo apofemaez.

Kolə dokazitnь: $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{OA}{O_1A_1} = \dfrac{OM}{O_1M_1}$.

Dokazitəm. Ravnoвedrennəj kuimpeļəsa $A_1O_1B_1$ da AOB figuraezlən $\angle O_1 = \angle O$, mьļa вьdьs nьiş $\dfrac{4d}{n}$ ьzda, siзkə, kuimpeļəsa figuraez podoвnəjəş, $\triangle AOB \backsim \triangle A_1O_1B_1$; kuimpeļəsa figura podoвiaiş petə:



268 ris.

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{OA}{O_1A_1} = \frac{OM}{O_1M_1},$$

mədnoʒ, ətiņima praviļnəj unapeļəsa figuraezlən ladorrez pьrttəm gəgrəs radiussezkət i apofemaezkət proporcionaļnəjəş.

3. ***Petkətas.*** **Ətiņima praviļnəj unapeļəsa figuraezlən perimetraes otnoşitçənь kьз pьrttəm gəgrəssezlən radiussez ļiвo apofemaez.**

Ətiņima praviļnəj unapeļəsa $ABCDEF$ da $A_1B_1C_1E_1F_1$ figura podoвnəjəş, a siзkə, nьlən ətkod ladorrez proporcionaļnəjəş: $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{CD}{C_1D_1} = \ldots$, no $\dfrac{AB + BC + CD + \ldots}{A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1 + \ldots} = \dfrac{AB}{A_1B_1}$, ļiвo $\dfrac{P}{P_1} = \dfrac{AB}{A_1B_1}$, a siз-kьз $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AO}{A_1O_1} = \dfrac{OM}{O_1M_1}$, sek $\dfrac{P}{P_1} = \dfrac{AO}{A_1O_1} = \dfrac{OM}{O_1M_1}$.

4 §. Praviļnəj unapeļəsa figuralən plossadʒ.

Ţeorema. **Praviļnəj unapeļəsa figuralən plossadʒьs perimetrasə вoştəm apofema vьlə əkşan зьn ьʐda.**

Şetəm: praviļnəj n - peļəsa figura;
a_n — sьlən lador; n — sь ladorrezlən lьdʒəs; h - apofema;
p_n — sьlən perimetra (269 ris.).

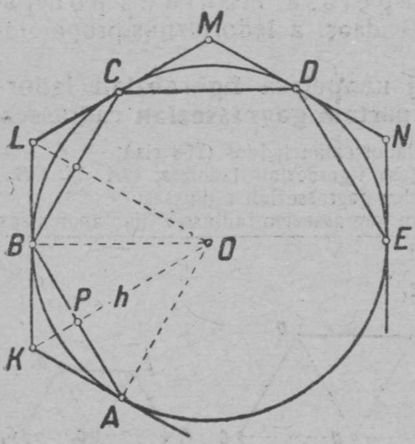
Kolə gokazitnь: n - peļəsa figuralən plossadʒ $S_n = \frac{1}{2} p_n \cdot h$.

D o k a ʐ i t ə m. Praviļnəj n - peļəsa figuraliş jьvvesə-kə ətlaalam sь centrakət, loasə n ətьʐda ravnoвedrennəj kuimpeļəsa figuraez, nьiş вьdьslən plossadʒьs $S = \frac{1}{2} a_n h$, kьtən h — kuimpeļəsa figuralən suvda i sek-ʐə unapeļəsa figuralən apofema; etaşaņ unapeļəsa figuralən вьdəs plossadʒьs:

$$S_n = n \cdot S\triangle = \frac{1}{2} n a_n h;$$

no $a_n \cdot n = p_n$, unapeļəsa figura perimetrakət, a sijən

$$S_n = \frac{1}{2} p_n \cdot h.$$



269 ris.

Petkətassez. 1. **Pьrtəm praviļnəj unapeļəsa figuralən plossadʒьs perimetrasə вoştəm apofema vьlə əkşan зьn ьʐda:**

$$S_n = \frac{1}{2} p_n h.$$

2. **Pьrttəm praviļnəj unapeļəsa figuralən plossadʒьs perimetrasə вoştəm apofema vьlə əkşan зьn ьʐda.**

$$S_n = \frac{1}{2} p_n h = \frac{1}{2} p_n \cdot r.$$

3. **Ətiņima praviļnəj unapeļəsa figuraezlən plossadʒdez otnoşitçənь kьз nь ladorrezlən kvadrattez ļiвo pьrttəm da pьrtəm gəgrəssez radʒiussezlən kvadrattez** (268 ris.).

ABCDEF da $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — ətiņima praviļnəj unapeļəsa figuraez; *AO* da A_1O_1 — nьlən radʒiussez, *OM* da O_1M_1 — nьlən apofemaez, *S* da S_1 — nьlən plossadʒdez.

Ətiņima praviļnəj unapeļəsa figuraes podoвnəjəş, a sijən nьlən plossadʒdes otnoşitçənь kьз nь ladorrezlən kvadrattez:

$$\frac{S_1}{S} = \frac{A_1B_1^2}{BA^2}. \qquad (1)$$

Ətiņima praviļnəj unapeļəsa figuraezlən-zə ladorres otnoşitçənь kьз pьrtəm ļiвo pьrttəm gəgrəssezlən raḑiussez:

$$\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{O_1A_1}{OA}=\frac{O_1M_1}{OM}. \qquad (2)$$

(1) da (2) ravenstvoesə ordçətikə aззam, sto

$$\frac{S_1}{S}=\frac{A_1B_1^2}{AB^2}=\frac{O_1A_1^2}{OA^2}=\frac{O_1M_1^2}{OM^2}.$$

5 §. Gəgrəsə pьrtəm kvadrat. Sijə stroitəm da sьliş ladorsə raḑius-pьr mьççaləm.

Zadaça. *Pьrtnь R raḑius gəgrəsə kvadrat da sьliş a_4 ladorsə mьççavnь raḑius-pьr.*

1) Stroitəm. Nuətam (270 ris.) gəgrəsьn kьk ətamədlə perpenḑikuļarnəj AC da BD ḑiametra; sija torjətças ņoļ ətьzda tor vьlə. Ḑiametraliş koņeççesə şərşən-вərşən ətlaaləmən, sogmas pьrtəm praviļnəj ņoļpeļəsa figura,— kvadrat, siз-kə ladorres sьlən ətьzdaəş kьз xordaez, kədna zelətənь ətьzda dugaez, a sьlən вьd peļəsьs — veşkьt, зik pьkşə ḑiametra vьlə.

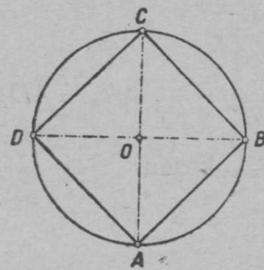
2) Lьddişəm. AOB veşkьtpeļəsa kuimpeļəsa figuraiş aззam:

$$AB^2=AO^2+BO^2, \text{ ļiвo } AB^2=2R^2,$$

kьçaņ $AB=R\sqrt{2}$.

Pьrtəm praviļnəj ņoļpeļəsa figuralən lador:

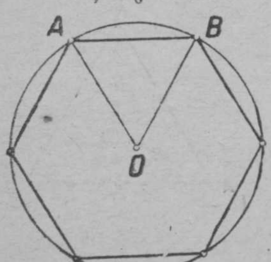
$$\boxed{a_4=R\sqrt{2}.}$$



270 ris.

6 §. Praviļnəj pьrtəm kvaţpeļəsa figura. Sijə stroitəm da sьliş ladorsə raḑius-pьr mьççaləm.

Zadaça. *Pьrtnь R raḑius gəgrəsə praviļnəj kvaţpeļəsa figura da sьliş a_6 ladorsə mьççavnь raḑius-pьr.*



271 ris.

Kerəm. Anaļiz. Aş AB (271 ris.) — pьrtəm praviļnəj kvaţpeļəsa figuralən lador, sek $\angle AOB=\frac{360°}{6}=60°$. $\triangle AOB$ — ravnoвedrennəj. $OA=OB=R$ da $\angle A=\angle B$ i вьdьs nьiş viзə 60°-ən.

$\triangle AOB$ — ravnoвedrennəj, siз-kə i ətьzda ladora, a sijən

$$AB=AO=BO=R.$$

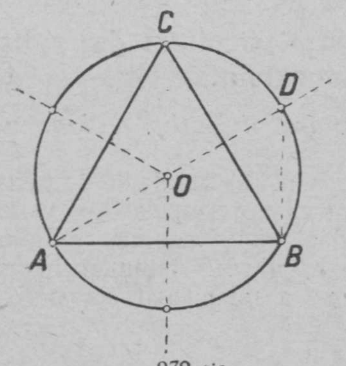
Pьrtəm praviļnəj kvaţpeļəsa figuralən lador:

$$\boxed{a_6=R.}$$

S t r o i t ə m. Şetəm gəgrəs vьlьn gəgrəs radius ьzda paşkətəm cьrkulən şərşən-bərşən pasjam kvat ətьzda dugaez; kər вьd dugaliş koneççesə ətlaətam xordaən, loas kossan pravilnəj kvatpeləsa figura.

7 §. Pravilnəj pьrtəm kuimpeləsa figura. Sijə stroitəm da sьliş ladorsə radius-pьr mьççaləm.

1 Zadaça. *Pьrtnь R radiusa gəgrəsə pravilnəj kuimpeləsa figura da sьliş a_3 ladorsə mьççavnь radius-pьr.*



272 ris.

1) S t r o i t ə m. Jukam gəgrəssə kvat ətьzda tor vьlə. Ətlaavnь-kə ətikpьr jukan çuttesə xordaezən, loas kossan pravilnəj kuimpeləsa ABC (272 ris.) figura, kədalən $AB = BC = CA$ kьz xordaez, kədna zelətənь ətьzda dugaez.

2) L a d o r l ь d d ə m. Nuətam-kə AD diametra da D çutsə ətlaalam B çutkət, loas veşkьtpeləsa $\triangle ABD$ figura, veşkьtpeləsən B jьlьn. Veşkьtpeləsa kuimpeləsa ABD figuraiş petə:

$$AB^2 = AD^2 - DB^2;\ AD = 2R \text{ i } DB = R, \text{ a sijən}$$

$$AB^2 = a_3^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2,$$

kьşan

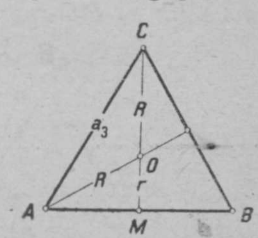
$$\boxed{a_3 = R\sqrt{3}.}$$

8 §. Pьrttəm da pьrtəm gəgrəssezliş radiussez da pravilnəj kuimpeləsa figuraliş vьlьnaez da plossaddez sь lador-pьr mьççaləm.

Şetəm pravilnəj $\triangle ABC$ (273 ris.). Sьlən ladorьs $AB = a$, $OM = r$ — pьrtəm gəgrəslən radius; $OA = OC = R$ — pьrttəm gəgrəslən radius; $CM = h$ — vьlьna; S — sьlən plossad.

1) R l ь d d ə m. Lador $AB = a_3 = R\sqrt{3}$; estiş petə, sto

$$R = \frac{a_3}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$



273 ris.

2) r l ь d d ə m. Veşkьtpeləsa kuimpeləsa AOM figuraьn gipotenuza $AO = R$ — kuimpeləsa ABC figuralən $\angle A$ вişşektrisa, siз-kə, $\angle AOM = 30°$, a sijən katet $OM = r$, kьz kujliş 30°-sa peləs panьt, ətьzda gipotenuza зьnkət, mədnoz, $r = \frac{R}{2}$. I siз,

$$1)\ r = \frac{R}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6};\quad 2)\ R = 2r.$$

3) h lьdḑəm. Vьlьna $h = CM = CO + OM$, no $CO = R = 2r$ i $OM = r = \frac{R}{2}$, a sijən:

1) $h = R + \frac{R}{2} = 1{,}5\,R$; 2) $h = 2r + r = 3\,r$;

3) $h = 3\,r = 3 . \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

4) S lьdḑəm. Plossaḑ $S = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}a\,\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ kv. ətsa.

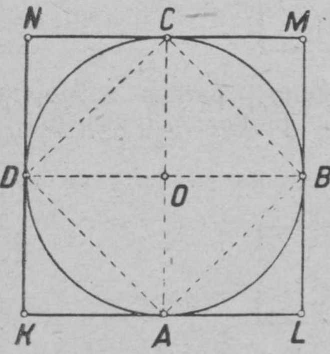
9 §. Pьrttəm kvadrat da praviļnəj pьrttəm kuimpeļəsa figura stroitəm da nьliş ladorrez raḑius pьr-mьççaləm.

1 zadaça. *Stroitnь pьrttəm kvadrat da sьliş b_4 ladorsə mьççavnь pьrtəm gəgrəs r raḑius-pьr.*

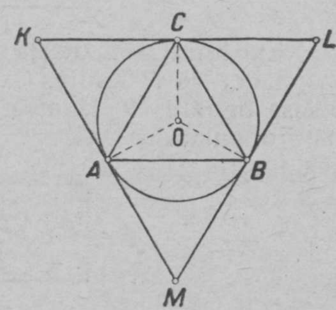
Kerəm. r raḑiusa gəgrəsə pьrtam kvadrat (274 ris.). Sь jьvvez-pьr nuətam pavkətçan viz̧z̧ez nь ətamədkət krestaşaninnez dьnəʒ,— loas pьrttəm $KLMN$ kvadrat. Sьlən $KL = b_4$ ladorьs DB — gəgrəs ḑiametra ьzda, a sijən

$$\boxed{b_4 = 2r.}$$

2 zadaça. *Stroitnь praviļnəj pьrttəm kuimpeļəsa figura da sьliş b_3 ladorsə mьççavnь pьrtəm gəgrəs r raḑius-pьr.*



274 ris.



275 ris.

Kerəm. r raḑiusa gəgrəsə pьrtam praviļnəj kuimpeļəsa figura (275 ris.). Sь jьvvez-pьr nuətam pavkətçan viz̧z̧ez nь ətamədkət krestaşəm dьnəʒ,— loas praviļnəj pьrttəm kuimpeļəsa KLM figura. Kuimpeļəsa KLM figuraьn A da B pavkətçan çuttes loənь KM da LM lador sərrezən, siʒ-kə $KA = AM$ da $LB = BM$; etaşaņ loə, sto $AB = a_3$ em kuimpeļəsa KLM figuralən sər viz̧. No $AB = \frac{KL}{2}$, ļibo $a_3 = \frac{b_3}{2}$, etaşaņ $b_3 = 2a_3$ —

praviļnəj pьrttəm kuimpeļəsa figuralən ladorьs kьkiş ьʒьtƶьk sija-ƶə gəgrəsə pьrtəm kuimpeļəsa figura ladorşa.

$$\boxed{b_3 = 2r\sqrt{3}.}$$

10 §. Praviļnəj pьrttəm unapeļəsa figuraliş ladorsə pьrtəm ətiņima unapeļəsa figura lador da raḑius şərti lьdḑəm.

1. **Zaḑaça.** *Praviļnəj pьrtəm unapeļəsa figura lador da raḑius şərti lьdḑьnь praviļnəj pьrttəm ətiņima unapeļəsa figuraliş lador.*

K e r ə m. Unapeļəsa $ABCD\ldots$ da $KLMN\ldots$ figuraez (269 ris. 152 ļisbok vьlьn.) — praviļnəjəş i ətiņimaəş, siʒ-kə, nija podobnəjəş. Lador $KL = b_n$, lador $AB = a_n$. Şetəm unapeļəsa figuraez podobiaiş aʒʒam, sto

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{R}{h}, \text{ kьşaņ } b_n = \frac{a_n R}{h}. \qquad (1)$$

Veşkьtpeļəsa kuimpeļəsa OPB figuraiş, kaţetьs kədalən $PB = \frac{a_n}{2}$, aʒʒam h:

$$h^2 = R^2 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2; \text{ esşaņ } h = \sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}. \qquad (2)$$

Suvtətam-kə h ponda aʒʒəm (2) mьççaləmsə (1) ətьƶdaşəmə, loas:

$$\boxed{b_n = \frac{a_n \cdot R}{\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}}.}$$

2. Eta formulaьs otsalə şetəm praviļnəj pьrtəm unapeļəsa figura a_n lador da R raḑius şərti aʒʒьnь pьrttəm ətiņima praviļnəj unapeļəsa figuraliş b_n ladorsə.

3. Formulaьsliş kьknan torsə-kə levtьnь kvadratə da aʒʒьnь a_n, sek loas:

$$\boxed{a_n = \frac{b_n R}{\sqrt{R^2 + \frac{b_n^2}{4}}}.}$$

Eta formulaьs otsalə şetəm praviļnəj pьrttəm unapeļəsa figura b_n lador da R raḑius şərti aʒʒьnь pьrtəm ətiņima praviļnəj unapeļəsa figuraliş a_n ladorsə.

4. **Zaḑaça.** Mьççavnь praviļnəj pьrttəm kvaţpeļəsa figuraliş b_6 ladorsə pьrtəm gəgrəs R raḑius-pьr.

K e r ə m. Zaḑaça kerəm ponda poļzujtçam formulaən:

$$\boxed{b_n = \frac{a_n R}{\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}}.}$$

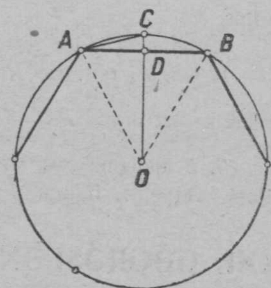
Unapeləsa figura ladorrezlən n lьddəsьs zadaça uslovia şərti 6 ьƶda, si3-kə, $a_n = a_6 = R$, a sijən:

$$b_6 = \frac{a_6 R}{\sqrt{R^2 - \frac{a_6^2}{4}}} = \frac{R \cdot R}{\sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}}} = \frac{R^2}{\sqrt{\frac{3R^2}{4}}} = \frac{2R^2}{R\sqrt{3}} = \frac{2R\sqrt{3}}{3}.$$

11 §. Praviļnəj pьrtəm unapeļəsa figura ladorrezliş lьdd̦əs kьkiş ьƶdətəm.

1 **Zadaça.** *Praviļnəj pьrtəm unapeļəsa figura ladorrezliş lьdd̦əs ьƶdətnь kьkiş da mьçςavnь sьliş* a_{2n} *ladorsə* a_n *da* R*-pьr.*

Ķerəm. 1) Aş $AB = a_n$ — praviļnəj pьrtəm n-peļəsa figuralən lador (276 ris.). Medвь stroitnь pьrtəm unapeļəsa figura, kədalən lьdd̦əsьs kьkiş ьзьtƶьk şetəmьşşa, mədn̦oƶ, 2_n ladorrezən, gəgrəssə kolə juknь 2_n ətьƶda torrez vьlə. Jukam duga, suam AB, səri, sek $\smile AC = \smile CB$ i AC xordaьs loas pьrtəm unapeļəsa figuralən lador, kədaьn 2_n lador.



276 ris.

2) $AC = a_{2n}$ lьdd̦əm ponda vizətam vekn̦itpeļəsa $\triangle AOC$ da giƶam, mьjkət ətьƶda eta ladorlən kvadratьs:

$AC^2 = AO^2 + OC^2 - 2\,OC.\,OD$

ļiвo $a_{2n}^2 = R^2 + R^2 - 2R\,.\,OD = 2R^2 - 2R\,.\,OD.$

Veşkьtpeļəsa $\triangle AOD$ figuraiş aззam:

$$OD = \sqrt{AO^2 - AD^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2} = \sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}.$$

Veƶnь-kə озза ətьƶdaşəmiş OD-sə medвərja mьçςaləmən, loas:

$$a_{2n}^2 = 2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}},\ \text{ļiвo}\ a_{2n} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}}.$$

Eta formulaьs, **praviļnəj pьrtəm n-peļəsa figura ladorrezliş lьdd̦əs kьkiş ьƶdətan formula**, otsalə şetəm praviļnəj pьrtəm n-peļəsa figura a_n lador da R radius şərti аззьnь praviļnəj pьrtəm unapeļəsa figuraliş a_{2n} ladorsə, kədalən $2n$ ladorrez lьdd̦əsьs kьkiş ьзьtƶьk n-peļəsa figura ladorrez lьdd̦əşşa.

2. Primer. Mьçςavnь praviļnəj pьrtəm daskьkpeļəsa figuraliş ladorsə R-pьr.

Ķerəm. $a_{12}^2 = 2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_6^2}{4}}$;

$a_{12}^2 = 2R^2 - 2R\sqrt{\frac{3R^2}{4}}$, si3-kьз $a_6 = R$;

$$a_{12} = \sqrt{2R^2 - R^2\sqrt{3}} = R\sqrt{2 - \sqrt{3}},\ \text{libo}\ a_{12} = \frac{R}{2}\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right),$$

siз-kьз $2 - \sqrt{3} = \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}\right)^2$.

Jualannez da upraƶņeņņoez.

1. R radiusa gəglanə pьrtnь pravilnəj kьkjamьspeləsa figura da mьççavnь sьliş ladorsə radius-pьr.

2. Şetəm pravilnəj pьrtəm kuimpeləsa, ņolpeləsa, kьkjamьspeləsa figuraez a lador şərti aззьnь gəglanliş radius.

3. Aззьnь R radiusa gəglanə pьrtəm pravilnəj kьkjamьspeləsa, daskьkpeləsa figuraez diagonallezliş kuza.

4. Pravilnəj pьrttəm kvatpeləsa figuralən ladorьs b ьƶda. Aззьnь gəglanliş radius.

5. Şetəm a lador şərti stroitnь pravilnəj kьkjamьspeləsa figura.

6. Gəglan radiusьs R ьƶda. Aззьnь pravilnəj pьrtəm vitpeləsa figuraliş lador,— tədam-kə, sto $a_{10} = R \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

7. h apofema şərti stroitnь: 1) pravilnəj kuimpeləsa figura, 2) kvadrat, 3) pravilnəj kvatpeləsa figura.

XXI. GƏGRƏSLƏN KUZA DA GƏGLANLƏN PLOSSAD.

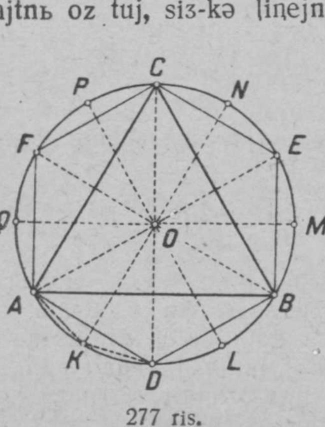
1 §. Pravilnəj pьrtəm da pьrttəm unapeləsa figuraez perimetraezkət gəgrəssezliş kuzaesə sravņitəm.

1. Gəgrəsliş kuzasə veşkьta sь vьlə liņejnəj mera puktəmən merajtnь oz tuj, siз-kə liņejnəj meraьs, kьз veşkьt orətok, oz vermь ləşavnь çukьla vizkət; sijən gəgrəsьsliş kuzasə aззənь mədņoƶ, pravilnəj pьrtəm da pьrttəm unapeləsa figuraezliş perimetraesə merajtəmən.

2. *Ţeorema.* **Pravilnəj pьrtəm unapeləsa figuralən perimetraьs gəgrəs kuzaьsşa uçətƶьk i matətçə sija sь dьnə sьliş ladorresə kьkiş ьƶdətəmən.**

Şetəm: p_n — n-peləsa figuralən perimetra, C — gəgrəslən kuza (277 ris.).

Kolə dok: $P_n < C$ i matətçə C dьnə n ladorrezliş lьddəs kьkiş ьƶdətikə.



277 ris.

D o k a ƶ ь t ə m. AB — pravilnəj pьrtəm kuimpeləsa ABC figuralən lador, sьlən perimetraьs $p_3 = 3AB$. AB, BC, CA dugaesə-kə juknь səri da D, E da F jukan çuttesə ətlaavnь ena dugaez koņeççezən, loas pravilnəj pьrtəm kvatpeləsa figura, perimetraьs kədalən $p_6 = 6AD$ pravilnəj pьrtəm kuimpeləsa figura perimetraşa ьзьtƶьk. I vьliş, ADB kuimpeləsa figuraiş mijan em: $AD + DB > AB$, no

$AD = DB$, a sijən $2AD > AB$; ʙoşnь-kə kьknan ƞeətьƶdaşan torresə 3-ən, loas: $6\,AD > 3AB$, ļiʙo $p_6 > p_3$. Sьʙərьn AD, DB, BE, EC... dugaesə-kə juknь səri da K, L, M, N... jukan çuttesə ətlaavnь ena duga koƞeççezən, loas praviļnəj pьrtəm daskьkpeļəsa figura, perimetraьs kədalən $p_{12} > p_6$. I ʙьļiş, ADK kuimpeļəsa figuraiş mijan em: $AK + KD > AD$, no $KD = AK$, a sijən $2AK > AD$; ʙoşnь-kə kьknan ƞeətьƶdaşan torresə 6-ən, loas, sto $12\,AK > 6\,AD$, ļiʙo $p_{12} > p_6$.

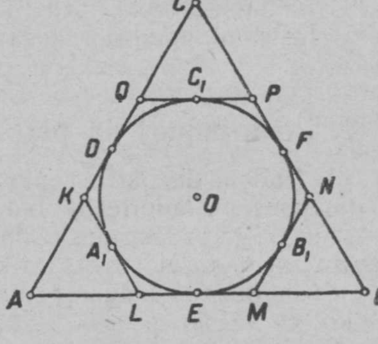
Pondam-kə ʙьd viļiş loəm unapeļəsa figura ladorrezliş lьddəssə kьkişən ьƶdətlьnь ozlaƞ, kaƶalam, sto praviļnəj pьrtəm unapeļəsa figuralən perimetraьs sьnьm ьзьtƶьk, kьnьm unaƶьkəş sьlən ladorres.

Mijan em: $p_6 > p_3$; $p_{12} > p_6$... voobse $P_{2n} > P_n$, kьtən P_n — n ladora praviļnəj pьrtəm unapeļəsa figuralən perimetra, a p_{2n} — 2_n ladora unapeļəsa figuralən perimetra.

I siз, praviļnəj pьrtəm unapeļəsa figura ladorrezliş lьddəs kьkiş ьƶdətəm şərna sьlən perimetraьs s o d ə, şo matəƶьk i matəƶьk gəgrəs kuƶaьs dьnə loktəmən, no şo-ƶə koļççə sьşşa u ç ə t ƶ ь k.

I ʙьļiş, praviļnəj pьrtəm unapeļəsa figura ladorrez, kьз xordaez, uçətƶьkəş nь zelətəm dugaezşa, a sijən i unapeļəsa figuraьs ʙьdəs ladorrezlən ətlasьs uçətƶьk gəgrəslən ʙьdəs dugaez ətlasşa; esşaƞ loə, sto praviļnəj pьrtəm unapeļəsa figuralən perimetraьs gəgrəsьs kuƶaşa uçətƶьk.

Gəgrəsьsliş kuƶasə-kə pasjam C-pьr, sek loəm vьvodьs giƶşas siз: $p_n < C$.



278 ris.

Praviļnəj pьrtəm unapeļəsa figura ladorrezliş lьddəssə-kə kьkiş ьƶdətlьnь unaiş, sek sьlən perimetraьs siз şiʙətças gəgrəsьs kuƶa dьnə, sto sь kuƶaьs da perimetraьs kolasьn $C - p_n$ koļanьs kerşas əstəз uçətən, siз-kə şetəm koļanьn C çintanьs oz vezşь, a p_n çintanьs ʙьd-pьr ʙьdmə (ьƶdə).

3. Ţeorema. **Praviļnəj pьrttəm unapeļəsa figuralən perimetraьs gəgrəs kuƶaьşşa ьзьtƶьk i şiʙətçə sь dьnə sь ladorrezliş lьddəs kьkiş ьƶdətəmən.**

Şetəm. P_n — unapeļəsa figuralən perimetra; C — gəgrəslən kuƶa (278 ris.).

Kolə dok: $P_n > C$ i şiʙətçə C dьnə n ladorrezliş lьddəs kьkiş ьƶdətəmən.

D o k a ƶ ь t ə m. AB — praviļnəj pьrttəm kuimpeļəsa ABC figuralən lador, sьlən perimetra $P_3 = 3AB$. Jukamə səri dugaez, kədna zakļuçitəməş pьrttəm kuimpeļəsa ABC figura da D, E da F ladorrez gəgrəskət pavkətçan çuttez kolasьn, i nuətam A_1, B_1 da C_1 jukan çuttez-pьr pavkətçan viƶƶez, loas praviļnəj pьrttəm kvatpeļəsa $KLMNPQ$ figura, perimetraьs kədalən $P_6 = 6\,KL$ P_3-şa uçətƶьk, $P_6 < P_3$. I ʙьļ: kuimpeļəsa AKL, BMN, CQP figuraeziş petə: $KL < AK + AL$; $MN < BM + BN$; $PQ < CQ + CP$, a eta loə, sto kuimpeļəsa ABC figura torjətəm ladorrezlən ətlasses orətokkeslən, AK da AL, BM

da BN, CQ da CP, vezşənь uçətzьk KL, MN da PQ orətokkezən, a sijən $P_6 < P_3$. Pravilnəj pьrttəm kvatpeləsa figura ladorrezliş lьddəssə etaз-zə, kьkiş ьzdətam, mijan loas pravilnəj pьrtəm daskьkpeləsa figura, perimetraьs kədalən uçətzьk pьrttəm kvatpeləsa figura perimetraşa, mədnoz, $P_{12} < P_6$ i s. oз.; voobse, $P_{2n} < P_n$.

I siз, pavilnəj pьrttəm unapeləsa figura ladorrezliş lьddəssə kьkiş ьzdətəmən sьlən perimetraьs ç i n ə, pьr gəgrəs kuza dьnəз şibətçəmən, no şozə kolççə s ь ş a ь з ь t z ь k ə n.

Eta vьvodьs gizşə siз: $P_n > C$.

Pravilnəj pьrttəm unapeləsa figura ladorrezliş lьddəssə-kə pondam kьkişən ьzdətlьnь mьmdaiş kolə, sek sьlən perimetraьs siз matə loktas gəgrəsьs kuza dьnəз, sto $P_n - C$ kolanьs pьrttəm unapeləsa figura perimetra da gəgrəs kuza kolasьn loas əstəз uçətən, siз-kə, şetəm kolanьn C çintanьs oz vezşь, a P_n çinanьs вьd kadə çinə.

4. Вьdəs viştaləmьslə-kə kernь itog, utverditam, sto $R_n < C < P_n$, mədnoz, pravilnəj pьrtəm unapeləsa figura perimetraşa gəgrəsьslən kuzaьs ьзьtzьk, a pravilnəj pьrtəm unapeləsa figura perimetraşa uçətzьk; no sek-zə ena unapeləsa figuraezlən perimetraes, nь ladorrezliş lьddəssesə kьkiş ьzdətikə vezşəmşan, şo əddənzьk i əddənzьk şibətçənь gəgrəsьs kuza dьnəз, kuzaьs kədalən pьr kolççə vezşьtəg.

2 §. Postojannəj da peremennəj veliçina jьliş vezərtəm.

1. Pьrtəm da pьrttəm pravilnəj unapeləsa figuraezlən p_n da P_n perimetraes nь ladorrezliş lьddəssə kьkiş ьzdətikə mьmdaiş kolə vezşənь da gəgrəs kuzaьs dьnə şibətçənь şo matəzьk, kьз-вь mədənь suvtnь sьkət ətьzdaən; gəgrəs kuzaьs-zə oz vezşь i вьdpьr unapeləsa figuraez ladorrezliş lьddəs kьkiş ьzdətikə kьз pьrtəmliş, siз i pьrttəmliş kolççə vezşьtəg.

2. Veliçinaьs, kəda şetəm zadaça usloviaezьn вьd kadə вoştə вьdkod znaçennoez, suşə p e r e m e n n ə j veliçinaən; veliçinaьs-zə, kəda nija-zə zadaça usloviaezьn pьr viзə asşis znaçenno, suşə p o s t o j a n n ə j veliçinaən.

Pьrtəm da pьrttəm unapeləsa figuraezlən p_n da P_n perimetraez nь ladorrezliş lьddəs kьkiş ьzdətlikə neograniçennəja loənь p e r e m e n n ə j v e l i ç i n a e z primerən, a C gəgrəslən kuzaьs em p o s t o j a n n ə j v e l i ç i n a.

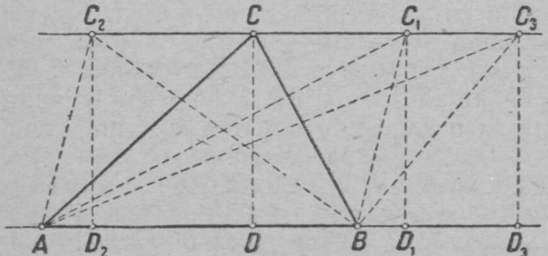
3. Postojannəj da peremennəj veliçinaezlən perimetraez sija-zə ətik zadaça usloviaezьn.

1) Şetəm kuimpeləsa ABC figura (279 ris.). Sьliş C jьvsə-kə vezlavnь (veztьnь) veşkьt kuza, parallelnəja sь AB podkət, podsə vezşьtəg koləmən, sek peremennəj veliçinaezən loasə sь вokkezlən kuzaьs, kuimpeləsa figuralən perimetraьs, sь вьd peləslən veliçinaьs; postojannəjjezən-zə — sьlən podьs, вьdəs peləssezlən ətlasьs, kəda 2 d ьzda, sьlən suvdaьs da sьlən plossadьs.

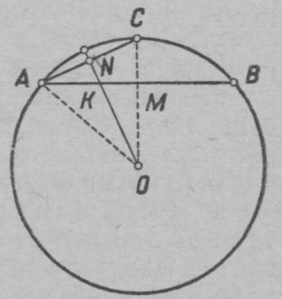
2) Şetəm R radiuslən gəgrəs (280 ris.); $AB = a_n$ — pravilnəj pьrtəm n-peləsa figuralən lador, orətok $OM \perp AB$ — apofema; pasjam isjə h_n-pьr.

n-peļəsa figura ladorrezliş lьdḑəssə kьkiş ьƶdətikə loas $AC = a_{2n}$ i orətok $ON \perp AC$ — apofema, kədə pasjamə h_{2n}-рьr.

Veşkьtpeļəsa kuimpeļəsa OMK figuraiş mijan em, sto $OK > OM$, no OK em toko ON-lən tor, a sijən ON podavno ьʒьtƶьk OM-şa. I siʒ, $ON > OM$ ļibo $h_{2n} > h_n$, mədņoƶ, unapeļəsa figura ladorrezliş lьdḑəs kьkiş ьƶdətlikə apofemaьs вьdmə, loə şo ьʒьtƶьk, i ьʒьtƶьk, as kuz̧anas matəƶьk şibətçə gəgrəs R raḑiusьs kuz̧a dьnəʒ, no şo-ƶə koļççə sьsşa uçətƶьk.



279 ris.



280 ris.

Siʒkə, unapeļəsa figura laḑorrezliş lьdḑəssə pondam kьkiş ьƶdətlьnь mьmḑaiş kolə, sek, h_n apofemaьs loas peremennəj veļiçinaən, gəgrəs raḑiusьs-ƶə — postojannəj veļiçinaən, a raḑius kuz̧aьs da apofema kuz̧aьs kolasьn $R - h_n$ koļanьs, loə şo uçətƶьk i uçətƶьk, a unapeļəsa figura ladorrezlən əddən ьʒьt lьdḑəs kosta kerşə əstəʒ uçətən.

3 §. Preḑel jьliş veƶərtəm. Gəgrəs kьʒ рьrtəm da рьrtəm unapeļəsa figuraez perimetraezlən preḑel.

1. Praviļnəj рьrtəm unapeļəsa figuralən perimetraьs, sь ladorrezliş lьdḑəssə-kə kьkiş ьƶdətlьnь unaiş, вьdmə da kuz̧anas şibətçə suvtnь gəgrəsьs kuz̧akət ətьƶdaən; eta kosta gəgrəs kuz̧aьs da praviļnəj рьrtəm unapeļəsa figura perimetraьs kolasьn koļanьs loə sьnьm uçətƶьk, kьnьm ьʒьtƶьk рьrtəm unapeļəsa figura ladorrezlən lьdḑəsьs.

2. Praviļnəj рьrtəm unapeļəsa figuralən perimetraьs sь ladorrezliş lьdḑəs unapəv kьkiş ьƶdətikə siʒ-ƶə şibətçə gəgrəsьs kuz̧a dьnə, no рьr çinəmən; eta kosta sь perimetraьs kolasьn da gəgrəs kuz̧aьs kolasьn koļanьs loə sьnьmiş uçətƶьk, kьnьmiş ьʒьtƶьk рьrtəm unapeļəsa figura ladorrezlən lьdḑəsьs.

3. Unapeļəsa figura ladorrezliş lьdḑəssə unapəv kьkiş ьƶdətlikə ņерьrtəm unapeļəsa figuralən perimetraьs, ƶagvьv ьƶdikə, oz vermь suvtnь gəgrəs kuz̧aьskət ətьƶdaən, ņерьrtəm unapeļəsa figuralən perimetraьs, ƶagvьv çinikə, oz vermь suvtnь gəgrəs kuz̧aьskət ətьƶdaən. Gəgrəs loə nьlən preḑelən.

4. Postojannəj veļiçinasə, kəda dьnə peremennəj veļiçinaьs şibətçə siʒ, sto sь kolasьn da peremennəj veļiçinaьs kolasьn koļanьs aslas abso-

ļutnəj veļiçina şərti vermas lonь kerəm kьєəm-ugodno oзlaņ şetəm veļiçinaşa uçətƶьk i koļççьnь sьşşa uçətƶьkən, suşə peremennəj veļiçina predelən.

Gəgrəsьs, siз-kə, loə praviļnəj pьrtəm da pьrttəm unapeļəsa figuraez perimetraezlən predel nь ladorrezliş lьdḑəssə unapəv kьkiş ьƶdətikə.

Eta ʙaitçəmьs giƶşə siз: predel $p_n = C$ ļiʙo predel $P_n = C$ unapeļəsa figura ladorrez lьdḑəslən mьmda kolə ʙьdmikə, ļiʙo lim $P_n = C$; lim $P_n = C$, kьtən lim mьççalə predel; eta зenьta giƶəm laţinskəj kьv limes (vuзətəmьn — predel).

Unapeļəsa figura ladorrezliş lьdḑəssə-kə kьkiş ьƶdətlьnь pondam unaiş C da p_n kolasьn koļanьs i P_n da C kolasьn koļanьs, pьr çinikə, loə əstəз uçətən; sijən gəgrəs kuⱬaьs tujə ʙoştənь pьrtəm ļiʙo pьrttəm unapeļəsa figuraliş əddən ьзьt ladorrez lьdḑəsən perimetra.

5. Peremennəj veļiçina, kəda şetəm zadaça usloviaezьn ʙьd-pьr çinə i vermas lonь kerəm i vermas koļççьnь uçətƶьkən kьєəm ugodno oзlaņ şetəm veļiçinaşa, suşə kuņeçtəm uçətən.

Boştəmaş ʙaitnь, sto koņeçtəm uçətьs, veƶşikas, loktə-ʙь nuļ dьnə, sto nuļьs loə sьlən predelən. Koņeçtəm uçət veļiçinaez predelən loənь: pьrtəm gəgrəs radius da sьə pьrtəm praviļnəj unapeļəsa figura apofema koļan kolasьn ladorrezliş lьdḑəs unapəv kьkiş ьƶdətikə; gəgrəs kuⱬa da pьrtəm unapeļəsa figura perimetra kolasьn koļan, pьrttəm unapeļəsa figura perimetra da gəgrəs kuⱬa kolasьn koļan, nija-ƶə usloviaez kosta.

Giƶəm:	$R - h_n =$ koņeçtəm uçət	praviļnəj unapeļəsa figura
	$C - p_n =$	ladorrezliş lьdḑəs unapəv
	$P_n - C =$	kьkiş ьƶdətikə.

4 §. Gəgrəsliş kuⱬa lьdḑəm. Lьdḑəs π.

1. Gəgrəsliş kuⱬasə veşkьta ļiņejnəj meraən merajtnь oz tuj. Sьlən kuⱬaьs loə kьз predel, kəda dьnə şiʙətçə pьrtəm ļiʙo pьrttəm praviļnəj unapeļəsa figuralən perimetraьs unapeļəsa figura ladorrezliş lьdḑəs unapəv kьkiş ьƶdətikə.

2. A eta şərti, lьdḑənь pьrtəm ļiʙo pьrttəm praviļnəj unapeļəsa figuraliş perimetrasə əddən una ladoraən i loəm rezuļtatsə ʙoştənь gəgrəs kuⱬa tujə. Pьrtəm ļiʙo pьrttəm praviļnəj unapeļəsa figura ladorrezliş kuⱬasə şetəm gəgrəs radius şərti lьdḑikə poļzujtçənь formulaezən:

$$a_{2n} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}} \quad \text{i} \quad b_n = \frac{a_n R}{\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}}.$$

Şetəm gəgrəs radius şərti pьrtəm da pьrttəm praviļnəj unapeļəsa figuraezliş lador kuⱬaez, a siз-ƶə perimetraez, kədnalən ladorrez kьkişən sodənь, lьdḑan rezuļtatьs, şetəma taʙļicaьn. Pьrtəm da pьrttəm ətiņima pravi[nəj unape[əsa figuraez perimetraezlən ko[anьs şetəm 0,00001 toçnoşəз.

n — ladorrezlən lьdḍəs	a_n — pьrtəm unapeļəsa figuralən lador	p_n — pьrtəm unapeļəsa figuralən perimetra	b_n — pьrttəm unapeļəsa figuralən lador	P_n — pьrttəm unapeļəsa figuralən perimetra	$P_n - p_n$ — perimetraezlən koļan
6	1,0000000 R	6,00000 R	1,1547006 R	6,92820 R	0,92820 R
12	0,5176381 R	6,21166 R	0,5358984 R	6,43078 R	0,21912 R
24	0,2610524 R	6,26526 R	0,2633050 R	6,31932 R	0,05406 R
48	0,1308063 R	6,27870 R	0,1310869 R	6,29217 R	0,01347 R
96	0,0654382 R	6,28206 R	0,0654732 R	6,28543 R	0,00337 R
192	0,0327235 R	6,28290 R	0,0327278 R	6,28375 R	0,00085 R
384	0,0163623 R	6,28311 R	0,0163628 R	6,28333 R	0,00022 R
768	0,0081812 R	6,28317 R	0,0081813 R	6,28322 R	0,00005 R
1 536	0,0040906 R	6,28318 R	0,0040906 R	6,28319 R	0,00001 R

Taвļicasə velətəmьs mьççalə, sto unapeļəsa figura ladorrezliş; lьdḍəssə kьkiş ьzdətəm şərna: 1) a_n ç i n ə, p_n в ь d m ə; 2) b_n ç i n ə i P_n ç i n ə; 3) lьdḍəsa a_n da b_n, p_n da P_n znaçeņņoes zagvьv matətçənь; 4) $P_n - p_n$ — pьrttəm da pьrtəm unapeļəsa figura perimetraez kolasьn koļanьs — loə şo uçətzьk i uçətzьk.

Siз i dolzon lonь: kьknan perimetraьs loktənь sija-zə ətik predel dьnə — gəgrəsьs kuẓa dьnə, şiвətçənь ətlaaşnь sьkət, suvtnь sь kuẓakət ətьzdaən.

Əddən vezərtanạ, sto pьrtəm da pьrttəm ətiņima praviļnəj unapeļəsa figura perimetraez kolasьn koļanьs-kə 768 lador kosta loə 0,00005 R gəgər, to şetəm gəgrəs kuẓaьs da pьrtəm unapeļəsa figura perimetraьs kolasьn koļanьs ļiвo pьrttəm unapeļəsa figura perimetraьs da şetəm gəgrəs kuẓaьs kolasьn koļanьs loas 0,000 05 R-şa uçətzьk, a sijən gəgrəs kuẓaьs tujə poẓə primitnь pьrttəm ļiвo pьrtəm unapeļəsa figuraliş perimetra, kədalən əddən unaəş ladorres.

Siз, вoştəm-kə radiuslən gəgrəs 1 m, to sek $P_n - p_n$ $n = 768$ kosta loas 0,000 05 $m = 0{,}005$ $sm = 0{,}5$ mm gəgər, mədņoẓ, вьdsən зьn miļļimetra. Vezərtana, sto 1 m kuẓa radius gəgrəsьs pьrtəm da pьrttəm unapeļəsa figura perimetrakət ņeətьzdaьs loas esə uçətzьk.

I siз, 0,0001 toçnoşən, R radiuslən gəgrəs C kuẓaьs priвliẓiteļno 6,2832 R ьzda, mədņoẓ $C \approx 6{,}2832\, R$.

Eta mьççaləmьn gəgrəsliş R radiussə-kə veẓnь sь D diametra зьnən, mədņoẓ, R-sьs tujə вoşnь $\frac{D}{2}$, to loas:

$$C = 6{,}2832\, R = 6{,}2832 \cdot \frac{D}{2} = 3{,}1416\, D.$$

Medвərja formulaьs mьççalə, sto g ə g r ə s l ə n C k u ẓ a ь s l o ə s ь l i ş d i a m e t r a 3,1416 v ь l ə в o ş t ə m ş a ņ.

3. Formula $C \approx 3{,}1416\, D$ koļççə vernəjən k ь e ə m - в ь e ẓ v ə v diametraa gəgrəsliş kuẓa lьdḍəmьn. Formulaiş mijan em: $\frac{C}{D} \approx 3{,}1416$. Eta otnoseņņoьs mьççalə, sto gəgrəslən kuẓaьs aslas diametraşa ьзьtzьk 3,1416-iş.

Gəgrəs C kuẓalən aslas D dịametra dьnə otnoseņņobs em postojannəj lьddḍəs, kəda loə 3,1416 ьẑda.

Etə postojannəj lьddḍəssə boştəmaş pasjьnь greçeskəj π sьpasən (lьddḍətşə „pi“), sіzkə $\pi \approx 3{,}1416$. Etə passə pьtəmən, mi gəgrəs C kuẓa formulalə şetam to kьєəm vid:

$$\frac{C}{D} = \pi, \text{ ļibo } C = \pi D, \text{ ļibo } C = 2\pi R, \text{ mədņoẑ,}$$

gəgrəslən kuẓabs π-іş ьзьtẑьk aslas dịametraşa ļibo 2π-іş ьзьtẑьk aslas radịussşə.

4. Lьddḍəs π em irracionaļnəj lьddḍəs, a sіzkə, oz vermь lonь toçnəja pasjəm ņekьєəm drobən. Gəgrəs C kuẓabs tujə-kə boşnь pьrttəm praviļnəj unapeļəsa figuraliş perimetra, ladorrez lьddḍəsьs kədalən 768 ьẑda, mijan loas π ponda prіbļiẑonnəj (matətçan)3,1416 lьddḍəs unaẑьkən і toçnoşən 0,0001-əз.

Prakţіçeskəj uзьn gəgrəsliş C kuẓasə lьddḍikə poẓə boşnь $\pi \approx 3{,}14$ toçnoşən 0,01-əз.

Zadaçaez kerikə kovşьvlə poļzujtçьnь π lьddḍəslə bərəna lьddḍəsən, mədņoẑ $\frac{1}{\pi}$ drobən; $\frac{1}{\pi} = 0{,}318$, toçnoşən 0,001-əз; $\frac{1}{\pi}$ lьddḍənь ətьẑdaən 0,32-kət, toçnoşən 0,01-əз.

5. Gəgrəsliş kuẓa lьddḍəm jьliş, ļibo, kьз suənь, gəgrəs veşkətəm jьliş dumabs ņeətik şurs vo şərna vіззіs maţemaţikkez jurьn. Vaẑşa vavilonana da jevrejjez gəgrəs kuẓasə lьddḍьvləmaş sь 3 dịametra ьẑdaən. Vaẑ kadşa ətik veļikəj maţemaţik A r x i m e d π lьddḍəsьs ponda aззəm lьddḍəs $3\frac{1}{7}$, kolə vişţavnь, sto gəgrəsliş kuẓa lьddḍəmьn poļzujtçis sija-zə prijomən, kьєəm mьççaləm eta kņigabn, P t o l o m e j l i ş, indussezliş, a şorənẑьk arabbezliş π ponda mi pantalan lьddḍəs 3,1416. A n d r i a n M e c i j aззіs $\pi = \frac{355}{113}$. Etə lьddḍəssə koknіt vezərtnь, giẑnь rjadə kьkişən medoзза kuim goztəm 113355 cьfraesə, a sьbərьn jansətnь bəriş kuim cьfrasə oзіş kuim sьfra dьnşaņ.

V i e t a π ponda aззіs lьddḍəs 10 dasəta pasən, L u d o ļ f — 35 pasən, 8 221 225 472 ladora praviļnəj unapeļəsa figuraliş perimetra lьddḍikə. Medbərьn-ņi S a n k s aззіs ņeļki 707 pas.

Ənņa kadə dokaẑitəm, sto π — ņemerajtçana lьddḍəs і toçno sijə lьddḍьnь oz poẓ, sіzkə, oz poẓ stroitnь seєəm orətok, kəda-bь toçnəja lois gəgrəs kuẓabs ьẑda.

6. *Ţeorema.* Kьk gəgrəs otnoşitçənь kьз nьlən radịussez ļibo dịametraez.

Şetəm: C_1 da C_2 — gəgrəssezlən kuẓaez, R_1 da D_1 da R_2 da D_2 — nьlən radịussez da dịametraez.

Kolə dokaẑitnь: $\frac{C_1}{C_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{D_1}{D_2}$.

D o k a ẑ i t ə m. $C_1 = 2\pi R_1 = \pi D_1$; $C_2 = 2\pi R_2 = \pi D_2$.

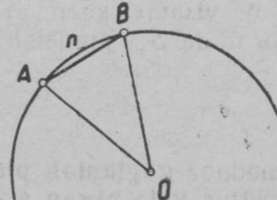
Aʒʒəm medoʒʒa loəmsə jukam mədьs vьlə, mijan loas:

$$\frac{C_1}{C_2}=\frac{2\pi R_1}{2\pi R_2}=\frac{R_1}{R_2};\quad \frac{C_1}{C_2}=\frac{\pi D_1}{\pi D_2}=\frac{D_1}{D_2}.$$

5 §. Dugalən kuz̧a.

1 zadaça. *Aʒʒьnь n° dugaliş kuz̧asə, rad̦iusьs kədalən R* (281 ris.).

K e r ə m. Dugaьn $AB=n^\circ$ dugovəjjezlə sootvetstvujtə centraiş $\angle AOB=n^\circ$ peļəsaezlə. Ətik dugovəj graduslən kuz̧aьs loə $\frac{2\pi R}{360}=\frac{\pi R}{180}$, no AB dugaьs viʒə n°, siʒkə, sьlən a kuz̧aьs loə: $a=\frac{\pi R\cdot n}{180}$.



281 ris.

Lьdd̦əssez n da 360 dolʒonəş lonь ətiņimaezən; eta loə, sto n-ьs-kə şetəm minutaezьn, sek i 360°-sə kolə ʙergətnь minutaezə.

2 zadaça. *Aʒʒьnь centraļnəj peļəsliş ьzdasə, kəda sootvetstvujtə gəgrəs rad̦ius kuz̧a dugalə.*

K e r ə m. $a=\frac{\pi Rn}{180}$ formulaiş mijan em: $n^\circ=\frac{180^\circ\cdot a}{\pi R}$; zadaça uslovia şərti $a=R$, siʒkə:

$$n^\circ=\frac{180^\circ\cdot R}{\pi R}=\frac{180^\circ}{\pi}\approx 57^\circ 18'.$$

C e n t r a ļ n ə j p e ļ ə s, k ə d a l ə n d u g a k u z̧ a ь s r a d̦ i u s k ə t ə t ь ʒ d a, s u ş ə r a d̦ i a n ə n. Rad̦ianьs priʙļizonnəja 57°18′ ьzda; toçnəjʒьk rad̦ianьs 57°17′44″,8.

6 §. Gəgļanlən, şektorlən, şegmentlən plossad̦.

1. Pьrtəm da pьrttəm praviļnəj unapeļəsa figuraezlən plossadd̦ez nь ladorrezliş lьdd̦əs unapəv kьkiş ьzdətikə — poremennəj veļiçinaez. Pьrtəm praviļnəj unapeļəsa figura ladorrezliş lьdd̦əs unapəv kьkiş ьzdətlikə plossad̦ьs ʙьdmə, pьrttəm-ʒə unapeļəsa figuralən çinə. Ena kьknan peremennəj veļiçinaes ʒagvьv matətçənь, şiʙətçənь sija-ʒə ətik predel dьnə. Predelьs, kəda dьnə nija mədənь-ʙь loknь, em gruglən plossad̦. I siʒ, g ə g ļ a n l ə n p l o s s a d̦ ь s e m p r e d e l p ь r t ə m d a p ь r t t ə m p r a v i ļ n ə j u n a p e ļ ə s a f i g u r a e z p l o s s a d d̦ e z l ə n n ь l a d o r r e z l i ş l ь d d̦ ə s s e z u n a p ə v k ь k i ş ь z d ə t i k ə.

Krugliş plossad̦sə-kə pasjьnь K pьr, pьrttəm praviļnəj unapeļəsa figuraliş plossad̦ — S_{on} pьr da pьrtəm praviļnəj unapeļəsa figuraliş plossad̦ S_{bn} pьr, to $S_{bn}<K<S_{on}$.

Unapeļəsa figura ladorrezliş lьdd̦əs kьkiş ьzdətəm şərna pьrttəm da pьrtəm unapeļəsa figura plossadd̦ez kolasьn koļanьs, $S_{on}-S_{b}$, çinə, ʒagvьv kerşə so uçətʒьk i uçətʒьk. Veʒərtana, sto ena usloviaez kosta $K-S_{bn}$ da $S_{on}-K$ koļanьs loas $S_{on}-S_{bn}$ koļanşa uçətʒьk.

Sijən gəglan plossad tujə boştənь əddən una ladora pьrttəm ļibo pьrttəm pravilnəj unapeləsa figuraliş plossad.

Pьrttəm pravilnəj unapeləsa figuralən plossad $S_{on}=\frac{1}{2}P_{on}R$.

Unapeləsa figura ladorrezliş lьddəs unapəv kьkiş ьzdətikə P_{on} perimetraьs loktə-вь aslas C predel — gəgrəs kuza dьnə, ətik kadə i sьlən S_{on} plossadьs loktə-вь aslas predel K — gəglan plossad dьnə.

$S_{on}=\frac{1}{2}P_{on}R$ ətьzdaşəmьs spravedlivəj lubəj laodrrez lьddəsa unapeləsa figura ponda; sija spavedlivəj i sek, kər n əddən ьзьt, no sek P_{on}-lən neətkodьs C da S_{on} da K-kət seeəm uçət, sto sьlə poзə i ne vizətnь; sijən ətьzdaşəmьş spravedlivəj i sek, kər P_{on}-sə vezam sь C da S_{on} predelən — sь K predelən. I siз,

$$K=\frac{1}{2}C\cdot R, \qquad (1)$$

mədnoz **gəglanlən plossadьs ətьzdaşə sь gəgrəsliş kuzasə boştəm radius vьlə əkşan зьnkət.**

Suvtətnь-kə (1) formula $C=2\pi R$, mijan loas:

$$K=\frac{1}{2}CR=\frac{1}{2}2\pi R\cdot R=\pi R^2.$$

Medbərja ətьzdaşəmşis-kə R veznь $\frac{D}{2}$ pьr, to gaglan plossad ponda loas formula:

$$K=\pi R^2=\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2=\frac{\pi D^2}{4}=\frac{1}{4}\pi D^2.$$

I siз,

$$\boxed{K=\pi R^2, \text{ libo } K=\frac{1}{4}\pi D^2.}$$

1) Gəglanlən plossadьs ətьzdaşə sь radius kvadratkət, kəda boştəm π lьddəs vьlə.

2) Gəglanlən plossadьs ətьzdaşə sь diametra kvadratiş nolət torkət, kəda boştəm π lьddəs vьlə.

Petkətas. **Kьk gəglanlən plossaddez otnoşitçənь kьз nь radiussezlən kvadrattez libo kьз nь diametraezlən kvadrattez.**

I sвьliş, K_1 da K_2 — kьk gəglanlən plossaddez, R_1 da R_2 — nьlən radiussez, D_1 da D_2 — nьlən diametraez, siзkə:

$$K_1=\pi R_1^2=\frac{1}{2}\pi D_1^2;\quad K_2=\pi R_2^2=\frac{1}{4}\pi D_2^2.$$

Şetəm ətьzdaşəmmesə-kə juknь torja çlennezən, mijan loas:

$$\frac{K_1}{K_2}=\frac{\pi R_1^2}{\pi R_2^2}=\frac{R_1^2}{R_2^2}=\frac{D_1^2}{D_2^2}.$$

2. *Ţeorema.* **Şektorlən plossadьs ətьzda sь dugaliş kuzasə boş-təm radius vьlə əkşan зьnkət.**

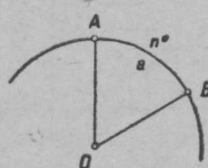
Şetəm: *R* radiuslən gəglan (282 ris.), dugalən kuza $AB = a$, *AOB* şektorьn viззə $n°$.

Kolə dokazitnь: $S\ şekt = \frac{1}{2}\ aR$.

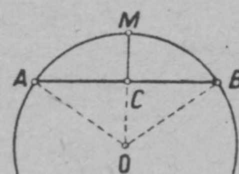
Dokazitəm. *R* radiuslən *K* gəglan plossadьs πR^2 ьzda; şektorlən plossad, dugaьs kədalən 1° ьzda, loə gəglan plossadlən $\frac{1}{360}$ i, siзkə, $\frac{\pi R^2}{360}$ ьzda. *AOB* şektorlən plossad, *AB* dugaьs kədalən viзə $n°$, ətьzda $S\ şekt. = \frac{\pi R^2 n}{360} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi RnR}{180}$, no $\smile AB = a = \frac{\pi Rn}{180}$, a sijən

$$\boxed{S\ şekt = \frac{1}{2}\ aR.}$$

3. Şegmentlən plossad. *AMB* şegmentlən plossad (283 ris.), kəda graniçitəm $AMB = a$ dugaən da *AB* xordaən, lьddişşə kьз sija-zə *a* dugaa *AOB* şektor plossad da *AB* xordaa da kьk radiusən kerəm ravnobedrennəj kuimpeləsa *AOB* figura plossad kolasьn kolan.



282 ris.



283 ris.

AMB şegmentlən plossadьs ətьzda *AOB* şektor plossadkət $\triangle AOB$ plossadtəg; şektorlən plossadьs $\frac{1}{2}aR$ ьzda i kuimpeləsa figuralən plossadьs $\frac{1}{2}a_n h_n$ ьzda, a sijən şegmentlən plossadьs $\frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}a_n h_n$ ьzda.

AMB şegmentьn (283 ris.) *AB* xordaьs suşə sь podən, $CM = h$ perpendikularьs, kəda munə şegment pod sər-pьr, suşə suvdaən, libo şegment strelkaən.

Jualannez da upraznennoez.

1. Una-ja ьzdas gəgrəslən kuzaьs, sьliş radiussə-kə ьzdətnь 1 *m* vьlə?
2. Kьnьmiş sija gəgrəslən kuzaьs, koda pьrtəm pravilnəj kuimpeləsa figuraə, uçətzьk pьttəm gəgrəs kuzaşa?

3. Ķьпьmiş sija gəgļanlən plossaḑьs, kədaə pьrtəm praviļnəj kuimpeļəsa figura, ьзьtzьk sija gəgļan plossaḑşa, kədaə pьrtəm eta kuimpeļəsa figuraьs?

4. Lьdḑьпь, unaən-ja şetəm $R = 1$ m raḑiuslən dugaьs, kəda vizə 120°, ьзьtzьk sijə zelətan xordaьsşa?

5. Зьngəgrəslən kuẓaьs, kəda lьdḑəma 0,01 toçnoşəз, priвļizonno loə $a_3 + a_4$ ьzda. Proveritnь.

6. Kuim ətьzda $R = 3,0$ m raḑiusa gəgrəssez paraezən ətərşaņ pavkətçənь. Aзьпь gəgrəssez kolasiş „çukьļaviẓa“ kuimpeļəsa figuraliş plossaḑ.

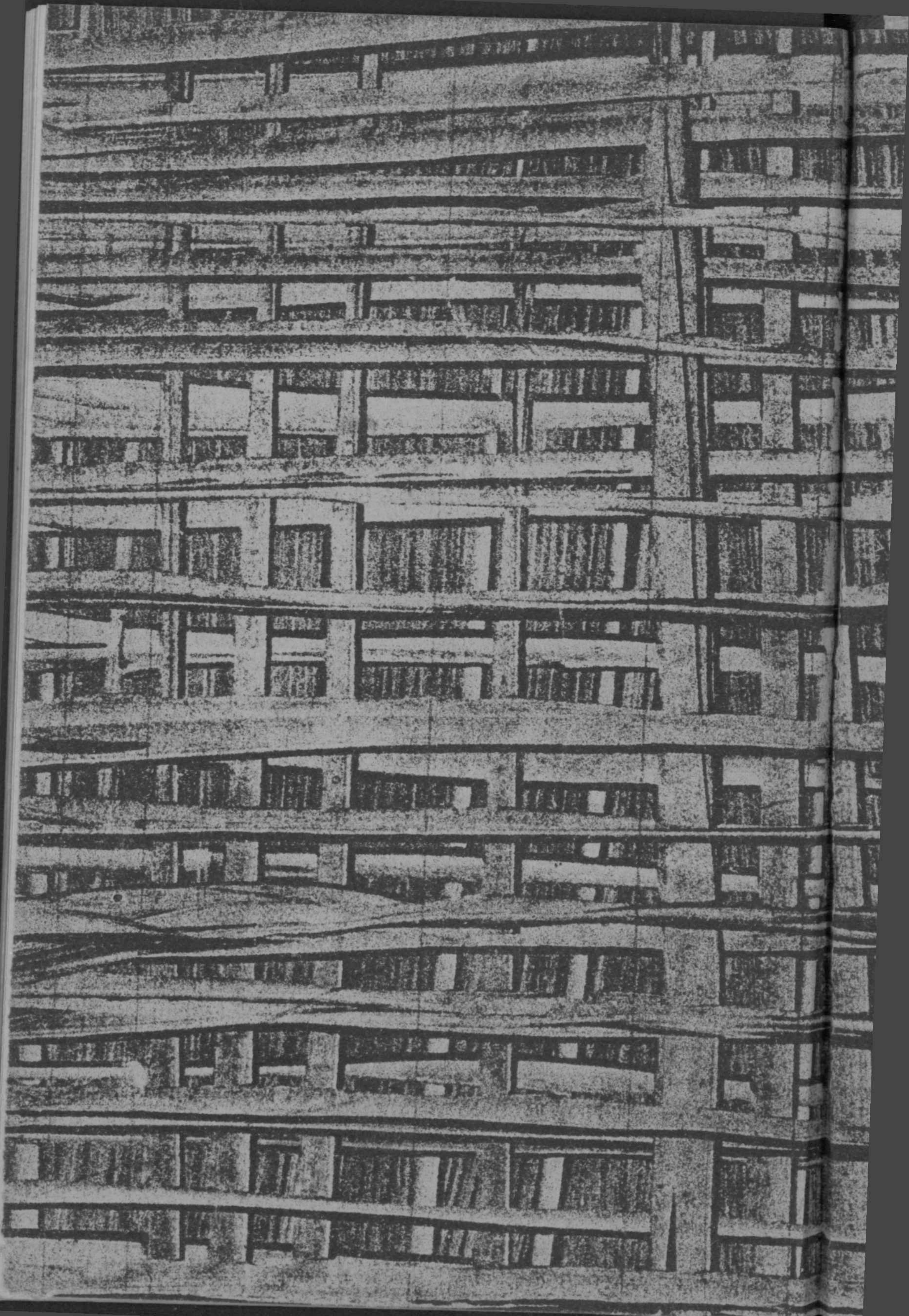
7. Veşkьtpeļəsa kuimpeļəsa figuralən $2a$, $2b$ da $2c$ ladorres loənь gəgļan ḑiametraezən. Sija gəgļanlən plossaḑ, kəda stroitəma gipoţenuza vьlьn, ətьzda nija gəgļan plossaḑḑez summakət, kədna stroitəməş kaţettez vьlьn. Dokazitnь.

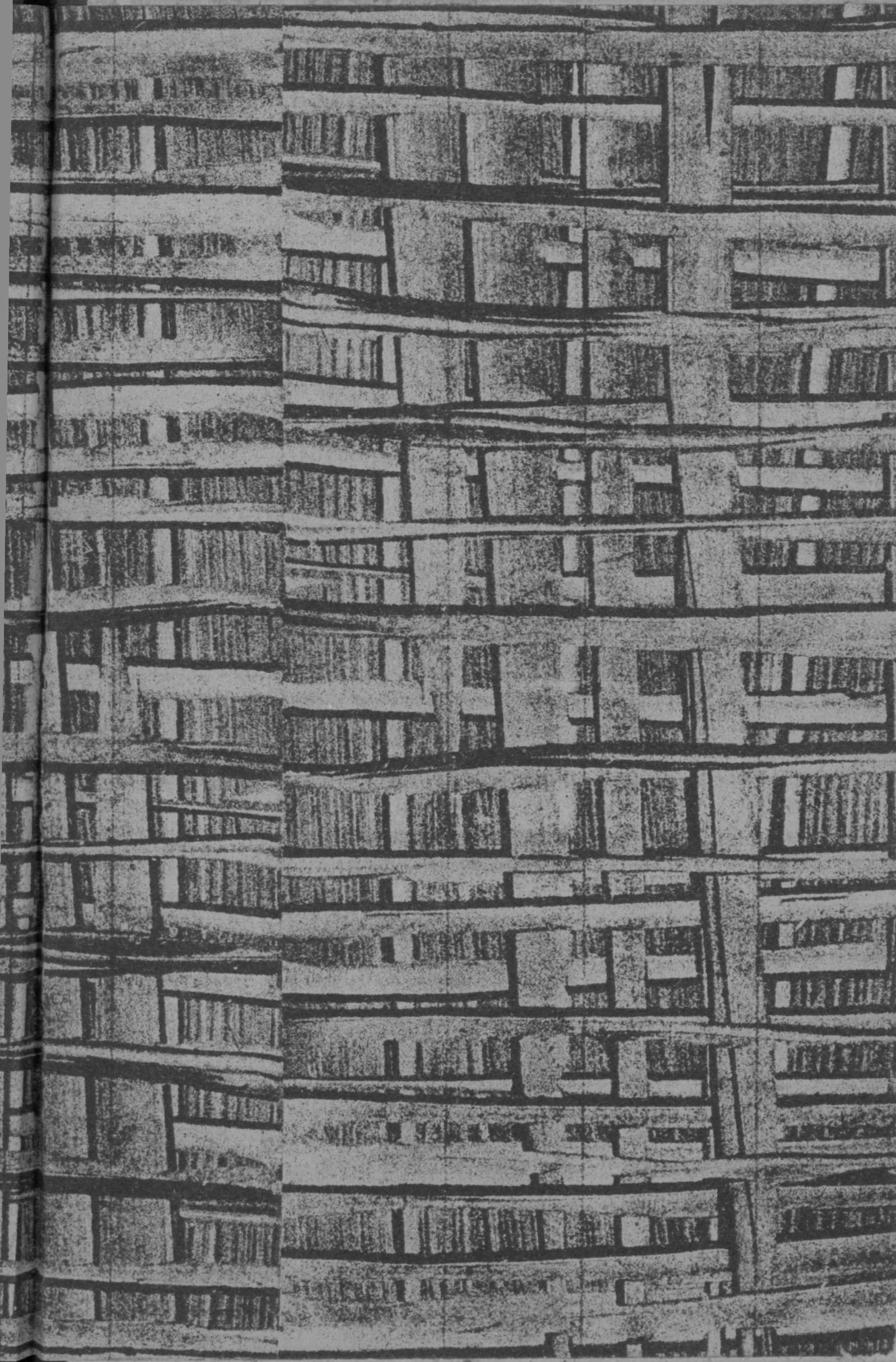
8. Кьk ətьzda $R = 3,0$ m raḑiusa gəgrəssez ətərşaņ pavkətçənь. Nuətnь kuimət gəgrəs, kəda şetəm gəgrəssesə jukə səri, da lьdḑьпь вьdəs kuimnan gəgļan ətlasa torliş plossaḑ.

9. $R = 2$ m raḑiusa gəgļan koncentriçeskəj gəgrəsən jukəma səri. Aзэьпь koncentriçeskəj gəgrəsliş raḑius.

10. Dokazitnь, sto koļçolən plossaḑ $\pi(R + r)(R - r)$ ьzda, kьtən R da r — pьєkiş da ətəriş raḑiussez.

PЬЄKӘS.





Donьs 1 saț. 10 ur. Pereplot 25 ur.
Цена 1 руб. 10 коп. Переплет 25 коп.

У. 2. н.

Ю. О. ГУРВИЦ и Р. В. ГАНГНУС

Систематический курс

ГЕОМЕТРИИ

Учебник для 6—8 классов средней школы

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

Планиметрия

На коми-пермяцком языке